

**ΣΑΤΜ 2025-2026**  
**Μαθηματική Ανάλυση**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**Άσκηση 1.** Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

**Λύση.** (α) Κατά μήκος του  $x$ -άξονα έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$  ενώ κατά μήκος του  $y$ -άξονα  $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$ . Αφού τα δύο όρια είναι διαφορετικά το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  δεν υπάρχει.

(β) Κατά μήκος της ευθείας  $y = x$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^2 + x^4)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} = 0$ , ενώ κατά μήκος της παραβολής  $x = y^2$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \frac{y^{12}}{2y^4)^3} = \frac{1}{8}$ . Τα δύο όρια είναι διαφορετικά και άρα το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^4}$  δεν υπάρχει.

(γ) Στον  $x$ -άξονα έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$  ενώ στην ευθεία  $y = x$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$ . Αφού τα δύο όρια είναι διαφορετικά το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$  δεν υπάρχει.

(δ) Κατά μήκος του θετικού  $x$ -άξονα έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \rightarrow 0^+ \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0$  ενώ κατά μήκος του  $y$ -άξονα,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} y \rightarrow 0 \frac{-y^2}{y^2} = -1$ . Τα δύο όρια είναι διαφορετικά το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$  δεν υπάρχει.

**Άσκηση 2.** Έστω  $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$  για κάθε  $(x,y) \neq (0,0)$ . Αποδείξτε ότι (α) η  $f$  είναι φραγμένη και ειδικότερα  $\max |f(x,y)| = \sqrt{2}$ . (β) Το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  δεν υπάρχει.

**Λύση.** (α) Από ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$|f(x,y)| = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x \cdot 1 + y \cdot 1|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

Επειδή  $f(1,1) = \sqrt{2}$  έπεται ότι  $\max f(x,y) = \sqrt{2}$ .

(β) Κατά μήκος της ευθείας  $y = x$  τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2}$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2}|x|} = -\sqrt{2}$$

Άρα το όριο  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  δεν υπάρχει.

**Άσκηση 3.** Αποδείξτε ότι  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$ .

**Λύση.** Έχουμε

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$$

Επειδή  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|x| + |y|) = 0$  από τον Κανόνα Παρεμβολής έπεται ότι  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$ .

**Άσκηση 4.** Έστω  $a, b, c \in \mathbb{R}$  τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους  $a, b, c$ ;

**Λύση.** Θέτουμε  $f(x, y) = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2}$ , για κάθε  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Τότε κατά μήκος του  $x$ -άξονα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2}{x^2} = a = 0$$

αφού  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$ . Ομοίως,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$  και άρα

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{cy^2}{y^2} = c = 0$$

Τέλος κατά μήκος της  $y = x$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2}{2x^2} = \frac{b}{2}$$

και άρα  $b = 0$ . Συνεπώς  $a = b = c = 0$ .

**Άσκηση 5.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε  $x_0 \neq 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = 0$  και ομοίως για κάθε  $y_0 \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$ .

(γ) Αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$ .

**Λύση.** (α) Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  ενώ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ .

(β) Σταθεροποιούμε ένα  $x_0 \neq 0$ . Η ευθεία  $x = x_0$  τέμνει την  $y = x$  μόνο σε ένα σημείο στο  $(x_0, x_0)$ . Άρα  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$ . Ομοίως  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$  για κάθε  $y_0 \neq 0$ .

(γ) Από το (β) έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  και ομοίως  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$ .

**Άσκηση 6.** (α) Βρείτε τις  $f_x(x, y)$  και  $f_y(x, y)$  της συνάρτησης  $f(x, y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}$ .

(β) Ομοίως για την συνάρτηση  $g(x, y) = x^y$ ,  $x > 0$  και  $y \in \mathbb{R}$ .

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

**Λύση.** (α) Έχουμε  $f_x(x, y) = 10xy^3 + 2xy \cos(x^2y) + ye^{xy}$  και  $f_y(x, y) = 15x^2y^2 + x^2 \cos(x^2y) + xe^{xy}$ .

(β) Παρατηρούμε ότι  $g(x, y) = e^{y \ln x}$  οπότε  $g_x(x, y) = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = x^{y-1}$  και  $g_y(x, y) = e^{y \ln x} \cdot \ln x = \ln x \cdot x^y$ .

(γ) Οι  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες γιατί έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

**Άσκηση 7.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  και  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  τέτοιο ώστε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Αν υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$  για όλα τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , δείξτε ότι  $c = 0$ .

**Λύση.** Θέτοντας  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$  παίρνουμε  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = c$ . Αφού υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ , από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι στο  $(x_0, y_0)$  υπολογίζονται από τον τύπο

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = c(u_1 + u_2)$$

και άρα

$$c(u_1 + u_2) = c$$

για κάθε μοναδιαίο  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ . Θέτοντας  $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  έχουμε ότι  $c\sqrt{2} = c$  και άρα  $c = 0$ .

