



Θέμα 1 (7 + 8 μονάδες).

- (α) Βρείτε, με πλήρη αιτιολόγηση, το infimum (μέγιστο κάτω φράγμα) του συνόλου $A = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ και εξετάστε αν είναι ελάχιστο στοιχείο του A .
- (β) Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί $0 < a_{n+1} < \frac{1}{2} \cdot a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εξετάστε την $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως προς τη σύγκλιση και στην περίπτωση που συγκλίνει υπολογίστε το όριό της.

Θέμα 2 (10 + 5 μονάδες).

- (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+n^2 \cdot 3^n}$.
- (β) Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot a_n$.

Θέμα 3 (8 + 12 μονάδες).

- (α) Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(r) = g(r)$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3})$.
- (β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = (x+1)^3 + x + 3$ είναι ένα-προς-ένα και υπολογίστε την παράγωγο $(f^{-1})'(4)$ της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο 4. (Παίρνουμε δεδομένο ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.)

Θέμα 4 (15 μονάδες). Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$0 < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) < \frac{x^4}{4}.$$

Θέμα 5 (15 μονάδες). Καθορίστε το σύνολο I όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \cdot x^n$ συγκλίνει και βρείτε την παράγωγο $f^{(n)}(0)$ της f στο 0 τάξης $n \in \mathbb{N}$, όπου $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \cdot x^n$, $x \in I$.

Θέμα 6 (10 + 10 μονάδες).

- (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx.$$

- (β) Εξετάστε αν ορίζεται το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}$ και σε αυτή την περίπτωση να το υπολογίσετε:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$