

Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2025–26)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 25 Νοεμβρίου 2025)

1. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε ότι αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο φ -μετρήσιμων συνόλων, τότε για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n).$$

2. (α) Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X , και έστω $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $B \subseteq A$ και κάθε $C \subseteq X \setminus A$ ισχύει ότι $\varphi(B \cup C) = \varphi(B) + \varphi(C)$.

(β) Έστω $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ εξωτερικά μέτρα στο μη κενό σύνολο X . Αποδείξτε ότι η $\varphi = \max\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι επίσης εξωτερικό μέτρο.

3. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο αν για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ το σύνολο $E \setminus [a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ με $\varphi(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο, $\varphi(E) = 1$ αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και $\varphi(E) = +\infty$ αν το E έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Αποδείξτε ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν το A ή το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι αριθμήσιμο.

4. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = 0$ ισχύει ότι $\mu(E) = 0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(E) < \delta$ τότε $\mu(E) < \varepsilon$.

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V τέτοια ώστε $E \subseteq U$, $U \setminus E \subseteq V$ και $\lambda(V) < \varepsilon$.

6. Κατασκευάστε ένα ανοικτό σύνολο $U \subset [0, 1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Το U είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

(β) $\lambda(U) < 1$.

(γ) Για κάθε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subset [0, 1]$ ισχύει ότι $\lambda(U \cap (a, b)) > 0$.

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda_2(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \alpha(B_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i \right\}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις του A από ανοικτούς δίσκους $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ και $\alpha(B) = \pi r^2$ για έναν δίσκο ακτίνας r . Συμπεράνατε ότι: αν T είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ τότε $\lambda_2(A) = \lambda_2(T(A))$.

8. Έστω D πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $\lambda(A \Delta (A + x)) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $\lambda(A) = 0$ ή $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

9. Αποδείξτε ότι υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ συνόλων $A_n \subset [0, 1]$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$.

10. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < +\infty$, το οποίο έχει την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in E$ υπάρχει $\rho(x) > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $0 < r < \rho(x)$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)),$$

όπου $B(x, r)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r . Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq E$ τέτοιο ώστε $\lambda_k(E \setminus F) \leq \varepsilon$ και υπάρχει $t > 0$, ανεξάρτητος από το x , τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in F$ και για κάθε $0 < r \leq t$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)).$$

Ισχύει η προηγούμενη πρόταση αν $\lambda_k(E) = +\infty$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.