**Άσκηση 8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0, 0) = 0$  και  $f(x, y) = \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(α) Υπολογίστε την παράγωγο κατά κατεύθυνση  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$  στο  $(0, 0)$  για κάθε μοναδιαίο  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ .

(β) Αποδείξτε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Λύση.** (α) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3u_1^3 + t^4u_2^4}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3(u_1^3 + tu_2^4)}{t^2(u_1^2 + u_2^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} (u_1^3 + tu_2^4) = u_1^3$$

(β) Από το (α) για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$  παίρνουμε  $f_x(0, 0) = 1$  ενώ για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$  παίρνουμε  $f_y(0, 0) = 0$ . Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ , από γνωστό θεώρημα θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u} = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1$$

και άρα από το (α) θα είχαμε

$$u_1^3 = u_1 \Leftrightarrow u_1(u_1^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \text{ ή } u_1 = \pm 1$$

για κάθε  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$  που δεν μπορεί να συμβαίνει (πχ  $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$ ). □

**Άσκηση 9.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και  $f(0, 0) = 0$ . Δείξτε τα εξής.

(α) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

(β) Όλες οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$  είναι ίσες με το μηδέν.

(γ) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Λύση.** (α) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot x^2 \leq x^2$$

Επειδή  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 = 0$  από τον κανόνα παρεμβολής έπεται ότι  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$  δηλαδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

(β) Έστω  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(t^2 u_1^2)(tu_2)}{\sqrt{(tu_1)^2 + (tu_2)^2}}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^2 u_2}{|t| \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 u_1 u_2}{|t|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^2 u_1 u_2}{|t|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (|t| u_1 u_2) = u_1 u_2 \lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0 \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών έχουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  αν και μόνο αν

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Πράγματι αυτό ισχύει αφού

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

και  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$ .

**Άσκηση 10.** Έστω  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$  και  $f(0, 0) = 0$ .

(α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$  για κάθε  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

(β) Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  ?

**Λύση.** (α) Έστω  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $\|\mathbf{u}\| = 1$ . Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3.$$

αφού  $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$  ( $\mathbf{u}$  μοναδιαίο).

(β) Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 \quad (1)$$

για κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Από το (α) για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1,$$

και αντίστοιχα για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ ,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 0.$$

Άρα αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1$$

Όμως από το (α) έχουμε ότι  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = u_1^3$ . Άρα θα έπρεπε

$$u_1^3 = u_1 \Leftrightarrow u_1(u_1^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \text{ ή } u_1 = 1 \text{ ή } u_1 = -1$$

για όλα τα  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$  που προφανώς δεν ισχύει (πχ.  $\mathbf{u} = (0, -1)$ ). Άρα η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Άσκηση 11.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0, 0) = 0$  και  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$ . (α) Με χρήση του

ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$  για κάθε  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

(β) Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  ?

**Λύση.** (α) Έστω  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$  μια κατεύθυνση στο  $\mathbb{R}^2$ . Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3(t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί  $u_1 = u_2 = 0$  αφού  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ . Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

$$(1) \ u_2 = 0. \text{ Τότε } u_1^2 = 1 \text{ και } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- (2)  $u_2 \neq 0$ . Τότε  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$ .  
 (β) Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0,0)$  τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 \quad (2)$$

για κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Από το (α) για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$ ,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 0,$$

και αντίστοιχα για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ ,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 0.$$

Άρα αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0,0)$  θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = 0$$

για κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το (α). Άρα η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,0)$ .

**Άσκηση 12.** Έστω η συνάρτηση  $f(x,y) = xe^{xy}$ .

1. Βρείτε τις  $f_x(x,y)$  και  $f_y(x,y)$ . Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη;
2. Βρείτε το διάνυσμα της κλίσης  $\nabla f(1,1)$  στο  $(1,1)$  και υπολογίστε τις κατευθύνσεις  $\mathbf{u}$  ως προς τις οποίες η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f$  στο  $(1,1)$  γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.

**Λύση.** (1) Έχουμε  $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$  και  $f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$ . Επειδή οι  $f_x$  και  $f_y$  είναι συνεχείς συναρτήσεις η  $f$  είναι κλάσης  $C^1$  και άρα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(2) Έχουμε  $f_x(1,1) = 2e$  και  $f_y(1,1) = e$ . Άρα  $\nabla f(1,1) = (2e, e)$ . Επειδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

για κάθε  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  με  $\|\mathbf{u}\| = 1$  και σε κάθε  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Άρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz η  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1,1)$  λαμβάνει μέγιστη τιμή για  $\mathbf{u} = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)$  και ελάχιστη για  $\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = -\left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)$ .

**Άσκηση 13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^9}$  αν  $x^3 + y^9 \neq 0$  και  $f(x,y) = 0$  διαφορετικά. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$  για κάθε  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ . (β) Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0,0)$  ?

