

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

1. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\mu(X) > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο E .

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $\int |f| d\mu < +\infty$ τότε $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$. Τότε, $E_n \in \mathcal{A}$ διότι η f είναι μετρήσιμη, και αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$ έχουμε ότι

$$X = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-n, n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του μ ,

$$0 < \mu(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(E_m) > 0$. Θέτουμε $E := E_m$. Τότε, $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) > 0$ και $|f(x)| \leq m$ για κάθε $x \in E$, δηλαδή η f είναι φραγμένη στο E .

(β) Από την ανισότητα Markov, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu.$$

Επίσης, $\{x \in X : |f(x)| = +\infty\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$, άρα,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$0 \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu \rightarrow 0,$$

απ' όπου βλέπουμε ότι $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

2. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \emptyset\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

Έστω τώρα $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A .

Υπόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη. Τότε, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\{f < b\} \in \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{A}$, άρα η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο A . Τότε, υπάρχουν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $x \neq y$ στο A ώστε $f(x) = a$ και $f(y) = b$. Τότε, το σύνολο $\{f < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$ αφού η f είναι $\mathcal{F}_A$ μετρήσιμη, άρα το σύνολο $C = \{z \in A : f(z) < b\} = A \cap \{f < b\} \in \mathcal{F}_A$. Όμως, το C είναι μη κενό, διότι $x \in C$, άρα $A \subseteq C$ από τον ορισμό της $\mathcal{F}_A$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $y \in A \setminus C$.

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και παίρνει την τιμή a στο A . Έστω $b \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $b \leq a$ έχουμε ότι $A \cap \{x \in X : f(x) < b\} = \emptyset$ ενώ αν $a < b$ έχουμε ότι $\{x \in X : f(x) < b\} \supseteq \{x \in X : f(x) = a\} \supseteq A$. Έπεται ότι, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$, άρα η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη.

3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) > 0$ και $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει ότι $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $I_n = (n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$, οπότε $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$. Συνεπώς,

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^{-1}(I_n).$$

Καθένα από τα σύνολα $A_n = f^{-1}(I_n)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$, διότι η f είναι μετρήσιμη. Επίσης,

$$0 < \mu(X) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n),$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_m) > 0$. Θέτουμε $A = A_m$. Τότε, $\mu(A) > 0$ και για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ότι $f(x), f(y) \in I_m = (m\varepsilon, (m+1)\varepsilon]$, άρα $|f(x) - f(y)| < (m+1)\varepsilon - m\varepsilon = \varepsilon$.

4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $E \in \mathcal{A}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{X \setminus E} f_n d\mu \right| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad |f_n(x)| \leq |f(x)| + 1 \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

Υπόδειξη: Από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\int_A |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$. Από το θεώρημα Egorov, υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(X \setminus E) < \delta$ και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . Θεωρούμε τώρα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύουν οι

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{3} \min\{1, \varepsilon\} \quad \text{και} \quad \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in E$ έχουμε ότι

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq |f(x)| + 1,$$

και

$$\begin{aligned} \left| \int_{X \setminus E} f_n d\mu \right| &= \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu + \int_{X \setminus E} f d\mu + \int_E (f - f_n) d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| + \int_{X \setminus E} |f| d\mu + \int_E |f - f_n| d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3} \min\{1, \varepsilon\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

5. (α) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \leq \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geq 1$. Αν $g := \sup_n f_n$, αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} g d\lambda = +\infty.$$

Υπόδειξη: (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\int_{[0,1]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$ είναι ολοκληρώσιμη, σχεδόν για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^2 < +\infty \implies |f_n(x)|^2 \rightarrow 0 \implies f_n(x) \rightarrow 0.$$

(β) Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η $g = \sup_n f_n$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_{[0,1]} \left(\sup_n f_n \right) d\lambda = \int g d\lambda < \infty.$$

Αφού $0 \leq f_n \leq g$ για κάθε n και $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$1 = \int_{[0,1]} f_n d\lambda \rightarrow 0.$$

6. (α) Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

(β) Αποδείξτε την ταυτότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx$.

Υπόδειξη: (α) Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα, για κάθε $x \in (0, 1)$ (δηλαδή, σχεδόν παντού στο $[0, 1]$) έχουμε ότι

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x.$$

Οι συναρτήσεις $f_n(x) = -x^n \ln x$ είναι μη αρνητικές στο $(0, 1)$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Beppo Levi:

$$\int_0^1 \left(-\frac{\ln x}{1-x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-x^n \ln x) dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 (-x^n \ln x) dx = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \geq 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(β) Ξεκινώντας από την $x^{-x} = \exp(-x \ln x)$ γράφουμε

$$x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n, \quad x > 0.$$

Οι συναρτήσεις $f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n$ είναι μη αρνητικές στο $(0, 1)$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Beppo Levi:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx.$$

Ορίζουμε

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (-\ln x)^q dx, \quad p, q \geq 0.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι αν $p \geq 0$ και $q \geq 1$ τότε

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p,q-1}.$$

Επίσης, $I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$ για κάθε $p \geq 0$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις, και με επαγωγή, δείχνουμε ότι

$$I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f' είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

Υπόδειξη: Η f είναι συνεχής, και ειδικότερα Lebesgue μετρήσιμη. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right).$$

Οι g_n είναι συνεχείς και από τον ορισμό της παραγώγου βλέπουμε ότι $g_n(x) \rightarrow f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f' είναι μετρήσιμη. Υπολογίζουμε το

$$\int_0^1 g_n(x) dx = n \int_{1/n}^{1+1/n} f(x) dx - n \int_0^1 f(x) dx = n \int_1^{1+1/n} f(x) dx - n \int_0^{1/n} f(x) dx$$

και έχουμε ότι

$$\int_0^1 g_n(x) dx \longrightarrow f(1) - f(0) \tag{1}$$

λόγω της συνέχειας της f .

Η f' είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f'(\xi)| \leq M$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_{x,n} \in (x, x + 1/n)$ τέτοιο ώστε $f(x + 1/n) - f(x) = \frac{1}{n}f'(\xi_{x,n})$, άρα

$$|g_n(x)| = |f'(\xi_{x,n})| \leq M.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι οι $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, $g_n \rightarrow f'$ κατά σημείο, και $|g_n| \leq M$ στο $[0, 1]$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης και την (1),

$$\int_0^1 f'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = f(1) - f(0).$$

8. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Από την ανισότητα Markov, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(E_n) \leq \frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \alpha_n^2 = \alpha_n,$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έπεται ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = \lambda(\limsup E_n) = 0.$$

(β) Από το (α) έχουμε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει σε πεπερασμένα το πλήθος E_n , δηλαδή υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N_x$ να ισχύει

$$f_n(x) \leq \alpha_n \implies \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \leq 1.$$

Για κάθε τέτοιο x είναι φανερό ότι η $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη, άρα έχουμε το ζητούμενο.

9. Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \int_0^1 |t - g(x)| dx$$

είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\lambda(\{x \in [0, 1] : g(x) = t_0\}) = 0$.

Υπόδειξη: Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και έστω (h_n) ακολουθία με $h_n \rightarrow 0^+$. Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$\frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} \rightarrow 1 \quad \text{αν} \quad t_0 \geq g(x)$$

και

$$\frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} \rightarrow -1 \quad \text{αν} \quad t_0 < g(x).$$

Επιπλέον,

$$\left| \frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} \right| \leq 1$$

από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{F(t_0 + h_n) - F(t_0)}{h_n} &= \int_0^1 \frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} dx \\ &\rightarrow \int_0^1 (\chi_{\{g \leq t_0\}} - \chi_{\{t_0 < g\}}) dx \\ &= \lambda(\{x : g(x) \leq t_0\}) - \lambda(\{x : g(x) > t_0\}). \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει η

$$F'_+(t_0) = \lambda(\{x : g(x) \leq t_0\}) - \lambda(\{x : g(x) > t_0\}).$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$F'_-(t_0) = \lambda(\{x : g(x) < t_0\}) - \lambda(\{x : g(x) \geq t_0\}).$$

Συνεπώς, η F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 αν και μόνο αν

$$2\lambda(\{x : g(x) = t_0\}) = F'_+(t_0) - F'_-(t_0) = 0,$$

και έχουμε το ζητούμενο.

10. Έστω $X \neq \emptyset$ και $(Y, \mathcal{B})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Έστω $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα.

(β) Έστω $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική Borel μετρήσιμη. Αποδείξτε ότι υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $h : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g = h \circ f$.

(γ) Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι η g είναι μη αρνητική.

Υπόδειξη: (α) Το κενό σύνολο ανήκει στην $\mathcal{A}$, διότι $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A = f^{-1}(B)$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}$. Αφού $B^c \in \mathcal{B}$ και $A^c = f^{-1}(B^c)$, έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$. Τέλος, αν (A_n) είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τότε μπορούμε να γράψουμε $A_n = f^{-1}(B_n)$ για κάποια ακολουθία (B_n) στην $\mathcal{B}$. Εφόσον $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$, βλέπουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(β) Αρχίζουμε με την περίπτωση που η g είναι απλή, μετρήσιμη και μη αρνητική. Γράφουμε

$$g = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}$$

όπου τα A_k ανήκουν στην $\mathcal{A}$, είναι ξένα, και οι a_k είναι διακεκριμένοι. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ μπορούμε να βρούμε $B_k \in \mathcal{B}$ ώστε $A_k = f^{-1}(B_k)$. Εφόσον τα A_k είναι ξένα, το ίδιο ισχύει για τα B_k . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{B_k}.$$

Τότε, $g = h \circ f$. Πράγματι, αν $x \in X$ και $x \in A_k$ για κάποιον k , τότε $g(x) = a_k$, ενώ $f(x) \in B_k$, οπότε $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = a_k$. Αν το x δεν ανήκει σε κανένα από τα A_k τότε το $f(x)$ δεν ανήκει σε κανένα από τα B_k , άρα πάλι, $g(x) = 0 = (h \circ f)(x)$.

Έστω τώρα $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική Borel μετρήσιμη. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $s_n \rightarrow g$. Από το προηγούμενο βήμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε απλή μετρήσιμη $t_n : Y \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $s_n = t_n \circ f$. Ορίζουμε $h = \inf_n s_n$. Τότε, η h είναι μη αρνητική, μετρήσιμη και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$s_n(x) = t_n(f(x))$$

άρα

$$g(x) = \lim s_n(x) = \lim t_n(f(x)) = h(f(x)),$$

δηλαδή $g = h \circ f$.

(γ) Έστω $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Γράφουμε $g = f^+ - g^-$ και, από το (β), βρίσκουμε μη αρνητικές μετρήσιμες $h^+, h^- : Y \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f^+ = h^+ \circ f$ και $f^- = h^- \circ f$. Αν ορίσουμε $h = h^+ - h^-$ τότε η h είναι μετρήσιμη και

$$h(f(x)) = h^+(f(x)) - h^-(f(x)) = g^+(x) - g^-(x) = g(x)$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή $g = h \circ f$.