



Θέμα 1 (7 + 8 μονάδες).

- (α) Βρείτε, με πλήρη αιτιολόγηση, το supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) του συνόλου $A = \{5 - 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ και εξετάστε αν είναι μέγιστο στοιχείο του A .
- (β) Δίνεται μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών, η οποία συγκλίνει στο $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν τα σύνολα $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x - 10^{-2}\}$ και $C = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x + 10^{-2}\}$ είναι άπειρα ή πεπερασμένα (το κενό σύνολο θεωρείται πεπερασμένο).

Θέμα 2 (5 + 10 μονάδες).

- (α) Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ ο αριθμός $6^n - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 5.
- (β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5 - n^3 + 8}$.

Θέμα 3 (8 + 12 μονάδες).

- (α) Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(r) + g(r) = 0$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι $f = -g$.
- (β) Αποδείξτε με χρήση του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής** ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς $b > a > 0$ ισχύει $b^4 - a^4 \leq 4b^3 \cdot (b - a)$.

Θέμα 4 (15 μονάδες). Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ με $x < \frac{\sqrt[4]{24}}{10}$ ισχύει

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right| < 10^{-4}.$$

Θέμα 5 (10 + 5 μονάδες).

- (α) Καθορίστε το σύνολο I όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^3 - 1}{3^n} \right) \cdot x^n$ συγκλίνει.
- (β) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά κέντρου 0 τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3)$.

Θέμα 6 (10 + 10 μονάδες).

- (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1} dx.$$

- (β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $\alpha \geq 1$. Εξετάστε για ποιες τιμές του α ορίζεται το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}$,

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Καλή επιτυχία!