

ΣΑΤΜ 2025-2026
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(x,y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad f(x,y) = \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Άσκηση 2. Έστω $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Αποδείξτε ότι (α) η f είναι φραγμένη και ειδικότερα $\max |f(x,y)| = \sqrt{2}$. (β) Το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x} \right) = 0$.

Άσκηση 4. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τους a, b, c ;

Άσκηση 5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = y, \\ 0 & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0 \neq 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = 0$ και ομοίως για κάθε $y_0 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$.

Άσκηση 6. (α) Βρείτε τις $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$ της συνάρτησης $f(x,y) = 5x^2y^3 + \sin(x^2y) + e^{xy}$.

(β) Ομοίως για την συνάρτηση $g(x,y) = x^y$, $x > 0$ και $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες;

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = c$ για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $c = 0$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(α) Υπολογίστε την παράγωγο κατά κατεύθυνση $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ στο $(0,0)$ για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Άσκηση 9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και $f(0, 0) = 0$. Δείξτε τα εξής.

(α) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Όλες οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ είναι ίσες με το μηδέν.

(γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 10. Έστω $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

(β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 11. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 12. Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = xe^{xy}$.

1. Βρείτε τις $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$. Είναι η f παραγωγίσιμη;

2. Βρείτε το διάνυσμα της κλίσης $\nabla f(1, 1)$ στο $(1, 1)$ και υπολογίστε τις κατευθύνσεις $\mathbf{u}$ ως προς τις οποίες η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1, 1)$ γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^9}$ αν $x^3 + y^9 \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ διαφορετικά. (α) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$. (β) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Άσκηση 14. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(α) Δείξτε, με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, ότι η f έχει στο $(0, 0)$ κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$.

(β) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 15. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 -συνάρτηση. Αν $f_x + f_y = 0$ δείξτε ότι $f_{xx} = f_{yy}$.

Άσκηση 16. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = e^x \cos y$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, \pi)$.

Άσκηση 17. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1, 0)$.

Άσκηση 18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x^2 + y^2} - 1$. (α) Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$. (β) Υπολογίστε τα όρια $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ και $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$.