

Εξέταση στο μάθημα  
«Μαθηματική Ανάλυση Ι»  
(Συναρτήσεις μίας μεταβλητής)  
Κανονική Εξεταστική  
2 Φεβρουαρίου 2026

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Ναυπηγών  
Μηχανολόγων Μηχανικών



Διάρκεια εξέτασης:  
2 ώρες

Διδάσκων:  
Β. Γρηγοριάδης

**Θέμα 1** (7 + 8 + 5 μονάδες).

- (α) Δείξτε ότι το σύνολο  $A = \left\{ \frac{n+1}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$  είναι άνω φραγμένο και υπολογίστε το supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) του. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (β) Δίνεται η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που ορίζεται αναδρομικά ως ακολούθως:  
 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n + 2, n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι ισχύει  $a_n < 3$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  καθώς και ότι η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνισίως αύξουσα.
- (γ) Βρείτε τον συντελεστή του  $x^6$  στο ανάπτυγμα της αλγεβρικής παράστασης  $(1+x)^8$ .

**Θέμα 2** (5 + 5 + 5 μονάδες). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n} + 1)}.$$

**Θέμα 3** (5 + 10 μονάδες).

- (α) Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(q) = 0$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$  και  $f(x) = 1$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x \notin \mathbb{Q}$ . Εξετάστε αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = \sqrt{2}$ .
- (β) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = x^3 + 2x - 5$  είναι επί του  $\mathbb{R}$  και υπολογίστε την τιμή της παραγώγου  $(g^{-1})'(-2)$  της  $g^{-1}$  στο  $y_0 = -2$ . (Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η  $g$  είναι ένα-προς-ένα με παραγωγίσιμη αντίστροφη.)

**Θέμα 4** (15 μονάδες). Βρείτε ένα  $n \in \mathbb{N}$ , για το οποίο η απόσταση  $|a_n - y|$  του πραγματικού αριθμού  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k \cdot k!}$  από τον  $y = \sqrt[3]{e}$  είναι μικρότερη του  $\frac{1}{200}$ . Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Θέμα 5** (15 μονάδες). Βρείτε το σύνολο όλων των  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 3^n} \cdot (x+1)^n$$

συγκλίνει. Έπειτα υπολογίστε την τιμή της παραγώγου 5ης τάξης  $f^{(5)}(-1)$  της  $f$  στο  $x_0 = -1$ .

**Θέμα 6** (10 + 10 μονάδες).

(i) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 3x + 3} dx.$$

(ii) Εξετάστε αν ορίζεται το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα και σε αυτή την περίπτωση να το υπολογίσετε:

$$J = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx.$$