

ΣΑΤΜ 2025-2026
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = ax^4 + by^4$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές. (α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. (β) Αν a, b ομόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικό ακρότατο της f . (γ) Αν a, b ετερόσημα δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Άσκηση 2. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 3. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 10$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^2 + \frac{2}{3}y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 5. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 8x^3 - 12xy + y^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 6. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 7. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4x^2y + 4y^2 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης μίας C^2 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο το $(0, 0)$ δίνεται από τον τύπο $T_2(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Δείξτε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^3$.

(α) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f .

(β) Δείξτε ότι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι στον y -άξονα το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την f .

(γ) Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία διάφορη του y -άξονα που διέρχεται από το $(0, 0)$, το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου για την f .

Άσκηση 10. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 11. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 12. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 1$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 13. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x - y)^3$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 14. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.

Άσκηση 15. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - x^4 - y^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία.