

ΣΕΜΦΕ
Συναρτησιακή Ανάλυση
 Λύσεις του βου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω X χώρος με νόρμα. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f(x) = \|x\|^2$ και $\|f\| = \|x\|$.

Λύση. Έστω $x \in X$. Θέτουμε $M = \langle x \rangle$ και ορίζουμε $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(\lambda x) = \lambda \|x\|^2, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Το f είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές πάνω στο M με $\|f\| = \|x\|$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach το f επεκτείνεται σε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές πάνω σε όλο το X . Συμβολίζοντας αυτήν την επέκταση για απλότητα πάλι με f έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Άσκηση 2. Έστω X χώρος με νόρμα και Y ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X . Αν $x_0 \notin Y$ να δείξετε ότι υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε

$$\|f\| = \frac{1}{d(x_0, Y)}, f(x_0) = 1 \text{ και } f(y) = 0, \text{ για κάθε } y \in Y.$$

Λύση. Θέτουμε $M = \langle Y \cup \{x_0\} \rangle$ και $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(y + \lambda x_0) = \lambda, \text{ για κάθε } y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Το f είναι προφανώς γραμμικό. Επιπλέον

$$|f(y + \lambda x_0)| = |\lambda| \leq \frac{1}{d(x_0, Y)} \|y + \lambda x_0\|, \text{ για κάθε } y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}$$

και επομένως $\|f\| \leq \frac{1}{d(x_0, Y)}$.

Θα δείξουμε ότι $\|f\| \geq \frac{1}{d(x_0, Y)}$. Προς αυτή την κατεύθυνση έστω (y_n) ακολουθία του U τέτοια ώστε

$$\lim \|y_n - x_0\| = d(x_0, Y).$$

Τότε

$$\|f\| = \sup_{0 \neq z \in M} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(y_n - x_0)|}{\|y_n - x_0\|} \rightarrow \frac{1}{d(x_0, Y)}$$

και άρα $\|f\| \geq \frac{1}{d(x_0, Y)}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\|f\| = \frac{1}{d(x_0, Y)}, f(x_0) = 1 \text{ και } f(y) = 0, \text{ για κάθε } y \in Y.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach το f επεκτείνεται σε ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές πάνω σε όλο το X . Συμβολίζοντας αυτήν την επέκταση για απλότητα πάλι με f έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Άσκηση 3. Έστω M ένα υποσύνολο του χώρου με νόρμα X . Να δείξετε ότι ένα στοιχείο $x_0 \in X$ ανήκει στο σύνολο $\overline{\langle M \rangle}$ αν και μόνο αν $f(x_0) = 0$, για κάθε $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f|_M = 0$.

Λύση. Αν $x_0 \in \overline{\langle M \rangle}$ και $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f|_M = 0$, τότε λόγω της συνέχειας του f έχουμε ότι $f(x_0) = 0$.

Αντίστροφα αν $x_0 \notin \overline{\langle M \rangle}$ από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f(x_0) \neq 0$ και $f(z) = 0$, για κάθε $z \in \overline{\langle M \rangle}$ και άρα $f|_M = 0$. Συνεπώς αν $f(x_0) = 0$, για κάθε $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $f|_M = 0$, τότε $x_0 \in \overline{\langle M \rangle}$. $\square$

Άσκηση 4. Έστω X χώρος με νόρμα και Y ένας κλειστός υπόχωρος του X . Θα λέμε ότι το $z \in X$ είναι κάθετο στο Y , και γράφουμε $z \perp Y$, αν $\text{dist}(z, Y) = \|z\|$. Να δείξετε ότι $z \perp Y$ αν και μόνο αν υπάρχει $0 \neq f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f|_Y = 0$ και $|f(z)| = \|f\|\|z\|$. Επίσης να δείξετε ότι αν $Y \neq X$ και $x_0 \notin Y$, τότε το $y_0 \in Y$ είναι το πλησιέστερο στοιχείο του Y στο X (δλδ $0 < \text{dist}(x_0, Y) = \|x_0 - y_0\|$) αν και μόνο αν $x_0 - y_0 \perp Y$.

Λύση. Έστω $\text{dist}(z, Y) = \|z\|$. Αφού $z \notin Y$, από το 2ο Πόρισμα του Θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*$, τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$, $f|_Y = 0$ και $f(z) = \text{dist}(z, Y)$ και επομένως για αυτό το f ισχύει $|f(z)| = \|f\|\|z\|$. Αντίστροφα αν υπάρχει $0 \neq f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f|_Y = 0$ και $|f(z)| = \|f\|\|z\|$, τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε ότι $\|z + y\|\|f\| \geq |f(z + y)| = |f(z)| = \|f\|\|z\|$. Συνεπώς $\|z\| = \text{dist}(z, Y)$.

Εύκολα δείχνουμε ότι αφού $y_0 \in Y$, τότε $\text{dist}(x_0 - y_0, Y) = \text{dist}(x_0, Y)$. Συνεπώς $\text{dist}(x_0, Y) = \|x_0 - y_0\|$ αν και μόνο αν $\text{dist}(x_0 - y_0, Y) = \|x_0 - y_0\|$ δηλαδή αν και μόνο αν $x_0 - y_0 \perp Y$. $\square$

Άσκηση 5. Έστω X χώρος με νόρμα, Y ένας υπόχωρος του X και

$$F = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1, f|_Y = 0\}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(i) Για κάθε $x \in X$

$$\text{dist}(x, Y) = \sup_{f \in F} |f(x)|.$$

(ii)

$$\overline{Y} = \bigcap_{f \in F} \ker f.$$

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 2.)

Λύση. (i) Αφού για κάθε $f \in F$ και $y \in Y$ έχουμε ότι $|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|x - y\|$ παίρνοντας supremum πάνω σε όλα τα $f \in F$ και στη συνέχεια infimum πάνω σε όλα τα $y \in Y$ έχουμε ότι $\sup_{f \in F} |f(x)| \leq \text{dist}(x, Y)$. Για την αντίστροφη ανισότητα, αν $\text{dist}(x, Y) > 0$, χρησιμοποιώντας το f από την άσκηση 2, έχουμε ότι

$$\text{dist}(x, Y) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

και αφού $\frac{f}{\|f\|} \in F$ έχουμε ότι $\text{dist}(x, Y) \leq \sup_{f \in F} |f(x)|$.
 (ii) Αν $Y = X$ δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε. Διαφορετικά αν $f \in F$ τότε $\overline{Y} \subseteq \overline{\ker f} = \ker f$ και συνεπώς $\overline{Y} \subseteq \bigcap_{f \in F} \ker f$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αν $x \notin \overline{Y}$, τότε από το 2ο Πόρισμα του Θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$, $f|_Y = 0$ και $x \notin \ker f$. Οπότε $x \notin \bigcap_{f \in F} \ker f$ και συνεπώς $\bigcap_{f \in F} \ker f \subseteq \overline{Y}$. $\square$