

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
8ο φυλλάδιο ασκήσεων

Άσκηση 1. Να δείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι συνεχής συνάρτηση.

Άσκηση 2. Έστω H χώρος εσωτερικού γινομένου. Δείξτε ότι αν για μια ακολουθία (x_n) ισχύει $\lim \|x_n\| = \|x\|$ και $\lim \langle x_n, x \rangle = \langle x, x \rangle$, τότε

$$\lim x_n = x.$$

Άσκηση 3. Να δείξετε ότι ο

$$Y = \{x = (x_n) \in l^2 : x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι κλειστός υπόχωρος του l^2 και βρείτε τον $Y^\perp$.

Άσκηση 4. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι του χώρου Hilbert H και υποθέτουμε ότι $M \perp N$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$$

είναι επίσης κλειστός υπόχωρος του H .

Άσκηση 5. Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο στον χώρο Hilbert H . Να δείξετε ότι

$$\|x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\| \geq \|x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|,$$

για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 6. Βρείτε τις τρεις πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gram-Schmidt στο σύνολο $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ του $C[-1, 1]$ με τη $\|\cdot\|_2$. Στη συνέχεια βρείτε αριθμούς α, β και γ που ελαχιστοποιούν την ποσότητα

$$\int_{-1}^1 |x^4 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx.$$

Άσκηση 7. Έστω $\{e_n\}$ μία ορθοκανονική βάση στον χώρο Hilbert H . Να δείξετε ότι

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle,$$

για κάθε $x, y \in H$.