**Λύση.** (α) Για κάθε  $t \neq 0$  έχουμε

$$\frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{(tu_1) \cdot (t^3 u_2^3)}{t^3 u_1^3 + t^9 u_2^9}}{t} = \frac{u_1 u_2^3}{u_1^3 + t^6 u_2^6}$$

και άρα

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^3}{u_1^3 + t^6 u_2^6} = \begin{cases} \frac{u_2^3}{u_1^3}, & \text{αν } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{αν } u_1 = 0 \end{cases}$$

(β) Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 \quad (3)$$

για κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Από το (α) για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 0,$$

και αντίστοιχα για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ ,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 0.$$

Άρα αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = 0 = u_1$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το (α). Άρα η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Άσκηση 14.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0, 0) = 0$  και  $f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(α) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η  $f$  έχει στο  $(0, 0)$  κατά κατεύθυνση παράγωγο  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$  για κάθε  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  μοναδιαίο διάνυσμα του  $\mathbb{R}^2$ .

(β) Εξετάστε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Λύση.** (α) Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3(u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3)}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3$$

(β) Από το (α) για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$  παίρνουμε  $f_x(0, 0) = 1$ . Ομοίως για  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$  παίρνουμε  $f_y(0, 0) = 1$ . Αν η  $f$  ήταν παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 + u_2$$

για κάθε μοναδιαίο  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  και άρα από το (α) θα είχαμε

$$u_1^3 + u_1u_2^2 + u_2^3 = u_1 + u_2$$

για κάθε  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ , άτοπο (πχ για  $u_1 = u_2 = 1/\sqrt{2}$  είναι εύκολο να δούμε ότι η παραπάνω ισότητα δεν ισχύει).

**Άσκηση 15.** Έστω  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^2$ -συνάρτηση. Αν  $f_x + f_y = 0$  δείξτε ότι  $f_{xx} = f_{yy}$ .

**Λύση.** Έχουμε  $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_x = -f_y$ . Παραγωγίζοντας ως προς  $x$  παίρνουμε

$$(f_x)_x = (-f_y)_x \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx} \quad (4)$$

Ομοίως,  $f_x + f_y = 0 \Rightarrow f_y = -f_x$  και παραγωγίζοντας ως προς  $y$  παίρνουμε,

$$(f_y)_y = (-f_x)_y \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy} \quad (5)$$

Όμως η  $f$  είναι  $C^2$  και άρα από το Θεώρημα Schwarz έχουμε  $f_{xy} = f_{yx}$ . Συνεπώς από τις (4) και (5) παίρνουμε ότι  $f_{xx} = f_{yy}$ .

**Άσκηση 16.** Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της  $f(x, y) = e^x \cos y$  τάξης 2 με κέντρο το  $(1, \pi)$ .

**Λύση.** Έχουμε

$$f_x(x, y) = e^x \cos y, \quad f_y(x, y) = -e^x \sin y$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x \cos y$$

$$f_{yy}(x, y) = e^x \cos y$$

$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y = -e^x \sin y$$

Άρα

$$f_x(1, \pi) = -e, \quad f_y(1, \pi) = 0, \quad f_{xx}(1, \pi) = -e, \quad f_{yy}(1, \pi) = -e, \quad f_{xy}(1, \pi) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της  $f(x, y) = e^x \cos y$  τάξης 2 με κέντρο το  $(1, \pi)$  είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, \pi) + f_x(1, \pi)(x - 1) + f_y(1, \pi)(y - \pi) + \\ &\quad \frac{1}{2} (f_{xx}(1, \pi)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, \pi)(x - 1)(y - \pi) + f_{yy}(1, \pi)(y - \pi)^2) \\ &= e - e(x - 1) + \frac{1}{2} (-e(x - 1)^2 - e(y - \pi)^2) \end{aligned}$$

**Άσκηση 17.** Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  τάξης 2 με κέντρο το  $(1, 0)$ .

**Λύση.** Έχουμε

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Άρα

$$f_x(1, 0) = 2, \quad f_y(1, 0) = 0, \quad f_{xx}(1, 0) = -2, \quad f_{yy}(1, 0) = 2, \quad f_{xy}(1, 0) = 0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  τάξης 2 με κέντρο το  $(1, 0)$  είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y + \frac{1}{2} (f_{xx}(1, 0)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 0)(x - 1)y + f_{yy}(1, 0)y^2) \\ &= 2(x - 1) - (x - 1)^2 + y^2 \end{aligned}$$

**Άσκηση 18.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - 1$ . (α) Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της  $f$  με κέντρο το  $(0, 0)$ . (β) Υπολογίστε τα όρια  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  και  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ .

**Λύση.** (α) Έχουμε  $f_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}$ ,  $f_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}$ ,  $f_{xx}(x, y) = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2}$ ,  $f_{yy}(x, y) = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2}$ ,  $f_{xy}(x, y) = 4xye^{x^2+y^2}$ . Συνεπώς,  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0$  και  $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$ . Άρα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της  $f$  με κέντρο το  $(0, 0)$  είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 0 + 0x + 0y = 0$$

και

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] = x^2 + y^2$$



(β) Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Επίσης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} - 1 \right] = 0$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} = 1.$$