

ΣΕΜΦΕ
Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση Ι
(7ο φυλλάδιο ασκήσεων)

Ασκηση 1. Έστω X διανυσματικός χώρος και $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ δύο νόρμες στον X για τις οποίες υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\| \leq c|||x|||$, για κάθε $x \in X$. Αν υποθέσουμε ότι ο X είναι χώρος Banach και με τις δύο νόρμες να δείξετε ότι οι $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες.

Ασκηση 2. Για κάθε $x = (x_n) \in c_0$ ορίζουμε

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n|.$$

Να δείξετε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα και ότι ο $(c_0, \|\cdot\|)$ δεν είναι χώρος Banach.

Ασκηση 3. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί. Να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in Y$ να υπάρχει $x \in X$ με $y = Tx$ και $\|x\| \leq M\|y\|$.

Ασκηση 4. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί που είναι ανοικτή απεικόνιση. Να δείξετε ότι εάν ο X είναι χώρος Banach, τότε και ο Y είναι χώρος Banach.

Ασκηση 5. Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει.