



Θέμα 1 (7 + 8 μονάδες).

(α) Βρείτε, με πλήρη αιτιολόγηση, το supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) του συνόλου

$$A = \left\{ 4 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

και εξετάστε αν το $\sup A$ είναι μέγιστο στοιχείο του A .

(β) Δίνεται μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών, η οποία συγκλίνει στο 2. Εξετάστε αν τα σύνολα

$$B = \{n \in \mathbb{N} : 2 + 10^{-3} < x_n\}, \quad C = \{n \in \mathbb{N} : 2 - 10^{-3} < x_n\}$$

είναι πεπερασμένα ή άπειρα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 2 (5 + 5 + 5 μονάδες). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Θέμα 3 (12 + 8 μονάδες).

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$x^3 + x - 1 = 0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Θέμα 4 (15 μονάδες). Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left| \sin(x^2) - \left(x^2 - \frac{x^6}{6} \right) \right| \leq \frac{|x|^{10}}{120}.$$

Θέμα 5 (15 μονάδες). Καθορίστε το σύνολο I όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} (x-1)^n$$

συγκλίνει.

Θέμα 6 (10 + 10 μονάδες).

(α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{2x+5}{x^2+4x+8} dx.$$

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Εξετάστε για ποιες τιμές του a ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$J_a = \int_0^{+\infty} e^{ax} dx$$

και, για αυτές τις τιμές, υπολογίστε το.