

Ασκήσεις



28 Οκτωβρίου 2025

Διδάσκων:  
Β. Γρηγοριάδης

Πραγματικοί Αριθμοί

**Άσκηση 1** (De Morgan's laws). Θεωρούμε σύνολα  $A$ ,  $B$ ,  $X$ . Δείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες συνόλων, που είναι γνωστές και ως **Νόμοι De Morgan**:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

**Υπόδειξη.** Σε κάθε ιδιότητα δείξτε ότι το σύνολο στα αριστερά είναι υποσύνολο του συνόλου στα δεξιά και αντίστροφα.

**Λύση - υποδείξεις.**

Ξεκινάμε με την **πρώτη ιδιότητα** συνόλων. Δείχνουμε αρχικά ότι το σύνολο  $X \setminus (A \cup B)$  είναι υποσύνολο του  $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ . Θεωρούμε ένα  $x \in X \setminus (A \cup B)$ . Πρέπει να δείξουμε ότι  $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ .

Αφού  $x \in X \setminus (A \cup B)$  τότε  $x \in X$  και  $x \notin A \cup B$ . Ειδικότερα το  $x$  δεν ανήκει στο  $A$  και το  $x$  δεν ανήκει στο  $B$ . Αφού  $x \in X$  έχουμε ότι το  $x$  ανήκει στο  $X \setminus A$  και το  $x$  ανήκει στο  $X \setminus B$ . Άρα το  $x$  ανήκει στην τομή  $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ , που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφα δείχνουμε ότι το  $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$  είναι υποσύνολο του  $X \setminus (A \cup B)$ . Θεωρούμε  $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$  και πρέπει να δείξουμε ότι  $x \in X \setminus (A \cup B)$ .

Αφού  $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$  τότε  $x \in X \setminus A$  και  $x \in X \setminus B$ . Ειδικότερα το  $x$  δεν ανήκει στο  $A$  και το  $x$  δεν ανήκει στο  $B$ . Επομένως το  $x$  δεν ανήκει στην ένωση  $A \cup B$ . Αφού το  $x$  ανήκει στο  $X$  προκύπτει ότι  $x \in X \setminus (A \cup B)$ .

**2ος τρόπος για την πρώτη ιδιότητα συνόλων:** Οι πιο πάνω συλλογισμοί μπορούν να γραφούν πιο σύντομα χρησιμοποιώντας λογικές ισοδυναμίες ως εξής:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\iff x \in X \text{ και } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in X \text{ και } (x \notin A \text{ και } x \notin B) \\ &\iff x \in X \setminus A \text{ και } x \in X \setminus B \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \end{aligned}$$

Άρα τα σύνολα  $X \setminus (A \cup B)$  και  $(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$  έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και επομένως είναι ίσα.

Η **δεύτερη ιδιότητα** συνόλων προκύπτει με παρόμοιους συλλογισμούς. Τη δείχνουμε χρησιμοποιώντας τις λογικές ισοδυναμίες.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cap B) &\iff x \in X \text{ και } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in X \text{ και } (x \notin A \text{ ή } x \notin B) \\ &\iff x \in X \setminus A \text{ ή } x \in X \setminus B \\ &\iff x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B). \end{aligned}$$

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι:

(i)  $2n^2 > 2n + 1$  για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 2$ .

(ii)  $3^n > n^2$  για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 2$ .

**Σχόλιο:** Παρατηρούμε ότι για  $n = 0, 1$  η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για  $n = 0, 1$ . Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το  $n = 2$ . Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για  $n \geq 2$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Για  $n = 2$  έχουμε  $2n^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$  και  $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ . Άρα ισχύει  $2n^2 > 2n + 1$ .

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 2$  ισχύει  $2n^2 > 2n + 1$ . (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι  $2(n+1)^2 > 2(n+1) + 1 = 2n + 3$ . Έχουμε

$$2(n+1)^2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 4n + 2 > (2n + 1) + 4n + 2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= 6n + 3 > 2n + 3.$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για  $n = 2$  έχουμε  $3^n = 3^2 = 9 > 4 = 2^2 = n^2$ .

Υποθέτουμε ότι  $3^n > n^2$  για κάποιο  $n \geq 2$ . (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι  $3^{n+1} > (n+1)^2$ . Έχουμε

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot n^2$$

(από επαγωγική υπόθεση)

$$= n^2 + 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

όπου στην προηγούμενη ανίσωση χρησιμοποιήσαμε το (i). Άρα δείξαμε ότι  $3^{n+1} > (n+1)^2$  και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

**Άσκηση 3.** Δείξτε ότι ο αριθμός  $(2n+1)^2 - 1$  είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 1$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Για  $n = 1$  έχουμε

$$(2n+1)^2 - 1 = (2 \cdot 1 + 1)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

που είναι πολλαπλάσιο του 8.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  ο αριθμός  $(2n+1)^2 - 1$  είναι πολλαπλάσιο του 8. Δείχνουμε ότι ο αριθμός  $(2(n+1)+1)^2 - 1 = (2n+3)^2 - 1$  είναι πολλαπλάσιο του 8.

Από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε  $(2n+1)^2 - 1 = 8k$  για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$  ή αλλιώς  $(2n+1)^2 = 8k + 1$ . Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (2n+3)^2 - 1 &= 4n^2 + 12n + 9 - 1 \\ &= 4n^2 + 12n + 8 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 7 \\ &= (2n+1)^2 + 8n + 7 \\ &= 8k + 1 + 8n + 7 \quad (\text{από Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= 8k + 8n + 8 \\ &= 8 \cdot (k + n + 1). \end{aligned}$$

Δηλαδή το  $(2n+3)^2 - 1$  είναι πολλαπλάσιο του 8. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

---

**Άσκηση 4.** Δείξτε ότι:

$$2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(Όταν  $n = 1$  θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

**Λύση - υποδείξεις.**

Για  $n = 1$  το δεξιό σκέλος είναι ίσο με

$$\frac{n(3n + 1)}{2} = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 + 1)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  έχουμε

$$2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

(Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι

$$2 + 5 + \cdots + (3(n + 1) - 1) = \frac{(n + 1)(3(n + 1) + 1)}{2}.$$

Φέρνουμε το δεξιό σκέλος σε πιο απλή μορφή:

$$\frac{(n + 1)(3(n + 1) + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(3n + 4)}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2 + 5 + \cdots + (3(n + 1) - 1) &= 2 + 5 + \cdots + (3n - 1) + (3(n + 1) - 1) \\ &= \frac{n(3n + 1)}{2} + (3(n + 1) - 1) \quad (\text{Από Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= \frac{n(3n + 1)}{2} + 3n + 2 \\ &= \frac{n(3n + 1) + 6n + 4}{2} \\ &= \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 7n + 4}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(3n + 4)}{2}. \end{aligned}$$

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

**Άσκηση 5.** Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ισχύει η ταυτότητα

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Για  $n = 1$  ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει για το  $n + 1$ , δηλ.

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned}1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\&= (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Συνεπώς η ταυτότητα, σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, θα ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 6.** Δείξτε ότι  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Μπορείτε να βρείτε μια γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας;

**Λύση - υποδείξεις.**

Για  $n = 1$  ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει για το  $n+1$ . Πράγματι, με χρήση της Επαγωγικής Υπόθεσης έχουμε

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Άρα ισχύει για  $n+1$  και από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 7.** Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Για  $n = 1$  ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει για το  $n+1$ , δηλαδή ότι

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \\&= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\&= \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \\&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \left( \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \right),\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2n+2},$$

το οποίο επαληθεύεται εύκολα με πράξεις.

Άρα σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η ταυτότητα θα ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 8.** Δείξτε ότι για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  έχουμε  $m+n \in \mathbb{N}$  και  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ .

**Υπόδειξη.** Εφαρμόστε επαγωγή στο  $n$  ξεχωριστά για τον κάθε ένα από τους πιο πάνω ισχυρισμούς.

### Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε  $m \in \mathbb{N}$  και δείχνουμε με επαγωγή στο  $n \in \mathbb{N}$  ότι  $m + n \in \mathbb{N}$ . Για  $n = 1$  έχουμε  $m + n = m + 1$  το οποίο ανήκει στο  $\mathbb{N}$  γιατί  $m \in \mathbb{N}$  και το  $\mathbb{N}$  είναι επαγωγικό σύνολο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $m + n \in \mathbb{N}$  και δείχνουμε ότι  $m + (n + 1) \in \mathbb{N}$ . Προφανώς  $m + (n + 1) = (m + n) + 1$ . Αφού  $m + n \in \mathbb{N}$  (επαγωγική υπόθεση) και αφού το  $\mathbb{N}$  είναι επαγωγικό σύνολο έχουμε ότι ο αριθμός  $(m + n) + 1$  ανήκει στο  $\mathbb{N}$ . Από την Αρχή Επαγωγής προκύπτει ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $m + n \in \mathbb{N}$ . Επειδή το  $m$  είναι αυθαίρετο, ο τελευταίος ισχυρισμός ισχύει για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ , δηλαδή για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  έχουμε  $m + n \in \mathbb{N}$ .

Για τον πολλαπλασιασμό, παίρνουμε  $m \in \mathbb{N}$  και δείχνουμε με επαγωγή στο  $n$  ότι  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ . Για  $n = 1$  έχουμε  $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$ . Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $m \cdot n \in \mathbb{N}$  και δείχνουμε ότι  $m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$ . Από την επιμεριστική ιδιότητα ισχύει  $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$ . Ο αριθμός  $m \cdot n$  είναι φυσικός από την επαγωγική υπόθεση. Αποδείξαμε πιο πάνω ότι το άθροισμα φυσικών αριθμών είναι φυσικών, επομένως  $m \cdot n + m = m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$ . Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε ότι  $m \cdot n \in \mathbb{N}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 9.** Δείξτε ότι  $2^n \geq n + 1$  για κάθε  $n \geq 1$  με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Για  $n = 1$  έχουμε  $2^n = 2^1 = 2 = 1 + 1 = n + 1$ .

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  ισχύει  $2^n \geq n + 1$ . Δείχνουμε ότι  $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1 = n + 2$ . Έχουμε:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2$$

όπου στην πιο πάνω ανίσωση εφαρμόσαμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε  $2^n \geq n + 1$  για κάθε  $n \geq 1$ .

(ii) Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bernoulli  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  για  $a = 1$  και έχουμε:

$$(1 + 1)^n \geq 1 + n \cdot 1$$

ισοδύναμα:  $2^n \geq n + 1$ .

**Σχόλιο:** Φαίνεται ότι ο δεύτερος τρόπος δεν χρησιμοποιεί την Αρχή της Επαγωγής, αλλά αυτό είναι μόνο επιφανειακό. Η Αρχή της Επαγωγής χρησιμοποιείται έμμεσα γιατί τη χρειαζόμαστε στην απόδειξη της ανισότητας του Bernoulli.

**Άσκηση 10.** Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε  $a > -1$  με  $a \neq 0$  και για κάθε φυσικό αριθμό  $n \geq 2$  ισχύει:

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Με επαγωγή. Θεωρούμε  $a > -1$  με  $a \neq 0$ . Για  $n = 2$  έχουμε

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

γιατί  $a \neq 0$  και συνεπώς  $a^2 > 0$ .

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 2$  ισχύει  $(1 + a)^n > 1 + na$ . (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι  $(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a$ . Έχουμε

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) > (1 + na) \cdot (1 + a)$$

(από επαγωγική υπόθεση και γιατί  $1 + a > 0$ )

$$= 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 > 1 + (n + 1)a,$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιήσαμε ότι  $na^2 > 0$  γιατί  $a \neq 0$ .

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

---

**Άσκηση 11** (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και κάθε  $n \geq 1$  έχουμε

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε  $x > -1$  ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

**Υπόδειξη για το (iii).** Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Εφαρμόζουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

για  $a = 1$  και  $b = x$ . Παρατηρούμε ότι  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για  $x = -2$ ,  $n = 5$  και έχουμε ότι

$$a = (1 + (-2))^5 = (-1)^5 = -1.$$

(iii) Εφαρμόζουμε το (i) για  $n = 7$  και έχουμε ότι το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι ίσο με  $(1+x)^7$  το οποίο από την ανισότητα Bernoulli είναι μεγαλύτερο ή ίσο από  $1+7x$ , αφού  $x > -1$ .

**Άσκηση 12** (Τρίγωνο του Pascal). Να δείξετε ότι για κάθε θετικούς ακέραιους αριθμούς  $k, n$  με  $k \leq n$  ισχύει

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{1}{k} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \left( \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} \\ &= \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

**Άσκηση 13** (Χρήση του συμβολισμού  $\Sigma$ ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$\left( \sum_{k=1}^n x^k \right) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \dots\dots\dots \quad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

$$17 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = 17 \cdot (a_1 + \dots + a_n) = 17 \cdot a_1 + \dots + 17 \cdot a_n = \sum_{k=1}^n 17 \cdot a_k$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k &= (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$$

$$\left( \sum_{k=1}^n x^k \right) + x^{n+1} = (x + x^2 + \dots + x^n) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k$$

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad (\text{Διώνυμο Νεύτωνα}). \end{aligned}$$

**Σχόλιο:** Είναι επίσης σωστό ότι  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ , απλά τότε ο πρώτος όρος θα είναι ο  $\binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^n$ .

**Άσκηση 14.** Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικούς αριθμούς  $0 \leq k \leq n$  ισχύει

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόστε το διωνυμικό ανάπτυγμα για  $a = b = 1$ .

**Άσκηση 15.** Δείξτε ότι το σύνολο  $A = \{ n \in \mathbb{N} : (n-3) \cdot (n+2) \cdot (n+4) > 0 \}$  είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

### Λύση - υποδείξεις.

Παρατηρούμε ότι  $4 \in A$  επομένως το  $\min A$  θα είναι κάποιος από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, 4.

Ένας τρόπος για να βρούμε το  $\min A$  είναι να πάρουμε τα 0, 1, 2, 3 και να εξετάσουμε ένα-ένα αν ανήκουν στο  $A$ . Πιο σύντομα παρατηρούμε ότι

$$(k-3) \cdot (k+2) \cdot (k+4) \leq 0$$

για κάθε  $k = 0, 1, 2, 3$  γιατί για αυτά τα  $k$  θα έχουμε  $k-3 \leq 0$  και  $k+2, k+3 \geq 0$ . Επομένως  $k \notin A$  για κάθε  $k = 0, 1, 2, 3$  και αφού  $4 \in A$  θα έχουμε  $\min A = 4$

Ένας ελαφρά διαφορετικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$p(x) = (x-3) \cdot (x+2) \cdot (x+4), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε ότι  $p(x) > 0$  ακριβώς όταν  $-4 < x < -2$  ή  $x > 3$ . Εμείς θέλουμε τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο  $p(x) > 0$  που είναι το  $x = 4$ . Άρα  $\min A = 4$ .

**Άσκηση 16.** Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (με πλήρη αιτιολόγηση):

$$A = \{ x \in \mathbb{N} : 3 < x^2 - 1 \leq 15 \}$$

$$B = (1, 2]$$

$$C = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1 \}$$

$$D = \{ n^2 + 3 : n \in \mathbb{N} \}$$

**Υπόδειξη.** Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο  $X \subseteq \mathbb{R}$  δεν έχει minimum θεωρούμε ένα  $x \in X$  και δείχνουμε ότι υπάρχει  $y \in X$  που είναι μικρότερο του  $x$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Για το  $A$  έχουμε

$$3 < x^2 - 1 \leq 15 \iff 4 < x^2 \leq 16.$$

Το  $x$  είναι φυσικός αριθμός, ελέγχουμε μερικές τιμές:

|       |   |   |   |   |    |
|-------|---|---|---|---|----|
| $x$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  |
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |

Συνεπώς  $A = \{3, 4\}$  και  $\min A = 3$ ,  $\max A = 4$ .

Για το  $B$  έχουμε ότι  $\max B = 2$ . Το  $B$  δεν έχει minimum γιατί αν  $x \in B$  τότε  $1 < (1+x)/2 < x \leq 2$ , επομένως ο αριθμός  $(1+x)/2$  είναι στοιχείο του  $B$  που είναι μικρότερο του  $x$ .

Όμοια με πριν  $\max C = 1$  και το  $C$  δεν έχει minimum γιατί αν  $x \in C$  τότε  $0 < x/2 < x \leq 1$ . Επειδή  $x \in \mathbb{Q}$  έχουμε επίσης  $x/2 \in \mathbb{Q}$ . Άρα  $x/2 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$  δηλαδή  $x/2 \in C$ . Άρα υπάρχει ένα στοιχείο του  $C$  που είναι μικρότερο του  $x$ .

Τέλος για το  $D$  έχουμε ότι  $\min D = 3$ . Για να το δούμε αυτό παίρνουμε  $n = 0$  και έχουμε  $0^2 + 3 = 3$ . Επιπλέον αν έχουμε  $n \in \mathbb{N}$  τότε  $3 \leq n^2 + 3$ . Δηλαδή το 3 είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άλλο στοιχείο του  $D$ .

Το  $D$  δεν έχει maximum γιατί αν πάρουμε  $x = n^2 + 3 \in D$  τότε το  $y = (n+1)^2 + 3$  είναι επίσης στοιχείο του  $D$  που είναι μεγαλύτερο του  $x$ .

**Άσκηση 17** (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα  $P$  το εξής:

το  $n \in \mathbb{N}$  έχει την ιδιότητα  $P$  αν για κάθε φυσικό  $k \leq n$  έχουμε  $k \notin A$ .

Συμπεράνετε ότι ένα  $A \subseteq \mathbb{N}$  που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  που δεν έχει minimum και δείχνουμε με επαγωγή ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό  $k \leq n$  έχουμε  $k \notin A$ .

Για  $n = 1$ : θεωρούμε έναν φυσικό  $k \leq 1$ , τότε  $k = 1$ . Αν είχαμε  $k \in A$ , δηλαδή  $1 \in A$ , τότε 1 θα ήταν το minimum του  $A \subseteq \mathbb{N}$ , ενάντια στην υπόθεσή μας. Άρα  $k \notin A$ .

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n$  ισχύει το εξής: για κάθε φυσικό  $k \leq n$  έχουμε  $k \notin A$ . (Επαγωγική Υπόθεση)

Δείχνουμε ότι ισχύει η ίδια ιδιότητα για το  $n + 1$ , δηλαδή ότι για κάθε  $k \leq n + 1$  ισχύει  $k \notin A$ .

Αν  $k \leq n$  τότε  $k \notin A$  από την Επαγωγική Υπόθεση. Επομένως θεωρούμε  $k = n + 1$ . Αν είχαμε  $k \in A$  δηλαδή  $n + 1 \in A$ , αφού  $k' \notin A$  για κάθε  $k' \leq n$  τότε το  $n + 1$  θα ήταν το minimum του  $A$ , άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το  $A$  δεν έχει minimum. Άρα  $k \notin A$  για κάθε  $k \leq n + 1$ .

Από την Αρχή της Επαγωγής για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει: για κάθε  $k \leq n$  έχουμε  $k \notin A$ , ειδικότερα για  $k = n$  έχουμε  $n \notin A$ . Επομένως για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $n \notin A$ , ισοδύναμα  $A = \emptyset$ .

Με άλλα λόγια αν το  $A \subseteq \mathbb{N}$  δεν έχει minimum τότε θα είναι το κενό σύνολο, ισοδύναμα αν το  $A \subseteq \mathbb{N}$  δεν είναι κενό τότε αναγκαστικά θα έχει minimum.

**Άσκηση 18** (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή της Επαγωγής με τη βοήθεια της Αρχής του Ελαχίστου.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε μια ιδιότητα  $P$  που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Αρχής της Επαγωγής και υποθέστε προς άτοπο ότι το σύνολο

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : \text{το } n \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P \}$$

είναι μη κενό.

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε μια ιδιότητα φυσικών αριθμών  $P$  και υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται τα εξής:

(α) το 0 έχει την ιδιότητα  $P$ ,

(β) αν κάποιος φυσικός αριθμός  $n$  έχει την ιδιότητα  $P$  τότε και το  $n + 1$  έχει την ιδιότητα  $P$ .

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχει την ιδιότητα  $P$ . Υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή ότι το σύνολο

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : \text{το } n \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P \}$$

είναι μη κενό.

Αφού το  $A$  είναι μη κενό υποσύνολο φυσικών αριθμών από την Αρχή του Ελαχίστου το  $A$  έχει ελάχιστο στοιχείο, ας το συμβολίσουμε με  $n_0$ .

Το  $n_0$  δεν μπορεί να είναι 0 γιατί το 0 έχει την ιδιότητα  $P$  ενώ το  $n_0$ , ως στοιχείο του  $A$ , δεν έχει την ιδιότητα  $P$ .

Άρα  $n_0 > 0$  και επομένως  $n_0 = n + 1$  για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Επειδή το  $n_0$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $A$  και αφού  $n < n_0$  έχουμε ειδικότερα ότι το  $n$  δεν είναι στοιχείο του  $A$ . Από τον ορισμό του τελευταίου συνόλου προκύπτει ότι το  $n$  έχει την ιδιότητα  $P$ . Όμως τότε από την ιδιότητα (β) πιο πάνω θα έχουμε ότι και το  $n + 1 = n_0$  έχει την ιδιότητα  $P$ . Αυτό σημαίνει ότι το  $n_0$  δεν ανήκει στο  $A$  που είναι άτοπο.

**Άσκηση 19.** Δείξτε ότι το μέγιστο και το ελάχιστο ενός μη κενού συνόλου  $A$ , εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

### Λύση - υποδείξεις.

Ας υποθέσουμε ότι τα  $b$  και  $b'$  είναι μέγιστα του  $A$ . Τότε  $b \in A$  και για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $x \leq b$ . Για  $x = b' \in A$  έχουμε  $b' \leq b$ . Όμοια  $b \leq b'$ , άρα  $b = b'$ .

Η μοναδικότητα του ελάχιστου αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

**Άσκηση 20.** Δείξτε ότι το ελάχιστο κάτω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός μη κενού συνόλου  $A$ , εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

### Λύση - υποδείξεις.

Ας υποθέσουμε ότι τα  $b$  και  $b'$  είναι ελάχιστα άνω φράγματα του  $A$ . Αφού το  $b'$  είναι άνω φράγμα του  $A$  και το  $b$  είναι ελάχιστο άνω φράγμα έχουμε  $b \leq b'$ . Όμοια  $b' \leq b$ , άρα  $b = b'$ .

Η μοναδικότητα του μέγιστου κάτω φράγματος αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο.

**Άσκηση 21** (Σύγκριση supremum και maximum). Δίνεται ένα μη κενό σύνολο  $A$ . Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν υπάρχει το  $\max A$  τότε  $\max A = \sup A$ .

Δηλαδή το μέγιστο ενός συνόλου είναι και ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου.

(ii) Αν υπάρχει το  $\sup A$  και ισχύει  $\sup A \in A$  τότε  $\sup A = \max A$ .

Δηλαδή αν το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου είναι και στοιχείο του συνόλου, τότε είναι μέγιστο.

Ποιες είναι οι αντίστοιχες προτάσεις για τα  $\min A$  και  $\inf A$ ;

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το  $b = \max A$ . Τότε το  $b$  είναι προφανώς άνω φράγμα του  $A$ . Επιπλέον αν το  $b'$  είναι ένα άνω φράγμα του  $A$ , τότε, αφού  $b \in A$  έχουμε  $b \leq b'$ . Άρα το  $b$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $A$ .

(ii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το  $c = \sup A$  και ότι  $c \in A$ . Τότε το  $c$  είναι άνω φράγμα του  $A$  και στοιχείο του  $A$ . Από τον ορισμό του μέγιστου στοιχείου έχουμε ότι  $c = \max A$ .

**Άσκηση 22.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  περιέχει πάντα το supremum του.

(ii) Αν  $x < M$  για κάθε στοιχείο του συνόλου  $A \subseteq \mathbb{R}$ , τότε  $\sup A < M$ .

(iii) Αν  $A$  και  $B$  είναι μη κενά φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $a \in A$  και  $b \in B$  ισχύει  $a < b$ , τότε  $\sup A < \inf B$ .

(iv) Αν  $\sup A \leq \sup B$ , τότε υπάρχει στοιχείο του  $B$  που είναι άνω φράγμα του συνόλου  $A$ .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Σωστή, αφού κάθε πεπερασμένο σύνολο έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι και το supremum του.

(ii) Λάθος, αφού για παράδειγμα  $\sup[0, 1) = 1$ .

(iii) Λάθος, αφού για παράδειγμα  $\sup[0, 1) = 1 = \inf(1, 2]$ .

(iv) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα  $A = B = [0, 1)$ .

**Άσκηση 23.** Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων

$$(0, 1], (0, 1), [0, 1).$$

### Λύση - υποδείξεις.

Όλα τα σύνολα έχουν infimum 0 και supremum 1. Δίνουμε λεπτομέρειες για το  $(0, 1]$ , η αιτιολόγηση για τα άλλα σύνολα είναι όμοια.

Το 0 είναι προφανώς κάτω φράγμα και το 1 άνω φράγμα του  $(0, 1]$ . Επίσης, το 1 είναι στοιχείο του  $(0, 1]$ , συνεπώς είναι μέγιστο στοιχείο και άρα supremum του  $(0, 1]$ . Αν το  $b$  είναι κάτω φράγμα του  $(0, 1]$  τότε  $b \leq 0$ . Αλλιώς θα είχαμε  $0 < b$  και άρα  $0 < \frac{b}{2}$ . Επίσης  $b < 1$  γιατί το  $b$  είναι

κάτω φράγμα του  $(0, 1]$ , άρα το  $\frac{b}{2}$  θα ήταν ένα στοιχείο του  $(0, 1]$ , το οποίο είναι άτοπο γιατί  $\frac{b}{2} < b$  και το  $b$  είναι κάτω φράγμα του  $(0, 1]$ . Επομένως  $b \leq 0$ . Αυτό αποδεικνύει ότι  $0 = \inf(0, 1]$ .

**Άσκηση 24** (Υπολογισμός supremum). Προσδιορίστε το supremum των πιο κάτω συνόλων

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \text{ και } n + m \leq 10 \right\}.$$

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

**Λύση - υποδείξεις.**

Δείχνουμε ότι  $\sup A = \frac{1}{2}$ . Προφανώς  $\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ .

Από γνωστό χαρακτηρισμό του supremum αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $x \in A$  με  $\frac{1}{2} - \varepsilon < x$ . Θεωρούμε λοιπόν  $\varepsilon > 0$ . Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \varepsilon$ . Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με

$$n > \frac{1}{4 \cdot \varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Ένα τέτοιο  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει από την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Σχετικά με το  $B$  παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε  $m = 1$  και  $n = 9$ , οπότε  $9 = \frac{9}{1} \in B$ .

Επιπλέον αν  $n + m \leq 10$  τότε  $\frac{n}{m} + 1 \leq \frac{10}{m}$ , επομένως  $\frac{n}{m} \leq \frac{10}{m} - 1 \leq 10 - 1 = 9$ .

Αυτό δείχνει ότι το  $9 \in B$  είναι άνω φράγμα του  $B$ , συνεπώς  $9 = \max B = \sup B$ .

**Άσκηση 25** (Χαρακτηρισμός supremum). Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$  και ένα  $b \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι το  $b$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $A$  αν και μόνο αν

- (1) το  $b$  είναι άνω φράγμα του  $A$  και
- (2) για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $x \in A$  με  $b - \varepsilon < x$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Υποθέτουμε ότι το  $b$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $A$  και δείχνουμε τα πιο πάνω (1) και (2). Το (1) είναι προφανές. Για το (2) θεωρούμε ένα  $\varepsilon > 0$ . Αφού το  $b$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $A$  τότε το  $b - \varepsilon$ , ως ένας αριθμός μικρότερος του  $b$ , δεν είναι άνω φράγμα του  $A$ . Δηλαδή υπάρχει  $x \in A$  με  $b - \varepsilon < x$ .

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το  $b$  ικανοποιεί τα (1) και (2) και δείχνουμε ότι  $b = \sup A$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $b \leq b'$  για κάθε άνω φράγμα  $b'$  του  $A$ . Θεωρούμε λοιπόν ένα άνω φράγμα  $b'$  του  $A$  και υποθέτουμε προς άτοπο ότι  $b' < b$ . Θέτουμε  $\varepsilon = b - b' > 0$ . Από το (2) υπάρχει  $x \in A$  με  $b - \varepsilon < x$ . Αλλά  $b - \varepsilon = b - (b - b') = b'$  και άρα  $b' < x$ . Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το  $b'$  είναι άνω φράγμα του  $A$  και  $x \in A$ . Επομένως  $b \leq b'$ .

**Άσκηση 26.** (α)(Χαρακτηρισμός infimum) Έστω  $A \neq \emptyset$  κάτω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και  $c \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $c = \inf A$  αν και μόνο αν

- (1) το  $c$  είναι κάτω φράγμα του  $A$  και
- (2) για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $x \in A$  τέτοιο ώστε  $x < c + \varepsilon$ .

(β) Να αποδείξετε ότι  $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ .

**Υπόδειξη για το (β).** Να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

**Λύση - υποδείξεις.**

(α) Αν  $c = \inf A$  τότε προφανώς το  $c$  είναι κάτω φράγμα του  $A$ . Επίσης κάθε μεγαλύτερος αριθμός από το  $c$  δεν είναι κάτω φράγμα του  $A$  και συνεπώς για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $x \in A$  τέτοιο ώστε  $x < c + \varepsilon$ .

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι  $b \leq c$  για κάθε κάτω φράγμα  $b$  του  $A$ . Αν το  $b \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί  $b > c$ , θέτουμε  $\varepsilon = b - c$  και έχουμε από το (2) ότι υπάρχει  $x \in A$  τέτοιο ώστε

$$x < a + \varepsilon = a + (b - a) = b.$$

Συνεπώς δεν υπάρχει  $b > c$  που να είναι κάτω φράγμα του  $A$ , δηλαδή κάθε κάτω φράγμα  $b$  του  $A$  ικανοποιεί  $b \leq c$ .

(β) Κατ'αρχήν  $\frac{1}{n} > 0$ , δηλ. το 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου. Επιπλέον αν  $\varepsilon > 0$ , τότε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  και συνεπώς από το (α) προκύπτει το συμπέρασμα.

**Άσκηση 27** (Απαιτητική). Έστω  $A, B$  μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$A + B = \{ a + b : a \in A \text{ και } b \in B \} .$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B .$$

**Λύση - υποδείξεις.**

*1ος τρόπος.* Για κάθε  $a \in A, b \in B$  ισχύει προφανώς ότι  $a + b \leq \sup A + \sup B$ , επομένως το  $\sup A + \sup B$  είναι άνω φράγμα του  $A + B$  και άρα  $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ .

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε  $\varepsilon > 0$ . Λόγω του χαρακτηρισμού του supremum υπάρχουν  $a \in A$  και  $b \in B$  τέτοια ώστε

$$a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Συνεπώς

$$a + b > (\sup A + \sup B) - \varepsilon .$$

Με άλλα λόγια για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $x \in A + B$  με  $x > (\sup A + \sup B) - \varepsilon$ . Πάλι από τον χαρακτηρισμό του supremum (αυτή τη φορά για το σύνολο  $A + B$ ) προκύπτει ότι  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .

*2ος τρόπος.* Αρχικά έχουμε  $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$  όπως στον 1ο τρόπο. Δείχνουμε ότι  $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ , ισοδύναμα ότι  $\sup A \leq \sup(A + B) - \sup B$ .

Εφόσον το  $\sup A$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $A$  αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός  $\sup(A + B) - \sup B$  είναι άνω φράγμα του  $A$ . Θεωρούμε λοιπόν  $a \in A$  και δείχνουμε ότι

$$a \leq \sup(A + B) - \sup B ,$$

ισοδύναμα  $\sup B \leq \sup(A + B) - a$ .

Εφόσον το  $\sup B$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $B$  αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός  $\sup(A + B) - a$  είναι άνω φράγμα του  $B$ . Παίρνουμε  $b \in B$  και δείχνουμε ότι

$$b \leq \sup(A + B) - a ,$$

ισοδύναμα  $a + b \leq \sup(A + B)$ . Το τελευταίο όμως είναι προφανές γιατί  $a + b \in A + B$  και το  $\sup(A + B)$  είναι άνω φράγμα του  $A + B$ .

**Άσκηση 28.** Για κάθε  $A \subseteq \mathbb{R}$  θέτουμε

$$-A = \{ -a : a \in A \} .$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν το  $A \subseteq \mathbb{R}$  είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, τότε το  $-A$  είναι άνω φραγμένο και ισχύει

$$\sup(-A) = -\inf A .$$

(ii) Αν το  $B \subseteq \mathbb{R}$  είναι μη κενό και άνω φραγμένο, τότε το  $-B$  είναι κάτω φραγμένο και ισχύει

$$\inf(-B) = -\sup B .$$

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Αν το  $c \in \mathbb{R}$  είναι κάτω φράγμα του  $A$  τότε για κάθε  $a \in A$  έχουμε  $c \leq a$  και άρα  $-a \leq -c$ . Με άλλα λόγια το  $-c$  είναι άνω φράγμα του  $-A$ , ειδικότερα το  $-A$  είναι άνω φραγμένο. Μάλιστα για  $c = \inf A$  συμπεραίνουμε ότι το  $-\inf A$  είναι άνω φράγμα του  $-A$  και συνεπώς  $\sup(-A) \leq -\inf A$ .

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι  $\sup(-A) \geq -\inf A$ , ισοδύναμα  $\inf A \geq -\sup(-A)$ . Επειδή το  $\inf A$  είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του  $A$  αρκεί να δείξουμε ότι το  $-\sup(-A)$  είναι κάτω φράγμα του  $A$ . Πράγματι, θεωρούμε  $a \in A$ , τότε  $-a \in (-A)$  και άρα  $-a \leq \sup(-A)$ , ισοδύναμα  $-\sup(-A) \leq a$  και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Ένας τρόπος είναι να εφαρμόσουμε παρόμοια επιχειρήματα με το (i). Ένας άλλος τρόπος είναι, δοσμένου ενός μη κενού άνω φραγμένου  $B$ , να εφαρμόσουμε το (i) στο σύνολο  $A = -B$ . Παρατηρήστε ότι το  $A$  είναι μη κενό κάτω φραγμένο και ότι  $-A = -(-B) = B$ .

**Άσκηση 29** (Ισοδύναμη διατύπωση του Αξιώματος Πληρότητας). Δείξτε ότι το Αξίωμα Πληρότητας (κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  έχει supremum) είναι ισοδύναμο με την πρόταση: κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  έχει infimum.

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 28.

### Λύση - υποδείξεις.

Για την ευθεία κατεύθυνση, αν το σύνολο  $A$  είναι μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , τότε από το (α) της Άσκησης 28 το  $-A$  είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  (και μάλιστα μη κενό). Από το Αξίωμα Πληρότητας το  $-A$  έχει supremum και επομένως από το (α) της Άσκησης 28 ο πραγματικός αριθμός  $-\sup(-A)$  είναι το  $\inf A$ .

Η αντίστροφη κατεύθυνση αποδεικνύεται όμοια χρησιμοποιώντας το (β) της Άσκησης 28.

**Άσκηση 30.** Να δείξετε ότι αν  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a \notin \mathbb{Q}$  και  $0 \neq b \in \mathbb{Q}$ , τότε  $ab$  και  $a + b \notin \mathbb{Q}$ . Είναι αλήθεια ότι αν  $a, b \notin \mathbb{Q}$ , τότε τουλάχιστον ένα από τα  $ab$  και  $a + b$  δεν ανήκει στο  $\mathbb{Q}$ ;

### Λύση - υποδείξεις.

Αν  $ab = q \in \mathbb{Q}$ , τότε αφού  $b \neq 0$  θα έχουμε ότι  $a = b^{-1}q \in \mathbb{Q}$  το οποίο είναι άτοπο. Αντίστοιχα αποδεικνύεται και το ότι  $a + b \notin \mathbb{Q}$ .

Η απάντηση στο ερώτημα είναι αρνητική αφού αν πάρουμε  $a = \sqrt{2}$  και  $b = -\sqrt{2}$ , τότε  $ab = -2$  και  $a + b = 0$ .

**Άσκηση 31.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός  $q$ , τέτοιος ώστε  $q^2 = 3$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί  $m, n$  (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3.$$

Τότε  $m^2 = 3n^2$ , δηλαδή ο  $m^2$  είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο  $m$  είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει ο  $m$  θα είναι της μορφής  $3k + 1$  ή  $3k + 2$ . Τότε όμως  $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$  και  $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ . Δηλαδή ο  $m^2$  δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Άτοπο.

Επομένως  $m = 3k$  για κάποιον φυσικό  $k$ , και άρα  $m^2 = 9k^2$ . Τότε  $3n^2 = 9k^2$ , δηλαδή  $n^2 = 3k^2$ . Από αυτό προκύπτει ότι ο  $n^2$  και -σύμφωνα με τα προηγούμενα- και ο  $n$  θα είναι πολλαπλάσια του 3. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι  $m, n$  δεν έχουν κοινό παράγοντα.

**Άσκηση 32.** Δείξτε ότι οι αριθμοί  $\sqrt{6}$  και  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  δεν είναι ρητοί.

### Λύση - υποδείξεις.

Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί  $m, n$  (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m}{n} = \sqrt{6}.$$

Τότε  $m^2 = 6n^2$ , δηλαδή ο  $m^2$  είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε και ο  $m$  είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3 (βλ. προηγούμενη άσκηση). Άρα  $m = 6k$  για κάποιον φυσικό  $k$  και επομένως  $m^2 = 36k^2$ . Προκύπτει ότι  $n^2 = 6k^2$  και άρα ο  $n^2$  είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε και ο  $n$  θα είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3, δηλαδή πολλαπλάσιο του 6. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι  $m, n$  δεν έχουν κοινό παράγοντα.

Αν υποθέσουμε ότι ο  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  είναι ρητός, τότε και το τετράγωνο του  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$  θα είναι επίσης ρητός, δηλαδή  $5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ . Επομένως  $2\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6}) - 5 \in \mathbb{Q}$  και  $\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ , άτοπο.

**Άσκηση 33** (Το ακέραιο μέρος). Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε  $x \geq 0$  υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του  $x$ .

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε το σύνολο  $A = \{k \in \mathbb{N} : k > x\}$ .

(ii) Για κάθε  $x \geq 0$  υπάρχει ένα  $n \in \mathbb{Z}$  με  $n \leq x < n + 1$ .

(iii) Για κάθε  $y < 0$  υπάρχει ένα  $m \in \mathbb{Z}$  με  $m \leq y < m + 1$ .

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε  $z \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $m \in \mathbb{Z}$  με  $m \leq z < m + 1$ .

**Σχόλιο.** Αποδεικνύεται ότι αυτό το  $m \in \mathbb{Z}$  είναι μοναδικό για το  $z$ . Αυτό το μοναδικό  $m$  ονομάζεται **το ακέραιο μέρος του  $z$** . Για παράδειγμα το ακέραιο μέρος του 3, 14 είναι το 3 και το ακέραιο μέρος του  $-3, 14$  είναι το  $-4$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Για το (i) θεωρούμε το σύνολο  $A = \{k \in \mathbb{N} : k > x\}$ . Το σύνολο  $A$  είναι μη κενό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Επιπλέον το  $A$  είναι υποσύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως από την Αρχή του Ελαχίστου το  $A$  έχει ελάχιστο στοιχείο. Με άλλα λόγια υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του  $x$ .

Για το (ii) παίρνουμε  $k$  να είναι ο ελάχιστος φυσικός μεγαλύτερος του  $x$ . Τότε ισχύει  $k > x \geq 0$ . Αν  $k = 1$  τότε  $0 \leq x < 1$ , οπότε παίρνουμε  $n = 0 \in \mathbb{Z}$ . Αν  $k > 1$  τότε ο  $n = k - 1$  είναι φυσικός αριθμός, και αφού ο  $k$  είναι ο ελάχιστος φυσικός μεγαλύτερος του  $x$  θα έχουμε  $k - 1 \leq x < k$ , δηλαδή  $n \leq x < n + 1$ .

Για το (iii) εφαρμόζουμε το (ii) για  $x = -y > 0$  και έχουμε ένα  $n \in \mathbb{Z}$  με  $n \leq -y < n + 1$ . Τότε ισχύει

$$-n - 1 < y \leq -n.$$

Αν  $y < -n$  παίρνουμε  $m = -n - 1 \in \mathbb{Z}$  και έχουμε  $m < y < m + 1$ . Αν  $y = -n$  παίρνουμε  $m = -n \in \mathbb{Z}$  και έχουμε  $m = y < m + 1$ .

Το (iv) είναι άμεσο από τα προηγούμενα: αν  $z \geq 0$  εφαρμόζουμε το (ii) για  $z = x \geq 0$  και παίρνουμε  $m = n \in \mathbb{Z}$  και αν  $z < 0$  εφαρμόζουμε το (iii) για  $z = y < 0$ .

**Άσκηση 34** (Πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς). Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως **πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς**:

Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$  υπάρχει  $q \in \mathbb{Q}$  με  $a < q < b$ .

Δείχνουμε το παραπάνω με τα εξής βήματα. Δίνονται αρχικά  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$ .

(i) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν  $n \in \mathbb{N}$  και  $m \in \mathbb{Z}$  με

$$n > \frac{1}{b-a} \quad \text{και} \quad m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

(ii) Αν τα  $m, n$  είναι όπως στο (i) δείξτε ότι

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  που είναι μεγαλύτερο του πραγματικού αριθμού  $\frac{1}{b-a}$ . Για να βρούμε το  $m$  εφαρμόζουμε το (iv) της Άσκησης 33 στον πραγματικό αριθμό  $z = n \cdot a + 1$ . Υπάρχει  $m \in \mathbb{Z}$  με  $m \leq n \cdot a + 1 < m + 1$ .

(ii) Έχουμε

$$m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

Παίρνουμε τη δεύτερη ανίσωση, αφαιρούμε 1 και διαιρούμε με το  $n > 0$ . Προκύπτει

$$a < \frac{m}{n}.$$

Για να δείξουμε ότι  $\frac{m}{n} < b$  παρατηρούμε πρώτα το εξής:

$$\begin{aligned} n &> \frac{1}{b-a} \\ \iff n(b-a) &> 1 \quad (\text{γιατί } b-a > 0) \\ \iff n \cdot b - n \cdot a &> 1 \\ \iff n \cdot b &> 1 + n \cdot a. \end{aligned}$$

Επειδή  $n \cdot a + 1 \geq m$  προκύπτει από τα πιο πάνω ότι  $n \cdot b > 1 + n \cdot a \geq m$ , δηλαδή  $n \cdot b > m$ . Διαιρούμε με το  $n > 0$  και έχουμε  $b > \frac{m}{n}$  που είναι το ζητούμενο.

**2ος τρόπος για το  $m/n < b$ :** Από την ανίσωση  $m \leq n \cdot a + 1$  προκύπτει  $\frac{m-1}{n} \leq a$ . Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \\ &\leq a + \frac{1}{n} \\ &< a + b - a = b. \end{aligned}$$

**Άσκηση 35** (Πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς). Δείξτε ότι για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$  υπάρχει  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  με  $a < r < b$ .

**Υπόδειξη:** Θεωρήστε τους αριθμούς  $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$  και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι το  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος.

---

**Λύση - υποδείξεις.**

Αφού  $a < b$  και  $\sqrt{2} > 0$  θα έχουμε επίσης  $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ . Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει ένα  $q \in \mathbb{Q}$  με

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}},$$

ισοδύναμα  $a < q \cdot \sqrt{2} < b$ . Ο αριθμός  $r = q \cdot \sqrt{2}$  δεν μπορεί να είναι ρητός, γιατί αλλιώς και ο αριθμός  $q^{-1} \cdot r$  θα ήταν ρητός, (εδώ χρησιμοποιούμε ότι  $q^{-1} \in \mathbb{Q}$ ). Όμως  $q^{-1} \cdot r = \sqrt{2}$  που είναι άρρητος. Άρα ο αριθμός  $r$  είναι άρρητος.

**Άσκηση 36.** Δείξτε ότι  $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x^2 < 2 \} = \sup \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2 \}$ , **χωρίς** να χρησιμοποιήσετε τη γνωστή πρόταση ότι το τετράγωνο του πρώτου supremum ισούται με 2.

**Λύση - υποδείξεις.**

Θέτουμε  $A = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 < 2 \}$  και  $B = \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2 \}$ . Προφανώς  $B \subseteq A$  και άρα το  $\sup A$  είναι άνω φράγμα του  $B$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό χαρακτηρισμό του supremum δείχνοντας ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $q \in B$  με  $\sup A - \varepsilon < q$ .

Οπότε θεωρούμε ένα  $\varepsilon > 0$ . Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών υπάρχει  $q \in \mathbb{Q}$  με

$$\sup A - \varepsilon < q < \sup A.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $q > 0$  αλλιώς αντικαθιστούμε πιο πάνω το  $\sup A - \varepsilon$  με το  $\max\{\sup A - \varepsilon, 0\}$ , το οποίο είναι μικρότερο του  $\sup A$ .

Απομένει να δείξουμε ότι  $q \in B$ . Παίρνουμε ένα  $r > 0$  με  $r < \sup A - q$  έτσι που  $q < \sup A - r$ . Αφού το  $\sup A - r$  δεν είναι άνω φράγμα του  $A$  υπάρχει  $x \in A$  με  $\sup A - r < x$ . Άρα

$$\sup A - \varepsilon < q < \sup A - r < x.$$

Αφού  $0 < q < x$  και  $x \in A$  έχουμε  $q^2 < x^2 < 2$ , επομένως  $q \in B$ .

## Ακολουθίες

**Άσκηση 37.** Επιλέξτε **Σωστό** - **Λάθος** (χωρίς απόδειξη).

|                                                                           | Σωστό | Λάθος |
|---------------------------------------------------------------------------|-------|-------|
| 1. Η ακολουθία $a_n = n^3$ , $n \geq 1$ είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη.  | Σ     | Λ     |
| 2. Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι και αύξουσα.                      | Σ     | Λ     |
| 3. Μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι σταθερή είναι γνησίως αύξουσα.     | Σ     | Λ     |
| 4. Μια ακολουθία είναι φραγμένη ακριβώς όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη. | Σ     | Λ     |
| 5. Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.                            | Σ     | Λ     |

**Λύση - υποδείξεις.**

Δίνουμε τις απαντήσεις μαζί με κάποια σχόλια (τα σχόλια δεν είναι ζητούμενο της άσκησης).

1. **Σ.** Παρατηρούμε ότι  $1 \leq n^3 \leq (n+1)^3$  για κάθε  $n \geq 1$ .

2. **Σ.** Αν  $a_n < a_{n+1}$  τότε  $a_n \leq a_{n+1}$ .

3. **Λ.** Είδαμε ήδη στο μάθημα την ακολουθία που παίρνει διαδοχικά τις τιμές:  $0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots$ . Αυτή είναι αύξουσα χωρίς να είναι γνησίως αύξουσα.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  και  $a_n = n$  για  $n \geq 3$ , δηλαδή η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  έχει διαδοχικές τιμές:  $0, 0, 3, 4, 5, 6, \dots$ . Αυτή είναι πάλι μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι γνησίως αύξουσα. Η διαφορά με την ακολουθία που ορίσαμε στο μάθημα είναι ότι εδώ έχουμε  $a_n = a_{n+1}$  μόνο για  $n = 1$  ενώ σε αυτή του μαθήματος ισχύει  $a_n = a_{n+1}$  για άπειρα το πλήθος  $n \in \mathbb{N}$ .

4. **Σ.** Δείτε τις σημειώσεις του μαθήματος.

5. **Σ.** Αν η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα τότε έχουμε  $a_1 \leq a_n$  για κάθε  $n \geq 1$ .

**Άσκηση 38.**

(i) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που είναι άνω φραγμένη και όχι κάτω φραγμένη (με απόδειξη).

(ii) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη (με απόδειξη).

(iii) Δώστε το παράδειγμα μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που είναι φραγμένη (με απόδειξη).

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Ορίζουμε

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Τότε για κάθε  $n \geq 1$  έχουμε  $a_n \leq 1$ , άρα η ακολουθία είναι άνω φραγμένη. Για να δείξουμε ότι δεν είναι κάτω φραγμένη δείχνουμε ότι **για κάθε  $M_1 \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $n \geq 1$  με  $a_n < M_1$ .**

**Έστω  $M_1 \in \mathbb{R}$ .** Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  με  $k > -M_1$ . **Παίρνουμε  $n = 2k + 1$ .** Έχουμε  $n \geq 1$  και  $n = 2k + 1 > k > -M_1$ . Εφόσον ο  $n$  είναι περιττός προκύπτει

$$a_n = -n = -(2k + 1) < -k < M_1.$$

(ii) Ορίζουμε

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

για  $n \geq 1$ . Ισοδύναμα  $a_n = (-1)^n \cdot n$ ,  $n \geq 1$ .

Δείχνουμε ότι η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη. Έστω  $M_2 \in \mathbb{R}$ . Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  με  $k > \max\{M_2, 0\}$ . Παίρνουμε  $n = 2k$ . Τότε το  $n$  είναι άρτιος, θετικός (γιατί  $k > 0$ ) και επομένως  $n \geq 1$ . Άρα

$$a_n = n = 2k > k > M_2.$$

Τώρα δείχνουμε ότι η ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη. Έστω  $M_1 \in \mathbb{R}$ . Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει  $k \in \mathbb{N}$  με  $k > -M_1$ . Παίρνουμε  $n = 2k + 1$ . Τότε το  $n$  είναι περιττός αριθμός και

$$a_n = -n = -(2k + 1) < -k < M_1.$$

(iii) Παίρνουμε  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $0 \leq a_n \leq 1$  για κάθε  $n \geq 1$  επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη. Προφανώς ισχύει  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  για κάθε  $n \geq 1$  και άρα η ακολουθία είναι φθίνουσα.

**Άσκηση 39** (Ισοδυναμίες φραγμένης ακολουθίας). Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)_{\mathbb{N}}$ . Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) υπάρχει  $M_0 \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq 1$  να ισχύει  $|a_n| \leq M_0$ ,
- (ii) υπάρχει  $M_1 > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq 1$  να ισχύει  $|a_n| \leq M_1$ ,
- (iii) υπάρχει  $M_2 > 75847912$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq 1$  να ισχύει  $|a_n| \leq M_2$ .

**Υπόδειξη.** Δείξτε τις συνεπαγωγές (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (i).

**Λύση - υποδείξεις.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Θεωρούμε ένα  $M_0 \in \mathbb{R}$  για το οποίο για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει  $|a_n| \leq M_0$ . (Παρατηρούμε ότι αναγκαστικά  $M_0 \geq 0$ , εμείς θέλουμε να εξασφαλίσουμε ένα θετικό  $M_1$ .)

Ορίζουμε  $M_1 = \max\{M_0, 1\}$ . Τότε  $M_1 \geq 1 > 0$  και  $M_1 \geq M_0$ . Θα δείξουμε ότι για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει  $|a_n| \leq M_1$ . Έστω  $n \geq 1$ . Ισχύει

$$|a_n| \leq M_0 \leq M_1$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Θεωρούμε ένα  $M_1$  όπως στην υπόθεση και ορίζουμε  $M_2 = \max\{M_1, 75847913\}$ .

Τότε  $M_2 > 75847912$  και  $M_2 \geq M_1$ . Θα δείξουμε ότι για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει  $|a_n| \leq M_2$ . Έστω  $n \geq 1$ . Ισχύει

$$|a_n| \leq M_1 \leq M_2$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Αυτό είναι προφανές. Αν το  $M_2$  είναι όπως στην υπόθεση μπορούμε να πάρουμε  $M_0 = M_2 \in \mathbb{R}$  και έχουμε το ζητούμενο.

**Άσκηση 40** (Ισοδυναμίες φραγμένης ακολουθίας). Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)_{\mathbb{N}}$ . Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) υπάρχει  $M > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq 1$  να ισχύει  $|a_n| \leq M$ ,
- (ii) υπάρχουν  $M_1, M_2 > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq 1$  να ισχύει  $-M_1 \leq a_n \leq M_2$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Θεωρούμε  $M \in \mathbb{R}$  για το οποίο για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει  $|a_n| \leq M$ . Τότε  $-M \leq a_n \leq M$  για κάθε  $n \geq 1$  και επομένως μπορούμε να πάρουμε  $M_1 = M_2 = M$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Θεωρούμε  $M_1, M_2 > 0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει  $-M_1 \leq a_n \leq M_2$ . Ορίζουμε  $M = \max\{M_1, M_2\}$ . Τότε  $M \geq M_1 > 0$ , άρα  $M > 0$ . Δείχνουμε ότι για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει  $|a_n| \leq M$ .

Έστω  $n \geq 1$ . Ισχύει

$$-M \leq -M_1 \leq a_n \leq M_2 \leq M.$$

Επομένως  $-M \leq a_n \leq M$ , ισοδύναμα  $|a_n| \leq M$ .

**Άσκηση 41.** Δίνεται ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}$ . Διατυπώστε χωρίς απόδειξη την άρνηση της ακόλουθης μαθηματικής πρότασης (δεν χρειάζεται να εξετάσετε αν ισχύει):

υπάρχει  $a \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε για κάθε  $b \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $x \in A$  με  $x > b$  ή  $b \leq a$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Η άρνηση της πρότασης έχει ως εξής:

για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $b \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $x \leq b$  και  $b > a$ .

(Παρατηρήστε ότι η άρνηση της πρότασης “ $x > b$  ή  $b \leq a$ ” είναι “ $x \leq b$  και  $b > a$ ”.)

**Άσκηση 42.** Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ ; (Χωρίς απόδειξη)

$$A = \{5, 6, 7, \dots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 400\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : (n-3) \cdot (n-8) > 0\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : (n-3) \cdot (n-8) = 0\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N} : \text{o } n \text{ είναι άρτιος}\}$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Τα σύνολα που περιέχουν τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  είναι τα  $A$  και  $B$ .

Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις (δεν είναι ζητούμενο της άσκησης).

Για το  $A$ : παρατηρούμε ότι αν  $n \geq 20$  τότε  $n^2 \geq 400$  και επομένως  $n \in A$ . Άρα το  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Το σύνολο  $\{5, 6, 7, \dots, 99, 100\}$  δεν παίζει κανένα ρόλο, ούτε μας επηρεάζει που περιέχει φυσικούς που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο-ίσο του 400.

Για το  $B$  παρατηρούμε ότι για κάθε  $n \geq 9$  έχουμε  $(n-3) \cdot (n-8) > 0$  και άρα  $n \in B$ .

Το  $C$  είναι πεπερασμένο σύνολο, συγκεκριμένα  $C = \{3, 8\}$ , επομένως δεν μπορεί να περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Για το  $D$  καταλαβαίνουμε ότι “αφήνει εκτός” άπειρα  $n \in \mathbb{N}$  (τους περιττούς αριθμούς) επομένως δεν μπορεί να περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 43** (Απαιτητική).

(i) Δείξτε ότι ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  αν και μόνο αν το σύνολο  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι πεπερασμένο.

**Υπόδειξη:** Ένα σύνολο  $B \subseteq \mathbb{N}$  είναι πεπερασμένο ακριβώς όταν υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  με την ιδιότητα  $B \subseteq \{k \in \mathbb{N} : k < n_0\}$ .

(ii) Συμπεράνετε ότι ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{N}$  δεν περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  ακριβώς όταν έχουμε  $n \notin A$  για άπειρα το πλήθος  $n \in \mathbb{N}$ .

**Σχόλιο:** Το (i) της άσκησης αιτιολογεί γιατί ένα σύνολο  $A$  που περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  ονομάζεται και *συμπεπερασμένο*. Ο όρος προκύπτει από το συνθετικό *συν* (που στα μαθηματικά χρησιμοποιείται κυρίως για να αναφερθεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου) και το επίθετο *πεπερασμένο*.

Επομένως το *συν-πεπερασμένο* (δηλαδή συμπεπερασμένο σύμφωνα με τους κανόνες της ελληνικής γραμματικής) σύνολο είναι ακριβώς το σύνολο με πεπερασμένο συμπλήρωμα. Από το (i) αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο που περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Υποθέτουμε αρχικά ότι το σύνολο  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  έχουμε  $n \in A$ . Επομένως αν  $n \in \mathbb{N} \setminus A$  τότε  $n < n_0$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$ , άρα το  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι πεπερασμένο.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι πεπερασμένο. Τότε σύμφωνα με την υπόδειξη υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε  $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{k \in \mathbb{N} : k < n_0\}$ . Έστω  $n \geq n_0$ . Αν είχαμε  $n \notin A$  τότε θα ίσχυε  $n \in \mathbb{N} \setminus A$  και από το προηγούμενο θα είχαμε  $n < n_0$ , άτοπο. Άρα  $n \in A$ .

Με άλλα λόγια δείξαμε ότι υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $n \in A$ . Επομένως το  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii) Συνοψίζοντας αποδείξαμε:

το  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N} \iff$  το  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι πεπερασμένο.

Επομένως

το  $A$  δεν περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N} \iff$  το  $\mathbb{N} \setminus A$  δεν είναι πεπερασμένο

$\iff$  το  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι άπειρο

$\iff$  έχουμε  $n \in \mathbb{N} \setminus A$  για άπειρα το πλήθος  $n \in \mathbb{N}$

$\iff$  έχουμε  $n \notin A$  για άπειρα το πλήθος  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 44.** Αποδείξτε ότι το σύνολο  $A$  όλων των άρτιων αριθμών δεν περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Πρώτα δείχνουμε το ζητούμενο με τη βοήθεια του εξής χαρακτηρισμού (δείτε προηγούμενη άσκηση): ένα σύνολο  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  αν και μόνο αν το  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι πεπερασμένο.

Επομένως αν το  $A$  περιείχε τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  τότε το σύνολο  $\mathbb{N} \setminus A$  θα ήταν πεπερασμένο. Αφού όμως το  $A$  είναι το σύνολο των άρτιων αριθμών το σύνολο  $\mathbb{N} \setminus A$  είναι το σύνολο των περιττών. Δηλαδή θα είχαμε ότι το σύνολο των περιττών αριθμών είναι πεπερασμένο που είναι άτοπο. Άρα το  $A$  δεν μπορεί να περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Δείχνουμε το ζητούμενο και με ακόμα έναν (όχι πολύ διαφορετικό) τρόπο. Υποθέτουμε πάλι προς άτοπο ότι το  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και θεωρούμε ένα  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $n \in A$ . Παίρνουμε  $n = 2n_0 + 1$ . Τότε  $n \geq n_0$  και άρα  $n \in A$ . Από την άλλη όμως το  $n$  είναι περιττός αριθμός και άρα  $n \notin A$ , άτοπο.

**Άσκηση 45** (Κατανόηση σύγκλισης). Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : 0,99 < a_n < 1,01 \}$$

$$B = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \leq 0,999 \}$$

$$C = \{ n \in \mathbb{N} : a_n > 1,1 \}$$

$$D = \{ n \in \mathbb{N} : 0,9999 < a_n \}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**Λύση - υποδείξεις.**

Το σύνολο  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Για να το δούμε παίρνουμε  $\varepsilon = 0,01 > 0$ , εφόσον  $a_n \rightarrow 1$  έχουμε ότι  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (0,99, 1,01)$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Το σύνολο  $B$  είναι πεπερασμένο. Για  $\varepsilon = 0,001 > 0$  υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (0,999, 1,001)$ . Ειδικότερα έχουμε  $a_n > 0,999$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Επομένως αν  $a_n \leq 0,999$  τότε  $n < n_0$ . Δηλαδή  $B \subseteq \{ n \in \mathbb{N} : n < n_0 \}$ .

Το σύνολο  $C$  είναι επίσης πεπερασμένο. Παίρνουμε  $\varepsilon = 0,1 > 0$ . Τότε υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) = (0,9, 1,1)$ . Ειδικότερα έχουμε  $a_n < 1,1$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Επομένως αν  $a_n > 1,1$  τότε  $n < n_0$ . Δηλαδή  $C \subseteq \{ n \in \mathbb{N} : n < n_0 \}$ .

Το σύνολο  $D$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Για  $\varepsilon = 0,0001 > 0$  υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Ειδικότερα έχουμε  $a_n > 1 - \varepsilon = 0,9999$  για κάθε  $n \geq n_0$ .

**Άσκηση 46** (Επαλήθευση σύγκλισης με βάση τον ορισμό). Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 1$  συγκλίνει στο 0.

### Λύση - υποδείξεις.

Δείχνουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 \geq 1$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n - 0| < \varepsilon$ .

Έστω  $\varepsilon > 0$ .

[Πρόχειρο: Θέλουμε  $|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ . Αν  $n \geq n_0$  τότε  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}}$  επομένως αρκεί να έχουμε  $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ . Ισοδύναμα  $\sqrt{n_0} > 1/\varepsilon$  ή αλλιώς  $n_0 > 1/\varepsilon^2$ .]

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει φυσικός αριθμός  $n_0 \geq 1$  με  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

Έστω  $n \geq n_0$ .

Τότε

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

**Άσκηση 47** (Σωστό - Λάθος με αιτιολόγηση). Θεωρούμε δύο ακολουθίες  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

- (i) Αν η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη τότε  $a_n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .
- (ii) Αν η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσα τότε η  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι επίσης συγκλίνουσα.
- (iii) Αν οι  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αποκλίνουσες τότε και η  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αποκλίνουσα.
- (iv) Αν οι  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσες τότε και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσα.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Η πρόταση είναι αληθής. Εφόσον η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη υπάρχει  $M > 0$  έτσι ώστε  $|a_n| \leq M$ , δηλαδή  $-M \leq a_n \leq M$  για όλα τα  $n \geq 1$ . Επομένως

$$-\frac{M}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{M}{n}$$

Αφού  $\frac{M}{n} \rightarrow 0$  και  $-\frac{M}{n} \rightarrow 0$  από το Κριτήριο Παρεμβολής ισχύει  $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ .

(ii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε  $a_n = (-1)^n$  and  $b_n = 1$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $|a_n| \leq 1$  για κάθε  $n \geq 1$  και άρα η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φραγμένη. Προφανώς η ακολουθία  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στο 1. Από την άλλη  $a_n \cdot b_n = a_n = (-1)^n$  για κάθε  $n \geq 1$  και όπως δείξαμε αυτή δεν είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

(iii) Η πρόταση είναι ψευδής. Παίρνουμε  $a_n = (-1)^n$  και  $b_n = (-1)^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι  $b_n = (-1) \cdot (-1)^n = (-1) \cdot a_n = -a_n$  και άρα  $a_n + b_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$ . (Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι  $a_n = 1$  και  $b_n = -1$  για  $n$ : άρτιος, όπως επίσης  $a_n = -1$  και  $b_n = 1$  για  $n$ : περιττός. Επομένως σε κάθε περίπτωση έχουμε  $a_n + b_n = 0$ .)

Αφού  $a_n + b_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$  είναι σαφές ότι η ακολουθία  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στο 0. Από την άλλη οι ακολουθίες  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αποκλίνουσες. Αυτό το έχουμε δείξει στο μάθημα για την  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Με όμοιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αποκλίνουσα. Αλλιώς: αν είχαμε  $b_n \rightarrow b$  τότε και  $-b_n \rightarrow -b$  δηλαδή  $a_n \rightarrow -b$  (αφού  $a_n + b_n = 0$ ), οπότε και η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  θα ήταν συγκλίνουσα που είναι άτοπο.

(iv) Η πρόταση είναι αληθής. Προφανώς  $b_n = a_n + b_n + (-a_n)$  για κάθε  $n \geq 1$ . Από την υπόθεσή μας  $a_n \rightarrow a$  και  $a_n + b_n \rightarrow c$  για κάποια  $a, c \in \mathbb{R}$ . Επομένως

$$b_n = a_n + b_n - a_n \rightarrow c - a.$$

Άρα η ακολουθία  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσα.

**Άσκηση 48** (Όριο και Μηδέν).

(i) Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| = 0.$$

(ii) Να δείξετε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 0.$$

Ισχύει το πιο πάνω αν αντικαταστήσουμε το 0 με ένα  $\alpha \neq 0$ ;**Λύση - υποδείξεις.**

Το (i) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας δεδομένου ότι

$$|\alpha_n - \alpha| = |(\alpha_n - \alpha) - 0| = ||\alpha_n - \alpha| - 0|.$$

Το (ii) προκύπτει επίσης άμεσα από τον ορισμό γιατί  $|\alpha_n - 0| = ||\alpha_n| - 0|$ .

Το συμπέρασμα δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το 0 με ένα  $\alpha \neq 0$ . Δίνουμε ένα αντιπαράδειγμα: παίρνουμε  $\alpha_n = (-1)^n$ ,  $n \geq 1$  και  $\alpha = 1$ . Τότε  $|\alpha_n| = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , οπότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 1 \neq \alpha$ . Από την άλλη, όπως γνωρίζουμε η  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  δεν είναι συγκλίνουσα, και ειδικότερα δεν συγκλίνει στο  $1 = \alpha$ .

**Άσκηση 49** (Αθροισμα ορίων). Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , να δείξετε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .**Λύση - υποδείξεις.**

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε αφού  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  υπάρχουν  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  τέτοια ώστε  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  και  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ , για κάθε  $n \geq n_1$  και κάθε  $n \geq n_2$  αντίστοιχα. Οπότε αν θέσουμε  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  έχουμε ότι για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .**Άσκηση 50** (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση). Με χρήση της πρότασης ότι κάθε αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει σε κάποιο  $a \in \mathbb{R}$  να δειχθεί ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει σε κάποιο  $b \in \mathbb{R}$ .**Υπόδειξη:** Θεωρήστε την ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $a_n = -b_n$  για κάθε  $n \geq 1$ .**Λύση - υποδείξεις.**Η ακολουθία  $a_n = -b_n$ ,  $n \geq 1$  είναι αύξουσα γιατί για κάθε  $n \geq 1$  έχουμε

$$b_n \geq b_{n+1} \iff -a_n \geq -a_{n+1} \iff a_{n+1} \geq a_n.$$

Επιπλέον επειδή η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι κάτω φραγμένη υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  με  $b_n \geq M$  για κάθε  $n \geq 1$ . Επομένως

$$-a_n \geq M \iff a_n \leq -M$$

για κάθε  $n \geq 1$  και άρα η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι άνω φραγμένη. Από την πρόταση στην εκφώνηση έχουμε ότι η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει σε κάποιον αριθμό  $a$ . Άρα

$$b_n = -a_n \rightarrow -a$$

και η  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στο  $b = -a \in \mathbb{R}$ .**Άσκηση 51** (Πυκνότητα ρητών και σύγκλιση). Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει σε αυτόν. (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα του συνόλου των ρητών αριθμών)

### Λύση - υποδείξεις.

Έστω  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , από την πυκνότητα των ρητών στο  $\mathbb{R}$ , υπάρχει  $x_n \in \mathbb{Q}$  τέτοιο ώστε  $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$ . Οπότε  $|x_n - x| < \frac{1}{n}$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  απ' όπου προκύπτει ότι  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Άσκηση 52** (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ . Να δείξετε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n > 0$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για  $\varepsilon > 0$  αρκετά μικρό έτσι ώστε  $a - \varepsilon > 0$  (π.χ.  $\varepsilon = a/2$ ) και έχουμε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

ειδικότερα  $a_n > a - \varepsilon > 0$ .

**Άσκηση 53** (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Να δείξετε ότι αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 1$ , τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n > \frac{n^2}{3}$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόστε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για  $\varepsilon = \frac{2}{3} > 0$  έτσι που  $\frac{a_n}{n^2} > 1 - \varepsilon = \frac{1}{3}$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 54** (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha > 0$ . Να δείξετε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Θέτοντας  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$  στον ορισμό του ορίου ακολουθίας έχουμε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$\frac{\alpha}{2} < \alpha_n < \frac{3\alpha}{2}.$$

Παίρνοντας  $n$ -οστές ρίζες έχουμε για κάθε  $n \geq n_0$  ότι

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}}.$$

Εφόσον  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}} = 1$  προκύπτει από τα πιο πάνω και από το Κριτήριο Παρεμβολής ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$ .

**Άσκηση 55** (Όριο ρητών παραστάσεων).

(i) Δείξτε ότι  $\frac{1}{2n^2 - 1} \rightarrow 0$ . (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1}$ .

(iii) (Γενίκευση των προηγουμένων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

με  $a_k, b_m \neq 0$ ,  $m \geq k$  και  $m \geq 1$ .

Αν  $k = m$  δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν  $k < m$  δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

**Υπόδειξη:** Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του  $n$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $n^2$  και έχουμε

$$\frac{1}{2n^2 - 1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

(ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $n^3$  και έχουμε

$$\frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{1 - 2 \cdot 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{1}{5}.$$

(iii) Θεωρούμε τα πολυώνυμα  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_0$  και  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$  με  $a_k, b_m \neq 0$ . Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με το  $n^m$  και έχουμε

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\frac{a_k}{n^{m-k}} + \dots + \frac{a_0}{n^m}}{\frac{b_m}{n^m} + \dots + \frac{b_0}{n^m}}.$$

Είναι σαφές ότι ο παρονομαστής συγκλίνει στον αριθμό

$$b_m + \dots + b_0 \cdot 0 = b_m.$$

Αν  $k = m$  τότε στον αριθμητή του προηγούμενου κλάσματος έχουμε  $n^{m-k} = 1$  και όλοι οι εκθέτες του  $n$  είναι θετικοί. Επομένως ο αριθμητής του κλάσματος συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k + \dots + a_0 \cdot 0 = a_k,$$

Άρα  $\frac{p(n)}{q(n)} \rightarrow \frac{a_k}{b_m}.$

Αν  $k < m$  τότε  $n^{m-k} \geq n$  και άρα όλοι οι εκθέτες του  $n$  στον αριθμητή του πιο πάνω κλάσματος είναι θετικοί. Προκύπτει ότι ο αριθμητής συγκλίνει στον αριθμό

$$a_k \cdot 0 + \dots + a_0 \cdot 0 = 0.$$

Συνεπώς  $\frac{p(n)}{q(n)} \rightarrow \frac{0}{b_m} = 0.$

**Άσκηση 56** (Υπολογισμός ορίου). Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i)  $a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii)  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii)  $c_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}, \quad n \geq 1.$

**Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv)  $d_n = \frac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v)  $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$

**Υπόδειξη:** Τι σχέση έχει η  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με την  $x_n = \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1;$

(vi)  $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Αφού  $\left| -\frac{7}{8} \right| < 1$  έχουμε  $\left( -\frac{7}{8} \right)^n \rightarrow 0$ . Γνωρίζουμε επίσης ότι  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ . Συνεπώς

$$a_n = \left( -\frac{7}{8} \right)^n + \sqrt[n]{n} \rightarrow 0 + 1 = 1.$$

(ii) Προφανώς  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  και άρα

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Αφού  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  και  $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$  έχουμε από το Κριτήριο Παρεμβολής  $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ .

(iii) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση  $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}$  και έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) \cdot (\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{(n^2+2) - (n^2+1)}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} \quad (\text{γιατί } n^2 \leq n^2+1 \leq n^2+2) \\ &= \frac{1}{n+n} \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Αφού  $n^2+1 \leq n^2+2$  έχουμε  $c_n \geq 0$  και άρα

$$0 \leq c_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε  $c_n \rightarrow 0$ .

(iv) Διαιρούμε αριθμητή-παρονομαστή με το  $n^3$  και έχουμε

$$d_n = \frac{n^2 + \left( \frac{2}{3} \right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{0 + 0 \cdot 0 + 0}{1 - 0 \cdot 1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

(v) Θέτουμε  $x_n = \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι  $e_n = \sqrt[2n]{2n} = x_{2n}$ . Γνωρίζουμε ότι  $x_n \rightarrow 1$  και επομένως  $x_{2n} \rightarrow 1$ . Άρα  $\sqrt[2n]{2n} \rightarrow 1$ .

(vi) Θέτουμε όπως και πριν  $x_n = \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[2n]{n} = n^{\frac{1}{2n}} = \left( n^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sqrt[n]{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_n}.$$

Αφού  $x_n \rightarrow 1$  έχουμε  $\sqrt{x_n} \rightarrow 1$ , δηλαδή  $\sqrt[2n]{n} \rightarrow 1$ .

**Άσκηση 57** (Διερεύνηση σύγκλισης). Θεωρούμε την ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες  $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

**Υπόδειξη:** Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

**Λύση - υποδείξεις.**

Έχουμε

$$a_{2n} = \frac{1 + 1 \cdot (2n)^2}{2 + 3 \cdot (2n) + (2n)^2} = \frac{4n^2 + 1}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{4 + 0}{4 + 0 + 0} = 1.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{1 - 1 \cdot (2n+1)^2}{2 + 3 \cdot (2n+1) + (2n+1)^2} \\ &= \frac{1 - 4n^2 - 4n - 1}{2 + 6n + 3 + 4n^2 + 4n + 1} \\ &= \frac{-4n^2 - 4n}{4n^2 + 10n + 6} \\ &= \frac{-4 - \frac{4}{n}}{4 + \frac{10}{n} + \frac{6}{n^2}} \\ &\rightarrow \frac{-4 - 0}{4 + 0 + 0} = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

Τέλος δείχνουμε ότι η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε τότε θα είχαμε  $a_{2n+1} - a_{2n} \rightarrow 0$ . Από την άλλη όμως  $a_{2n+1} - a_{2n} \rightarrow -1 - 1 = -2$ , το οποίο είναι άτοπο (μοναδικότητα ορίου).

**Άσκηση 58** (Κριτήριο Ρίζας).

(i) (Απαιτητική) Έστω  $(\alpha_n)$  ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{3n+2} \right)^n = 0.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Θέτουμε

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1.$$

Τότε, για  $\varepsilon > 0$  αρκετά μικρό υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|} < \rho + \varepsilon < 1.$$

Επομένως θέτοντας  $\lambda = \rho + \varepsilon < 1$ , έχουμε για κάθε  $n \geq n_0$ ,

$$0 \leq |\alpha_n| < \lambda^n.$$

Αφού  $|\lambda| < 1$  έχουμε  $\lambda^n \rightarrow 0$  και από το Κριτήριο Παρεμβολής ότι  $|\alpha_n| \rightarrow 0$  και άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

(ii) Εφαρμογή του (i).

### Άσκηση 59 (Κριτήριο Λόγου).

(i) (Απαιτητική) Έστω  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία μη-μηδενικών αριθμών με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \rho < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

(ii) (Ένα πολύ σημαντικό όριο) Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για  $\varepsilon > 0$  αρκετά μικρό για το οποίο  $\rho + \varepsilon < 1$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| < \rho + \varepsilon.$$

Θέτουμε  $\lambda = \rho + \varepsilon < 1$  και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις πιο πάνω ανισότητες από  $n_0$  έως  $n$ :

$$\left| \frac{\alpha_{n_0+1}}{\alpha_{n_0}} \right| \cdot \left| \frac{\alpha_{n_0+2}}{\alpha_{n_0+1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| < \lambda^{n-n_0+1}.$$

Το αριστερό μέρος της τελευταίας ανισότητας μετά διαγραφές είναι ίσο με  $\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n_0}} \right|$ . Συνεπώς παίρνουμε

$$|\alpha_{n+1}| < |\alpha_{n_0}| \cdot \lambda^{-n_0+1} \cdot \lambda^n$$

δηλαδή  $|\alpha_{n+1}| < c\lambda^{n+1}$  για κάθε  $n \geq n_0$ , όπου  $c = |\alpha_{n_0}| \lambda^{-n_0+1}$ .

Αφού  $0 < \lambda < 1$  έχουμε  $\lambda^n \rightarrow 0$  και το συμπέρασμα προκύπτει από τα πιο πάνω και το Κριτήριο Παρεμβολής. (Αν  $\alpha_{n+1} \rightarrow 0$  τότε και  $\alpha_n \rightarrow 0$ .)

(ii) Το συμπέρασμα είναι σαφές για  $x = 0$ . Για  $x \neq 0$  εφαρμόζουμε το (i) στην ακολουθία  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $\alpha_n = \frac{x^n}{n!}$  για κάθε  $n \geq 1$  και έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0 < 1.$$

### Άσκηση 60 (Εφαρμογή Κριτηρίων Λόγου - Ρίζας). Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left( \frac{3n^2 + n + 1}{7n^4 + 1} \right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad n \geq 1.$$

**Υπόδειξη:** Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in (2, 3)$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Έχουμε

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (1+0) = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο Λόγου ισχύει  $a_n \rightarrow 0$ .

Προχωράμε στην επόμενη ακολουθία:

$$\begin{aligned} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Επομένως πάλι από το Κριτήριο Λόγου έχουμε  $b_n \rightarrow 0$ .

Στις επόμενες δύο ακολουθίες εφαρμόζουμε το Κριτήριο Ρίζας.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{3n^2 + n + 1}{7n^4 + 1} = \frac{\frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{1}{n^4}} \rightarrow \frac{0}{7} = 0 < 1.$$

Επομένως από το Κριτήριο Ρίζας έχουμε  $c_n \rightarrow 0$ . Τέλος

$$\sqrt[n]{|d_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1.$$

Από το Κριτήριο Ρίζας προκύπτει  $d_n \rightarrow 0$ .

**Άσκηση 61** (Υπολογισμός ορίου). Έστω  $a, b$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Αν  $\gamma = \max\{a, b\}$ , τότε

$$\gamma = \sqrt[n]{\gamma^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2\gamma^n} = \gamma \sqrt[n]{2},$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς (και αφού  $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ ) έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \gamma.$$

**Άσκηση 62** (Υπολογισμός ορίου). Να υπολογίσετε τα όρια:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda^n$ , όπου  $|\lambda| < 1,$

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

**Λύση - υποδείξεις.**

(i)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)\lambda^{n+1}}{n\lambda^n} \right| = |\lambda| < 1$$

και συνεπώς από το Κριτήριο Λόγου η ακολουθία  $(n\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στο 0.

(iii)

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdots \frac{n}{n+n} \\ &< \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$ .

**Άσκηση 63** (Ακολουθία με μεταβαλλόμενο πλήθος προσθετέων). Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Έχουμε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

καθώς και

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

**Σχόλιο.** Δεν είναι σωστή επίλυση να πάρουμε το όριο σε κάθε όρο του αθροίσματος ξεχωριστά γιατί το άθροισμα έχει μεταβαλλόμενο πλήθος όρων.

**Άσκηση 64** (Ακολουθία με μεταβλητό πλήθος προσθετέων). Θεωρούμε την ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Δείξτε ότι για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει:

(i)  $x_{n+1} - x_n > 0$ ,

(ii)  $x_n < 1$ .

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

---

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Για κάθε  $n \geq 1$  ισχύει:

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\&\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+n} \\&= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\&\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n} \\&= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \\&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι  $2n+1 < 2n+2$ .

(ii) Παρατηρούμε ότι για κάθε  $k = 1, \dots, n$  ισχύει  $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$  επομένως

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

για κάθε  $n \geq 1$ . (Στον ορισμό του  $x_n$  έχουμε  $n$  προσθετέους.)

Εφόσον η ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη προκύπτει ότι είναι και συγκλίνουσα.

**Σχόλιο:** Μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα ότι  $x_n \rightarrow \ln(2)$ .

**Άσκηση 65** (Υπολογισμός supremum με ακολουθίες). Επανεξετάζουμε μέρος της Άσκησης 24. Προσδιορίστε το supremum του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

με χρήση ορίων ακολουθιών.

**Λύση - υποδείξεις.**

Αφού  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = 1/2$  έχουμε ότι το  $1/2$  είναι όριο ακολουθίας στοιχείων του  $A$ . Επίσης επειδή  $\frac{n}{2n+1} < 1/2$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  είναι σαφές ότι το  $1/2$  είναι άνω φράγμα του  $A$ . Συνεπώς  $\sup A = 1/2$ .

**Άσκηση 66** (Υπολογισμός supremum-infimum με ακολουθίες). Επανεξετάζουμε την Άσκηση 23. Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων

$$(0, 1], (0, 1), [0, 1)$$

με χρήση ορίων ακολουθιών.

### Λύση - υποδείξεις.

Αφού  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n}$  έχουμε ότι το 1 είναι όριο ακολουθίας στοιχείων του συνόλου  $(0, 1]$ . Επιπλέον το 1 είναι προφανώς άνω φράγμα του τελευταίου συνόλου. Επομένως  $1 = \sup(0, 1]$ .

Για το infimum έχουμε  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ , επομένως το 0 είναι όριο ακολουθίας στοιχείων του  $(0, 1]$ . Επειδή το 0 είναι προφανώς κάτω φράγμα του  $(0, 1]$  προκύπτει ότι  $0 = \inf(0, 1]$ .

Όμοια προκύπτει ότι  $1 = \sup(0, 1) = \sup[0, 1)$  και  $0 = \inf(0, 1) = \inf[0, 1)$ .

**Άσκηση 67** (Υπολογισμός supremum-infimum με ακολουθίες). Βρείτε το supremum και το infimum των ακόλουθων συνόλων και έπειτα εξετάστε αν είναι maximum ή minimum:

$$A = \{ 5 - 2^{-n} : n \in \mathbb{N} \}, \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Σχετικά με το σύνολο  $A$  έχουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - 2^{-n} = 5$  και προφανώς το 5 είναι άνω φράγμα του συνόλου  $A$ . Επομένως  $5 = \sup A$ . Επιπλέον επειδή  $5 - 2^{-n} < 5$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , το 5 δεν είναι μέγιστο στοιχείο του  $A$ . Για το infimum παρατηρούμε ότι η ακολουθία  $(5 - 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως αύξουσα, και αφού το  $A$  αποτελείται από τους όρους αυτής της ακολουθίας έχουμε ότι το  $A$  έχει ελάχιστο στοιχείο το οποίο λαμβάνεται από τον πρώτο όρο της ακολουθίας, δηλαδή  $\min A = \inf A = 5 - 2^{-1} = 4, 5$ .

Σχετικά με το  $B$  παρατηρούμε ότι  $B = \left\{ \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

Προφανώς η  $\left( \frac{1}{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως φθίνουσα και η  $\left( -\frac{1}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον ισχύει

$$-\frac{1}{2m+1} < 0 < \frac{1}{2n} \quad \text{για κάθε } m, n \in \mathbb{N}.$$

Προκύπτει ότι το  $B$  έχει μέγιστο το οποίο λαμβάνεται από τον πρώτο όρο της ακολουθίας  $\left( \frac{1}{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  και ελάχιστο στοιχείο, το οποίο λαμβάνεται από τον πρώτο όρο της  $\left( -\frac{1}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Συνεπώς

$$\sup B = \max B = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \inf B = \min B = -\frac{1}{3}.$$

**Σχόλιο.** Από το σύνολο  $B$  βλέπουμε ότι κάποιες φορές ένα φραγμένο σύνολο μπορεί να αποτελείται από τους όρους μια ακολουθίας αλλά η συγκεκριμένη ακολουθία να μην συγκλίνει σε κάποιο από τα supremum-infimum του συνόλου. Μπορείτε να βρείτε ακολουθίες  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στοιχείων του  $B$  για τις οποίες να ισχύει  $x_n \rightarrow \inf B$  και  $y_n \rightarrow \sup B$ ;

**Άσκηση 68** (Υπολογισμός supremum-infimum με ακολουθίες). Δίνονται τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Εξετάστε αν τα  $A, B$  είναι α) άνω φραγμένα και β) κάτω φραγμένα. Όπου εφαρμόζεται να βρείτε τα suprema και infima.

**Υπόδειξη για το σύνολο  $B$ .** Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $x + \frac{4}{x} \geq 4$  και βρείτε πού επιτυγχάνεται η ισότητα.

### Λύση - υποδείξεις.

Ξεκινάμε με το σύνολο  $A$ . Επειδή  $0 \leq \frac{m}{m+n} < 1$  για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  έχουμε ότι το  $A$  είναι φραγμένο. Επομένως υπάρχουν τα  $\sup A$  και  $\inf A$ .

Θέτοντας  $n = 1$  παρατηρούμε ότι  $\frac{m}{m+1} \in A$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ . Επιπλέον  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+1} = 1$ . Αφού το 1 είναι άνω φράγμα του  $A$  και όριο ακολουθίας στοιχείων του  $A$  προκύπτει ότι  $1 = \sup A$ .

Από την άλλη αν θέσουμε  $m = 1$  παρατηρούμε ότι  $\frac{1}{1+n} \in A$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Επιπλέον  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0$ . Αφού το 0 είναι κάτω φράγμα του  $A$  και όριο ακολουθίας στοιχείων του  $A$  προκύπτει ότι  $0 = \inf A$ .

Συνεχίζουμε με το σύνολο  $B$ . Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του  $B$  είναι της μορφής  $x + \frac{4}{x}$ , όπου  $x = \frac{m}{n}$ , για  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Αναδιατυπώνουμε την ανίσωση της υπόδειξης, όπου  $x > 0$ :

$$x + \frac{4}{x} \geq 4 \iff x^2 + 4 \geq 4x \iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \iff (x - 2)^2 \geq 0.$$

Αφού προφανώς ισχύει ότι  $(x - 2)^2 \geq 0$  έχουμε και ότι  $x + \frac{4}{x} \geq 4$ . Η ισότητα λαμβάνεται ακριβώς όταν  $(x - 2)^2 = 0$ , δηλαδή όταν  $x = 2$ .

Αφού κάθε  $y$  στο  $B$  είναι της μορφής  $x + \frac{4}{x}$ , όπου  $x = \frac{m}{n} > 0$  και  $m, n \in \mathbb{N}$ , έχουμε από πιο πάνω ότι  $y \geq 4$ . Άρα το  $B$  είναι κάτω φραγμένο από το 4. Επιπλέον για  $x = \frac{m}{n} = 2$  (το οποίο λαμβάνεται π.χ. για  $m = 2$  και  $n = 1$ ) είναι σαφές ότι  $y = x + \frac{4}{x} = 2 + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4$ . Άρα  $4 \in B$ .

Αφού το 4 είναι στοιχείο του  $B$  και κάτω φράγμα του  $B$  έχουμε ότι  $\min B = \inf B = 4$ .

Τέλος δείχνουμε ότι το  $B$  δεν είναι άνω φραγμένο σύνολο. Πράγματι για  $m = 1$  έχουμε ότι

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{1}{n} + 4n > 4n \geq n.$$

Επομένως για κάθε  $M > 0$  παίρνουμε  $n \in \mathbb{N}$  με  $n > M$  (το οποίο υπάρχει από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα) και έχουμε ότι το  $x = \frac{1}{n} + 4n$  είναι στοιχείο του  $B$  με  $x > n > M$ . Άρα το  $B$  δεν είναι άνω φραγμένο σύνολο.

**Άσκηση 69** (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i)  $0 < a_n < 2$  για κάθε  $n \geq 1$ ,

(ii)  $a_n < a_{n+1}$  για κάθε  $n \geq 1$ ,

(iii)  $a_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Υπόδειξη.** Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείτε την Αρχή της Επαγωγής.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Προφανώς ισχύει  $0 < a_1 < 2$ . Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  ισχύει  $0 < a_n < 2$  και δείχνουμε ότι  $0 < a_{n+1} < 2$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1 + a_n} \\ &> \sqrt{1 + 0} \quad (\text{από Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} \\ &< \sqrt{1+2} \quad (\text{από Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

Επομένως  $0 < a_{n+1} < 2$  και από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Για  $n = 1$  ισχύει

$$a_1 = 1 < \sqrt{2} = a_2.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  ισχύει  $a_n < a_{n+1}$  και δείχνουμε ότι  $a_{n+1} < a_{n+2}$ . Έχουμε

$$a_n < a_{n+1} \iff 1 + a_n < 1 + a_{n+1} \iff \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+a_{n+1}} \iff a_{n+1} < a_{n+2}.$$

Επομένως  $a_{n+1} < a_{n+2}$  και από την Αρχή Επαγωγής προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Εφόσον η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε κάποιο αριθμό  $a$ . (Προσοχή: Μην ξεχνάτε να το αναφέρετε αυτό, γιατί αν δεν αιτιολογήσετε την ύπαρξη του ορίου τότε δεν μπορείτε να πάρετε τα όρια στις δύο πλευρές της ισότητας όπως κάνουμε πιο κάτω.)

Αφού  $a_n \rightarrow a$  έχουμε επίσης  $a_{n+1} \rightarrow a$ . Παίρνοντας όρια και στις δύο πλευρές της ισότητας  $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$  προκύπτει η εξίσωση

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Λύνουμε

$$a^2 = 1 + a \iff a^2 - a - 1 = 0 \iff a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Εφόσον  $a_n > 0$  για κάθε  $n \geq 1$  έχουμε  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ . Επομένως η λύση  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$  απορρίπτεται και άρα  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Έχουμε δηλαδή  $a_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Άσκηση 70** (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i)  $1 \leq a_n \leq 2$  για κάθε  $n \geq 1$ .

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιείστε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες  $1 \leq a_{n+1} \leq 2$  σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii)  $a_{n+1} \geq a_n$  για κάθε  $n \geq 1$ .

(iii)  $a_n \rightarrow 2$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Για  $n = 1$  έχουμε  $a_1 = 1 \in [1, 2]$ . Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  έχουμε  $1 \leq a_n \leq 2$ . Δείχνουμε ότι  $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ . Υπολογίζουμε:

$$a_{n+1} \geq 1 \iff 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \geq 1$$

$$\iff 6 + 6a_n \geq 7 + a_n \quad (\text{παρατηρήστε ότι από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει}$$

$7 + a_n \geq 8 > 0$ , επομένως η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει όταν πολλαπλασιάζουμε με  $7 + a_n$ )

$$\iff 5a_n \geq 1$$

$$\iff a_n \geq \frac{1}{5}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε  $a_n \geq 1$ . Από τις προηγούμενες ισοδυναμίες προκύπτει  $a_{n+1} \geq 1$ . Δείχνουμε όμοια ότι  $a_{n+1} \leq 2$ :

$$a_{n+1} \leq 2 \iff 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \leq 2$$

$$\iff 6 + 6a_n \leq 14 + 2a_n \quad (\text{πάλι από την Επαγωγική Υπόθεση } 7 + a_n > 0)$$

$$\iff 4a_n \leq 8$$

$$\iff a_n \leq 2$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από την Επαγωγική Υπόθεση, επομένως  $a_{n+1} \leq 2$ . Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n} \\ &\geq 6 \cdot \frac{1+a_n}{9} \quad (\text{από το (i) αφού } 7+a_n \leq 7+2 \leq 9) \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1+a_n) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2a_n}{3} \\ &\geq \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{3} \quad (\text{πάλι από το (i) αφού έχουμε } 2 \geq a_n) \\ &= a_n. \end{aligned}$$

(iii) Από τα (i) και (ii) η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, επομένως συγκλίνει σε κάποιο  $a \in \mathbb{R}$ . Θα αποδείξουμε ότι  $a = 2$ . Αφού  $a_n \rightarrow a$  τότε  $a_{n+1} \rightarrow a$ . Θεωρούμε τη σχέση

$$a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n}$$

και παίρνουμε το όριο και στις δύο πλευρές. Καταλήγουμε

$$a = 6 \cdot \frac{1+a}{7+a}$$

Λύνοντας την εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε το  $a$ ,

$$\begin{aligned} a = 6 \cdot \frac{1+a}{7+a} &\iff 7a + a^2 = 6 + 6a \\ &\iff a^2 + a - 6 = 0 \\ &\iff (a+3)(a-2) = 0 \\ &\iff a = -3 \quad \text{ή} \quad a = 2. \end{aligned}$$

Αφού  $1 \leq a_n \leq 2$  για κάθε  $n \geq 1$ , τότε και το όριο  $a$  θα ικανοποιεί  $1 \leq a \leq 2$ . Επομένως η λύση  $a = -3$  απορρίπτεται και προκύπτει  $a = 2$ .

**Άσκηση 71** (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Δίνεται η ακολουθία  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}.$$

- (i) Δείξτε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι η  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3.
- (ii) Δείξτε ότι η  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα.
- (iii) Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο συγκλίνει η  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο της.

---

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Για  $n = 1$  έχουμε  $\alpha_1 = 1 < 3$ , που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για την τιμή  $n$ . Τότε

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n} \leq \sqrt{9} = 3.$$

Επομένως, από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής  $\alpha_n \leq 3$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Leftrightarrow \alpha_n^2 - 3\alpha_n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_n \leq 3$$

το οποίο ισχύει από το (i). Άρα η ακολουθία  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα. (iii) Τέλος από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}$ , με

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha.$$

Παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη του αναδρομικού τύπου

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}$$

καταλήγουμε στο ότι  $\alpha = 0$  ή  $\alpha = 3$ . Η περίπτωση  $\alpha = 0$  απορρίπτεται αφού  $\alpha_n \geq \alpha_1 = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα  $\alpha = 3$ .

**Άσκηση 72** (Η ακολουθία του αριθμού  $e$  - Απαιτητική). Θεωρούμε την ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

(i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(ii) Δείξτε ότι  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ . **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

**Λύση - υποδείξεις.**

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\quad \text{(πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το } (n+1)/n) \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}. \end{aligned}$$

(ii) Αφού  $-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$  έχουμε από την ανισότητα Bernoulli και το (i)

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \\ &\geq \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2}\right] \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

**Άσκηση 73.** Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

**Υπόδειξη:** Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \geq 1$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Υπολογίζουμε

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = x_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

και

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} = (x_{2n})^{1/2} = \sqrt{x_{2n}}$$

για κάθε  $n \geq 1$ .

Εφόσον  $x_n \rightarrow e$  ισχύει  $x_{n+1} \rightarrow e$  και  $x_{2n} \rightarrow e$ . Άρα

$$a_n = x_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow e \cdot 1 = e$$

και

$$b_n = \sqrt{x_{2n}} \longrightarrow \sqrt{e}.$$

**Άσκηση 74** (Κατανόηση σύγκλισης στα  $\pm\infty$ ). Δίνονται δύο ακολουθίες  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $a_n \rightarrow +\infty$  και  $b_n \rightarrow -\infty$ . Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : 1234567890 < a_n \}$$

$$B = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \leq 17 \}$$

$$C = \{ n \in \mathbb{N} : b_n > 1,1 \}$$

$$D = \{ n \in \mathbb{N} : b_n < -9876543210 \}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

---

**Λύση - υποδείξεις.**

Το σύνολο  $A$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Εξήγηση: αφού  $a_n \rightarrow +\infty$  για τον θετικό αριθμό  $M = 1234567890$  έχουμε  $a_n > M$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Το σύνολο  $B$  είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού  $a_n \rightarrow +\infty$  για τον θετικό αριθμό  $M = 17$  θα έχουμε  $a_n > M$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Επομένως υπάρχει  $n_0 \geq 1$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n > 17$ . Επομένως αν  $a_n \leq 17$  πρέπει να έχουμε  $n < n_0$ , δηλαδή  $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} : n < n_0\}$ .

Το σύνολο  $C$  είναι πεπερασμένο. Εξήγηση: αφού  $b_n \rightarrow -\infty$  για τον θετικό αριθμό  $M = 12345$  θα έχουμε  $b_n < -M$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Επομένως υπάρχει  $n_0 \geq 1$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $b_n < -12345$ . Επομένως αν  $b_n > -1,1$  θα έχουμε ειδικότερα ότι  $b_n \geq -12345$  και άρα  $n < n_0$ . Προκύπτει ότι  $C \subseteq \{n \in \mathbb{N} : n < n_0\}$ .

Το σύνολο  $D$  περιέχει τελικά όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Εξήγηση: αφού  $b_n \rightarrow -\infty$  για τον θετικό αριθμό  $M = 9876543210$  θα έχουμε  $b_n < -M$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 75** (Σύγκλιση στα  $\pm\infty$  με βάση τον ορισμό).

(i) Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία  $a_n = -n^3$  συγκλίνει στο  $-\infty$ .

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα **όχι** κάτω φραγμένη ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στο  $-\infty$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Έστω  $M > 0$ . Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n < -M$ . Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει  $n_0 \geq 1$  με  $n_0 > M$ . Έστω  $n \geq n_0$ . Τότε

$$a_n = -n^3 \leq -n \leq -n_0 < -M.$$

(ii) Έστω  $M > 0$ . Εφόσον η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  δεν είναι κάτω φραγμένη, υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  με  $a_{n_0} < -M$ . Έστω  $n \geq n_0$ . Τότε

$$a_n \leq a_{n_0} < -M,$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι φθίνουσα. Άρα  $a_n \rightarrow -\infty$ .

## Σειρές

**Άσκηση 76** (Άλγεβρα Σειρών).

- (i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  για τις οποίες η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  συγκλίνει αλλά οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  αποκλίνουν.
- (ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνουν τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει επίσης.
- (iii) Δείξτε ότι αν  $c \neq 0$  και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$  συγκλίνει τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

**Λύση - υποδείξεις.**

- (i) Θέτουμε  $a_n = 1$  και  $b_n = -1$  για κάθε  $n \geq 1$ . Τότε  $a_n + b_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$ . Αν θέσουμε  $s_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$  τότε  $s_n = 0 + \dots + 0$  ( $n$  φορές) και συνεπώς  $s_n = 0$ . Άρα  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ .

Από την άλλη είναι σαφές ότι  $a_n \not\rightarrow 0$  και  $b_n \not\rightarrow 0$ , συνεπώς οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  αποκλίνουν.

**Προσοχή:** Μην θεωρήσετε ότι η παραπάνω σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  μας οδηγεί σε “απροσδιοριστία του τύπου  $0 \cdot \infty$ ”. Εδώ δεν υπάρχει καμία απροσδιοριστία: το άπειρο άθροισμα είναι σαφώς ορισμένο ως το όριο της ακολουθίας των πεπερασμένων αθροισμάτων. Αν κάθε πεπερασμένο άθροισμα είναι 0 τότε το όριο της σειράς είναι και αυτό 0.

- (ii) Παρατηρούμε ότι  $b_n = a_n + b_n + (-1) \cdot a_n$  για κάθε  $n \geq 1$ . Αφού η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \cdot a_n$ . Επιπλέον αφού η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  συγκλίνει, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + b_n + (-1) \cdot a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

συγκλίνει επίσης. (Άθροισμα συγκλινουσών σειρών.)

- (iii) Αφού η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$  συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-1} \cdot (c \cdot a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Άσκηση 77** (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}].$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Αν  $|x| \geq 1$  τότε  $|x^n| = |x|^n \geq 1$  για κάθε  $n \geq 1$ . Επομένως  $x^n \not\rightarrow 0$  και άρα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  αποκλίνει. (Μπορεί ναδειχθεί σχετικά εύκολα ότι  $|x^n| \rightarrow +\infty$  όταν  $|x| > 1$ .)

Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$  συνέκλινε τότε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-1} \cdot \frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  θα συνέκλινε επίσης που είναι άτοπο.

Σχετικά με την τρίτη σειρά θέτουμε  $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$  και  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Αν ο  $n$  είναι άρτιος τότε  $a_n = 1 + (-1) = 0$  και αν ο  $n$  είναι περιττός αριθμός τότε  $a_n = -1 + 1 = 0$ . Επομένως  $a_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$  και  $s_n = a_1 + \dots + a_n = 0$  για κάθε  $n \geq 1$ . Άρα  $s_n \rightarrow 0$ , δηλαδή  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$  και ειδικότερα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

**Άσκηση 78** (Πεπερασμένο άθροισμα γεωμετρικής προόδου). Δίνονται  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  και  $n \geq 1$ . Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

και

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

**Υπόδειξη:** Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε:  $(1-x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \dots$

**Λύση - υποδείξεις.**

Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned} (1-x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} &= \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n x^{k-1} - \sum_{k=1}^n x^k \\ &= x^0 + x^1 + \dots + x^{n-1} \\ &\quad - (x^1 + \dots + x^{n-1} + x^n) \\ &= x^0 - x^n \\ &= 1 - x^n. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$(1-x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = 1 - x^n$$

και διαιρώντας με το  $1-x$ ,

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Σχετικά με τη δεύτερη ισότητα έχουμε

$$\sum_{k=1}^n x^k = x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}.$$

**Άσκηση 79** (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}}.$$

---

**Λύση - υποδείξεις.**

Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$  καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{8}{125} \cdot \frac{-\frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4 \\ &= \frac{9}{10} - \frac{64}{5} \\ &= \frac{9 - 128}{10} = -\frac{119}{10}. \end{aligned}$$

**Σειρές με σημείο εκκίνησης το 0.** Όμοια με τις σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  μπορεί κανείς να ορίσει και την έννοια της σειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , δηλαδή το σημείο εκκίνησης είναι το  $n = 0$ . Η διαφορά εδώ είναι ότι η ακολουθία  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  των μερικών αθροισμάτων ορίζεται ως ακολούθως:  $s_1 = a_0$ ,  $s_2 = a_0 + a_1$ ,  $s_3 = a_0 + a_1 + a_2$ , γενικά  $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ , όπου  $n \in \mathbb{N}$ . Με άλλα λόγια

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}}$$

Μια σειρά της μορφής  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

Όλα τα αποτελέσματα που ισχύουν για τις σειρές με σημείο εκκίνησης το 1 ισχύουν και για τις σειρές με σημείο εκκίνησης το 0.

**Άσκηση 80.** Δίνεται  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$  συγκλίνει αν και μόνο αν  $|\lambda| < 1$ . Δείξτε επίσης ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$

για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $0 < |\lambda| < 1$ .

Μπορείτε να πάρετε δεδομένες τις αντίστοιχες ιδιότητες για τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ .

**Σχόλιο.** Η  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$  ονομάζεται επίσης **γεωμετρική σειρά** και το  $\lambda$  ονομάζεται ο **λόγος** της σειράς.

**Λύση - υποδείξεις.**

Γνωρίζουμε ότι για  $|\lambda| < 1$  η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$  συγκλίνει και μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Οπότε ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$$

για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $0 < |\lambda| < 1$ .

Για  $\lambda = 0$  είναι προφανές ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$  συγκλίνει (και είναι ίση με 0). Από την άλλη για  $|\lambda| \geq 1$  έχουμε ότι  $|\lambda^{n-1}| = |\lambda|^{n-1} \geq n-1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ειδικότερα η ακολουθία  $(\lambda^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  δεν συγκλίνει στο 0 και άρα η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$  αποκλίνει.

**Άσκηση 81** (Εύρεση ορίου σειράς). Να προσδιορίσετε τα  $x \in \mathbb{R}$ , για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Στη συνέχεια, για αυτά τα  $x$  που είναι διάφορα του 0, να βρείτε τον αριθμό στον οποίο συγκλίνουν.

**Λύση - υποδείξεις.**

Παρατηρούμε ότι  $(-1)^n x^{2n} = ((-1) \cdot x^2)^n = (-x^2)^n$  και  $(-1)^n x^n = ((-1) \cdot x)^n = (-x)^n$ . Οπότε έχουμε γεωμετρικές σειρές με σημείο εκκίνησης το 0 και με λόγο  $\lambda = -x^2$  και  $\lambda = -x$  αντίστοιχα. Από την προηγούμενη άσκηση αυτές η σειρές συγκλίνουν αν και μόνο αν  $|\lambda| < 1$ , το οποίο είναι ισοδύναμο με  $|x| < 1$  και στις δύο περιπτώσεις. Επίσης, γι' αυτά τα  $x$  με  $x \neq 0$ , το όριο της σειράς είναι ίσο με  $1/(1-\lambda)$ . Αντικαθιστώντας το  $\lambda$  σε κάθε περίπτωση παίρνουμε τελικά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

για κάθε  $0 < |x| < 1$ .

**Σχόλιο.** Παρατηρούμε ότι τα πιο πάνω όρια των σειρών είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $\arctan(x)$  και  $\ln(1+x)$ ,  $0 < |x| < 1$ .

**Άσκηση 82** (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Στις πρώτες δύο σειρές χρησιμοποιούμε τον τύπο  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$  καθώς και τις ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = -\frac{8}{125} \cdot \frac{-\frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{2}{7} = \frac{16}{875}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} - \frac{4^2}{5} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{16}{5} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{16}{5} \cdot 4 \\ &= \frac{9}{10} - \frac{64}{5} \\ &= \frac{9 - 128}{10} = -\frac{119}{10}. \end{aligned}$$

Η τρίτη σειρά είναι τηλεσκοπική. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

Επομένως αν θέσουμε  $a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$  έχουμε

$$a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

$$\text{Άρα } a_1 + \dots + a_n = 1 - \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 1 \text{ και επομένως } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

**Άσκηση 83** (Εύρεση ορίου σειράς). Αποδείξτε ότι αν  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$  και  $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ , τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Πρόκειται για τηλεσκοπική σειρά αφού η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι  $n$

$$s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2 - \beta_3 + \dots + \beta_n - \beta_{n+1} = \beta_1 - \beta_{n+1} \longrightarrow \beta_1 - \beta$$

και συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \beta_1 - \beta.$$

**Σημειώσεις:** 1) Με την ορολογία “εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση” εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει, χωρίς να ασχοληθούμε με την απόλυτη σύγκλιση. Όταν λέμε “εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση” εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει απλά χωρίς να συγκλίνει απολύτως ή αποκλίνει.

2) Είναι συχνό το φαινόμενο να εφαρμόζονται πάνω από ένα κριτήρια σύγκλισης σε μια σειρά. Επομένως ακόμα και αν μια άσκηση υποδεικνύει τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου της Ρίζας, εσείς ενδεχομένως να μπορείτε να τη λύσετε με τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου του Λόγου.

**Άσκηση 84** (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

**Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα  $\sin x \leq x$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Σχετικά με την πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Επειδή η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}$  συγκλίνει απολύτως και άρα και κανονικά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα  $\sin x \leq x$  για κάθε  $x \geq 0$ , έχουμε

$$\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Επειδή η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, έχουμε από το Κριτήριο Σύγκρισης ότι και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  συγκλίνει.

Στην τρίτη σειρά παρατηρούμε ότι  $3n - 2 < 3n$  και επομένως  $\frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3n}$  για κάθε  $n \geq 1$ . Αν συνέκλινε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$  τότε από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε και σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ . Επομένως θα συνέκλινε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  που είναι άτοπο.

**Άσκηση 85** (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^4} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^4 \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^4 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$  συγκλίνει. (Για την ακρίβεια συγκλίνει απολύτως αλλά μια και η ακολουθία αποτελείται από θετικούς όρους δεν κάνει διαφορά τι από τα δύο θα πούμε.)

Στη δεύτερη

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$  συγκλίνει.

Σχετικά με την τρίτη σειρά

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n \cdot n!} \\ &= \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 5 \cdot (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \\ &= 5 \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= 5 \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} \rightarrow \frac{5}{e} > 1. \end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$  αποκλίνει.

**Άσκηση 86** (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας σε όλες τις σειρές. (Κάθε φορά με  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  θα εννοούμε την ακολουθία της σειράς με την οποία ασχολούμαστε.)

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  συγκλίνει.

Στη δεύτερη

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  αποκλίνει.

Σχετικά με την τελευταία σειρά

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-n^2}} = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \rightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$  συγκλίνει.

**Άσκηση 87** (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}.$$

**Υπόδειξη:** Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία  $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ . Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

### Λύση - υποδείξεις.

Σχετικά με την πρώτη σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1}, \quad b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1} \cdot n^2 = \frac{n^5 + n^2}{4n^5 - 3n + 1} = \frac{1 + 1/n^3}{4 - 3/n^4 + 1/n^5} \rightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο αν η

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, επομένως συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1}.$$

Προχωράμε στη δεύτερη σειρά. Θέτουμε

$$a_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2}, \quad b_n = \frac{n^3}{n^{7/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2} \cdot n^{1/2} = \frac{n^{7/2} + 2n^{3/2} + n^{1/2}}{n^{7/2} + 2} = \frac{1 + 2/n^2 + 1/n^3}{1 + 2/n^{7/2}} \rightarrow \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο αν η  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$  αποκλίνει, άρα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2}$  αποκλίνει επίσης.

Στην τελευταία σειρά θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{4^n - 5}{2^n}, \quad b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n - 5}{2^n} \cdot 2^{-n} = \frac{2^{2n} \cdot 2^{-n} - 5 \cdot 2^{-n}}{2^n} = \frac{2^n - 5 \cdot 2^{-n}}{2^n} = 1 - \frac{5}{4^n} \rightarrow 1 > 0.$$

Από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο αν η  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  συγκλίνει.

Αφού η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$  αποκλίνει, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}$  αποκλίνει επίσης.

**2ος τρόπος** για την τελευταία σειρά: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{4^n - 5}{2^n} = 2^n - \frac{5}{2^n} \geq 1$$

για κάθε  $n \geq 2$ . (Η ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή.) Άρα η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $a_n = \frac{4^n - 5}{2^n}$ ,  $n \geq 1$  δεν συγκλίνει στο 0 (για την ακρίβεια συγκλίνει στο  $+\infty$ ) και επομένως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  δεν συγκλίνει.

**Άσκηση 88** (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

(α) Έχουμε ότι

$$0 < \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)} < \frac{1}{n^2}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς η σειρά συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ .

(β) Έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{5n+7} = \frac{2}{5} \neq 0$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

**Άσκηση 89** (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + 1/n)^n}{(2^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2},$$

ως προς τη σύγκλιση.

**Λύση - υποδείξεις.**

Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 < 1$$

επομένως από το Κριτήριο της Ρίζας η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  συγκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{1 + \cos(n)}{3^n} \right| \leq \frac{1 + |\cos(n)|}{3^n} \leq \frac{1 + 1}{3^n} = \frac{2}{3^n},$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα  $|x + y| \leq |x| + |y|$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Εφόσον η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  συγκλίνει, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$  συγκλίνει επίσης.

Εφόσον  $\left| \frac{1 + \cos(n)}{3^n} \right| \leq \frac{2}{3^n}$  για κάθε  $n \geq 1$ , από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{3^n}$

συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει και με τη συνήθη έννοια.

Σχετικά με την τρίτη σειρά μπορούμε να εφαρμόσουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με  $a_n = \frac{1}{4n^2 - 3}$  και  $b_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq \mathbb{N}$ .

Παρατηρούμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4n^2 - 3} \cdot n^2 = \frac{n^2}{4n^2 - 3} = \frac{1}{4 - 3/n^2} \rightarrow \frac{1}{4} > 0.$$

Εφόσον η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, από το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}.$$

**β' τρόπος:** Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι  $4n^2 - 3 \geq n^2$  για κάθε  $n$ , (ισοδύναμα  $4n^2 - n^2 \geq 3$  που ισχύει). Άρα  $\frac{1}{4n^2 - 3} \leq \frac{1}{n^2}$  για κάθε  $n \geq 1$ . Εφόσον η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, από το Κριτήριο

Σύγκρισης συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}$ .

Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζουμε το Κριτήριο της Ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{(5 + 1/n)^n}{(2^n)^2}} = \frac{5 + 1/n}{2^2} \rightarrow \frac{5}{4} > 1$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

Στην τελευταία σειρά έχουμε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \left[ \frac{n!}{(n+1)!} \right]^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left( \frac{1}{n+1} \right)^2 \\
&= \frac{4n^2 + 4n + 2n + 2}{2(n^2 + 2n + 1)} \\
&= \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n + 1} \\
&= \frac{2 + 3/n + 1/n^2}{1 + 2/n + 1/n^2} \rightarrow 2 > 1.
\end{aligned}$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}$  αποκλίνει.

**Άσκηση 90** (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}, \quad (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}, \quad (\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

(α) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Λόγου. Είναι

$$\frac{\frac{(n+1)!(n+1)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!n!}{(3n)!}} = \frac{n+1}{3(3n+1)(3n+2)} \rightarrow 0 < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Λόγου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{4^n}} \right| = \frac{1}{4} < 1$$

και άρα η σειρά συγκλίνει.

(γ) Έχουμε ότι

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$$

και άρα από το Κριτήριο Λόγου η σειρά αποκλίνει.

**Άσκηση 91** (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

Θεωρούμε την ακολουθία  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 1$ . Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

### Λύση - υποδείξεις.

Γνωρίζουμε ότι  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  και συνεπώς  $\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ . Επιπλέον είναι σαφές ότι  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

για κάθε  $n \geq 1$ . Από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$  που αποκλίνει. Άρα η  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  δεν συγκλίνει απολύτως.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά βλέπουμε ότι  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , η οποία αποκλίνει.

### Άσκηση 92 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right)$$

συγκλίνει.

**Υπόδειξη:** Δείξτε αρχικά ότι  $\sin \left( n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right) = (-1)^n \cdot \sin \left( \frac{1}{n} \right)$  για κάθε  $n$ .

(ii) Δείξτε ότι η προηγούμενη σειρά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

**Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα  $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$ , όπου  $x \in [0, \pi/2]$ .

(iii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iv) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$$

ως προς τη σύγκλιση.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\sin \left( n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right) = \begin{cases} \sin \left( \frac{1}{n} \right), & n: \text{άρτιος} \\ -\sin \left( \frac{1}{n} \right), & n: \text{περιττός} \end{cases} = (-1)^n \cdot \sin \left( \frac{1}{n} \right).$$

Η ακολουθία  $(\sin(1/n))_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 0, επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \left( \frac{1}{n} \right)$$

συγκλίνει.

(ii) Για την απόλυτη σύγκλιση έχουμε

$$\left| \sin \left( n \cdot \pi + \frac{1}{n} \right) \right| = \left| \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right|$$

για κάθε  $n \geq 1$ .

Εφαρμόζουμε την ανισότητα  $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$  (για  $x \in [0, \pi/2]$ ) στο  $x = \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$  και έχουμε

$$\left| \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right| = \sin \left( \frac{1}{n} \right) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

για κάθε  $n \geq 1$ . Επομένως αν η σειρά συνέκλινε απολύτως, από το Κριτήριο Σύγκρισης θα συνέκλινε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ . Άρα θα συνέκλινε και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , άτοπο.

(iii) Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης για  $a_n = \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$  και  $b_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $n \geq 1$ . Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} \cdot n^2 = \frac{n^2}{2n^2 - \sqrt{n}} = \frac{1}{2 - 1/n^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2} > 0.$$

Εφόσον η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  συγκλίνει, προκύπτει ότι συγκλίνει και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$ .

**β' τρόπος:** Προσπαθούμε να δείξουμε ότι η ποσότητα  $2n^2 - \sqrt{n}$  είναι μεγαλύτερη-ίση κάποιου  $k_n \geq 0$  με την ιδιότητα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$  να συγκλίνει. Τότε θα έχουμε  $\frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} \leq \frac{1}{k_n}$  και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά θα συγκλίνει.

Δοκιμάζουμε  $k_n = n^2$ :

$$2n^2 - \sqrt{n} \geq n^2 \iff 2n^2 - n^2 \geq \sqrt{n} \iff n^2 \geq \sqrt{n}$$

που ισχύει γιατί  $n \geq 1$ .

Άρα ισχύει  $\frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$  και από το Κριτήριο Σύγκρισης η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$  συγκλίνει.

(iv) Παρατηρούμε ότι η σειρά δεν είναι τηλεσκοπική - αυτό δεν απαιτείται στη λύση αλλά είναι βοηθητικό. Για να δούμε γιατί δεν είναι τηλεσκοπική ελέγχουμε μερικούς όρους:

$$\begin{aligned} a_1 &: \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ a_2 &: \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ a_3 &: \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} \\ a_4 &: \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι δεν προκύπτουν διαγραφές όπως σε ένα τηλεσκοπικό άθροισμα.

Για την επίλυση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} &= \frac{\sqrt{n+1}+1 - \sqrt{n+1}-1}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{n+1})^2 - 1} \\ &= \frac{2}{n+1-1} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Επομένως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$  αποκλίνει.

**Άσκηση 93** (Ανισότητα Young με εκθέτη το 2). Δείξτε ότι για  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$|a \cdot b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Έχουμε

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = a^2 - 2|ab| + b^2.$$

**Άσκηση 94.** Έστω ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  συγκλίνει.

- (i) Δείξτε ότι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|\alpha_n| < 1$ .
- (ii) Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο?
- (iii) Υποθέτουμε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  συγκλίνει. Να δείξετε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$  συγκλίνει απολύτως.

**Υπόδειξη.** Στο (i) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και στα (ii), (iii) το κριτήριο σύγκρισης. Θα χρειαστείτε και την ανισότητα Young.

**Λύση - υποδείξεις.**

- (i) Αφού η σειρά συγκλίνει θα έχουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Συνεπώς, από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για  $\varepsilon = 1$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|\alpha_n| < 1$ .
- (ii) Από το (i) υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|\alpha_n| < 1$ . Συνεπώς για κάθε  $n \geq n_0$  έχουμε

$$0 < \alpha_n^2 < |\alpha_n|.$$

Οπότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης με τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ .

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού για παράδειγμα η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  συγκλίνει ενώ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \text{ αποκλίνει.}$$

- (iii) Από την ανισότητα Young έχουμε ότι

$$|\alpha_n \beta_n| \leq \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2}.$$

Από το (ii) οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$  συγκλίνουν. Επομένως από το κριτήριο σύγκρισης

η  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$  συγκλίνει απολύτως.

**Άσκηση 95** (Σύγκλιση σειράς). Έστω  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2 + n^2 \alpha_n}$$

συγκλίνει.

---

**Λύση - υποδείξεις.**

Έχουμε ότι

$$0 \leq \frac{\alpha_n}{2 + n^2 \alpha_n} \leq \frac{\alpha_n}{n^2 \alpha_n} = \frac{1}{n^2},$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης, για σειρές με θετικούς όρους, έχουμε το συμπέρασμα.

## Συναρτήσεις - συνέχεια και παράγωγος

**Αρχή Μεταφοράς (υπενθύμιση):** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x \in A$  και  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ .
- (2) Για κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από στοιχεία του  $A$  με την ιδιότητα  $x_n \rightarrow x$  ισχύει  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**Άσκηση 96.** Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που ικανοποιεί

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } a_1 > 0.$$

Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n + \frac{1}{n}\right).$$

**Υπόδειξη.** Δείξτε ότι η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως φθίνουσα κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

**Λύση - υποδείξεις.**

Είναι σαφές ότι  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2} \leq \frac{a_n}{2} < a_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , επομένως η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον αποδεικνύεται με επαγωγή ότι  $a_n > 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Επομένως η  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει σε κάποιο  $a \in \mathbb{R}$ .

Παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο προκύπτει ότι  $a(2 + a^2) = a$  και συνεπώς  $a = 0$ .

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε για την πρώτη σειρά το κριτήριο λόγου.

$$\left| \frac{(n+1)^2 a_{n+1}}{n^2 a_n} \right| = \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2 + a_n^2} \rightarrow \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2} < 1.$$

Επομένως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$  συγκλίνει.

Σχετικά με τη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι η ακολουθία  $(a_n + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως φθίνουσα και ότι συγκλίνει στο 0. Επομένως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n + \frac{1}{n})$  συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz.

**Άσκηση 97** (Εξακρίβωση συνέχειας-ασυνέχειας). Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

- (i) Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.
- (ii) Για κάθε  $x \neq 3$  η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Για να δείξουμε ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο 3 αρκεί να βρούμε μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_n \rightarrow 3$  και  $f(x_n) \not\rightarrow f(3)$ .

Επιλέγουμε  $x_n = 3 + 1/n$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $x_n > 3$  και άρα  $f(x_n) = \left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1$  για κάθε  $n \geq 1$ .

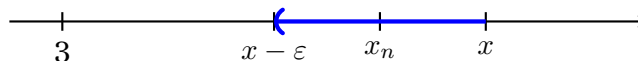
Έχουμε

$$\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 \rightarrow (3 + 0)^2 + 1 = 10.$$

Από την άλλη  $f(3) = -3$ . Επομένως  $f(x_n) \not\rightarrow f(3)$ .

(ii) Έστω  $x \neq 3$ . Από την Αρχή Μεταφοράς αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_n \rightarrow x$  ισχύει  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Θεωρούμε αρχικά ότι  $x > 3$ . Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  τυχαία ακολουθία με  $x_n \rightarrow x$ . Αφού  $x > 3$  θα έχουμε  $x_n > 3$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ , δείτε το πιο κάτω σχήμα:



Για ένα αρκετά μικρό  $\varepsilon$  έχουμε  $x - \varepsilon > 3$  και άρα ισχύει  $x_n > x - \varepsilon > 3$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

Τότε  $f(x_n) = x_n^2 + 1$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και επομένως  $f(x_n) \rightarrow x_n^2 + 1 \rightarrow x^2 + 1 = f(x)$ .

Η περίπτωση  $x < 3$  αντιμετωπίζεται ομοίως. Απλώς παρατηρούμε ότι αν  $x_n \rightarrow x$  θα έχουμε  $x_n < 3$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 98** (Αδυναμία Συνεχούς Επέκτασης). Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$  δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(x) = f(x) = 1/x$  για κάθε  $x \neq 0$ , η  $F$  δεν είναι συνεχής στο 0.

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε μια συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F|(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = f$ . Παίρνουμε την ακολουθία  $x_n = 1/n$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $x_n \rightarrow 0$  και  $F(x_n) = f(x_n) = n \rightarrow +\infty$ . Αφού  $F(0) \in \mathbb{R}$  έχουμε  $F(x_n) \not\rightarrow F(0)$ .

Επομένως υπάρχει ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  πραγματικών αριθμών με  $x_n \rightarrow 0$  και  $F(x_n) \not\rightarrow F(0)$ . Από την Αρχή Μεταφοράς η  $F$  δεν είναι συνεχής στο 0.

**Άσκηση 99** (Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν ισχύει στους ρητούς). Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : f(x) = x^2 - 2$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση και εξετάστε αν ισχύει η ακόλουθη πρόταση: για κάθε  $a, b, q \in \mathbb{Q}$  με  $a < b$ , αν το  $q$  είναι γνήσια ανάμεσα στο  $f(a)$  και στο  $f(b)$  τότε υπάρχει  $p \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$  με  $f(p) = q$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Για να δείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής θεωρούμε  $x \in \mathbb{Q}$  και ακολουθία ρητών αριθμών  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_n \rightarrow x$ . Από τις ιδιότητες του ορίου ακολουθίας έχουμε  $x_n^2 \rightarrow x^2$  και  $x_n^2 - 2 \rightarrow x^2 - 2$ , δηλαδή  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$ .

Δείχνουμε ότι η  $f$  δεν ικανοποιεί την πιο πάνω πρόταση. Παίρνουμε  $a = -2, b = 3$  και  $q = 0$ . Τότε

$$f(0) = -2 < 0 < f(3) = 7, \quad \text{δηλαδή} \quad f(a) < q < f(b).$$

Αν υπήρχε  $p \in \mathbb{Q} \cap (a, b) = \mathbb{Q} \cap (0, 3)$  με  $f(p) = q = 0$ , τότε  $p^2 = 2$  και άρα  $p = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , άτοπο.

**Σχόλιο.** Αυτή η άσκηση μας λέει ότι το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν ισχύει για τους ρητούς αριθμούς ή ακριβέστερα για την τετράδα  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ . Δεδομένου ότι το Αξίωμα Πληρότητας είναι το μοναδικό από τα αξιώματα που έχουμε δεχθεί, το οποίο διακρίνει την τετράδα  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$  από την  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ , προκύπτει ότι το Αξίωμα Πληρότητας χρησιμοποιείται ουσιαστικά σε οποιαδήποτε απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

**Άσκηση 100** (Συνέχεια συνάρτησης σε μεμονωμένο σημείο). Θεωρούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  και ορίζουμε την  $f : [0, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0, 1], \\ 9856792783456124918513, & x = 2. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 2$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $[0, 1] \cup \{2\}$  με  $x_n \rightarrow 2$ . Τότε  $x_n = 2$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . (Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για  $\varepsilon = 1$ .)

Επομένως  $f(x_n) = f(2)$  τελικά για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και άρα  $f(x_n) \rightarrow f(2)$ . Αυτό αποδεικνύει ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 2. Παρατηρήστε ότι δεν παίζει κανέναν ρόλο η  $g$  ούτε και η τιμή της  $f$  στο 2.

### Άσκηση 101 (Κάθε ακολουθία είναι συνεχής συνάρτηση).

- (i) Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς η οποία συγκλίνει σε κάποιο  $a$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $n_0$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $x_n = a$ , δηλαδή  $x_n = a$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ .

**Υπόδειξη:** Θεωρήστε τις αποστάσεις  $|x_{n+1} - x_n|$ .

- (ii) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Αφού  $x_n \rightarrow a$  θα έχουμε  $x_{n+1} - x_n \rightarrow a - a = 0$  και άρα  $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$ . Ειδικότερα για  $\varepsilon = 1/2$  θα έχουμε  $|x_{n+1} - x_n| < 1/2 < 1$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . (Μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε  $\varepsilon \leq 1$ .) Αν η απόσταση μεταξύ δύο φυσικών αριθμών είναι μικρότερη της μονάδας τότε αυτοί οι φυσικοί είναι αναγκαστικά ίσοι μεταξύ τους.

Αφού η  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  αποτελείται από φυσικούς αριθμούς και  $|x_{n+1} - x_n| < 1$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ , θα έχουμε και  $x_n = x_{n+1}$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Δηλαδή υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  έτσι ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $x_n = x_{n+1}$ . Με άλλα λόγια

$$x_{n_0} = x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \dots = x_n = \dots$$

Από την άλλη  $x_n \rightarrow a$  άρα  $x_n = a$  για κάθε  $n \geq n_0$ .

(ii) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω  $a \in \mathbb{N}$  και  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς με  $x_n \rightarrow a$ . Από το (i) θα έχουμε  $x_n = a$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  και άρα  $f(x_n) = f(a)$  σχεδόν για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ . Επομένως  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

### Άσκηση 102 (Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$

Βρείτε δύο συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  και  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $h = g \circ f$ .

- (ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Y \rightarrow Z$  είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση  $h = g \circ f$  είναι επίσης συνεχής, όπου τα  $X, Y$  και  $Z$  είναι μη κενά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ .

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Παίρνουμε  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) : f(x) = |\sin x|$  και  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : g(y) = \sqrt{y}$ . Τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|\sin x|) = \sqrt{|\sin x|} = h(x).$$

Άρα  $h = g \circ f$ .

**Σχόλιο:** Όταν σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τοποθετούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της στον οριζόντιο άξονα που δηλώνεται συνήθως με  $x'$  και γι' αυτό έχει επικρατήσει κατά κάποιο τρόπο η χρήση του συμβόλου  $x$  για να δηλώσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της. Στην περίπτωση της πιο πάνω  $g$  θα μπορούσαμε να συμβολίσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή πάλι με  $x$ , αλλά είναι πιο εύκολο στην κατανόηση να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύμβολο, π.χ. το  $y$ . Απλώς πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην περίπτωση που μας ζητηθεί να σχεδιάσουμε τη γραφική παράστασή της. Τότε το  $y$ , δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή, πρέπει να τοποθετηθεί στον οριζόντιο άξονα.

Γενικά δεν υπάρχει κάποιος μαθηματικός λόγος που να μας επιβάλλει τη χρήση ενός συγκεκριμένου συμβόλου για να δηλώσουμε μια μεταβλητή, θα μπορούσαμε π.χ. να είχαμε  $g(\natural) = \sqrt{\natural}$  για κάθε  $\natural \in [0, \infty)$ . Φυσικά δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα σύμβολο στο οποίο έχουμε

ήδη αποδώσει το νόημα κάποιου άλλου μαθηματικού αντικειμένου που έχουμε ήδη ορίσει, π.χ. δεν θα μπορούσαμε να είχαμε τα  $\emptyset, \infty$  στη θέση του  $\natural$ .

(ii) Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω  $x \in X$  και μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από στοιχεία του  $X$  με  $x_n \rightarrow x$ . Πρέπει να δείξουμε ότι  $h(x_n) \rightarrow h(x)$ .

Εφόσον η  $f$  είναι συνεχής στο  $x$  και  $x_n \rightarrow x$ , έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Η ακολουθία  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $y_n = f(x_n)$  για κάθε  $n \geq 1$ , αποτελείται από στοιχεία του  $Y$  και ικανοποιεί  $y_n \rightarrow y$  όπου  $y = f(x) \in Y$ . Αφού η  $g$  είναι συνεχής στο  $y$  από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε  $g(y_n) \rightarrow g(y)$ . Άρα

$$h(x_n) = (g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \rightarrow g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = h(x).$$

**Άσκηση 103** (Πυκνότητα ρητών-αρρήτων και σύγκλιση ακολουθίας). Έστω  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε  $q_n \rightarrow x$  και  $x_n \rightarrow x$ .

**Υπόδειξη.** Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε  $a < b$  υπάρχει ρητός  $q$  και άρρητος  $y$  με  $a < q < b$  και  $a < y < b$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό  $n \geq 1$ . Εφαρμόζουμε την υπόδειξη στους πραγματικούς αριθμούς  $x - 1/n < x + 1/n$ . Τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός  $q_n$  με  $x - 1/n < q_n < x + 1/n$  και ένας άρρητος  $x_n$  με  $x - 1/n < x_n < x + 1/n$ .

Αφού το  $n$  είναι τυχαίο έχουμε δύο ακολουθίες  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από ρητούς και άρρητους αριθμούς αντίστοιχα. Προφανώς  $x \pm 1/n \rightarrow x$  και άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε  $q_n \rightarrow x$  και  $x_n \rightarrow x$ .

**Άσκηση 104** (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Υποθέτουμε ότι η  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση και ότι  $f(q) = 0$  για κάθε ρητό αριθμό  $q \in (\alpha, \beta)$ . Δείξτε ότι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ .

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

**Λύση - υποδείξεις.**

Έστω  $x \in (\alpha, \beta)$ . Τότε λόγω της πυκνότητας των ρητών υπάρχει ακολουθία  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $q_n \in \mathbb{Q}$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x.$$

Αφού η  $f$  είναι συνεχής έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι  $f(q_n) \rightarrow f(x)$ .

Από την άλλη  $f(q_n) = 0$  γιατί  $q_n \in \mathbb{Q}$  άρα  $f(q_n) \rightarrow 0$ . Από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι  $f(x) = 0$ .

**Άσκηση 105** (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(q) = q^2$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$ . Υπολογίστε την τιμή  $f(\sqrt{2})$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών υπάρχει ακολουθία  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $\mathbb{Q}$  με  $q_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Αφού η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς ότι  $f(q_n) \rightarrow f(\sqrt{2})$ .

Επίσης  $f(q_n) = q_n^2$  γιατί  $q_n \in \mathbb{Q}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα  $f(\sqrt{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2$ . Από την άλλη  $q_n \rightarrow \sqrt{2}$ , άρα  $q_n^2 \rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2$ . Από τη μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι  $f(\sqrt{2}) = 2$ .

**Άσκηση 106** (Διατήρηση προσήμου τοπικά). Έστω συνάρτηση  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής στο  $x_0$ . Δείξτε ότι αν  $f(x_0) > 0$ , τότε υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να ισχύει ότι  $f(x) > 0$ .

**Υπόδειξη.** Για την επίλυση με βάση την Αρχή Μεταφοράς πρέπει να χρησιμοποιηθεί η απαγωγή σε άτοπο.

### Λύση - υποδείξεις.

Έστω προς άτοπο ότι δεν συμβαίνει το ζητούμενο. Τότε για κάθε  $\delta > 0$  υπάρχει  $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  έτσι ώστε  $f(x_\delta) \leq 0$ . Εφαρμόζουμε το τελευταίο για  $\delta = 1/n$  και βρίσκουμε  $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$  έτσι ώστε  $f(x_n) \leq 0$ , όπου  $n \in \mathbb{N}$ .

Αυτό δίνει μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  η οποία συγκλίνει στο  $x_0$  και για την οποία ισχύει  $f(x_n) \leq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . (Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $x_n \in (a, b)$  για κάθε  $n$ , αλλιώς αντί για  $\delta = 1/n$  παίρνουμε  $\delta = 1/(n + n_0)$  για ένα αρκετά μεγάλο  $n_0$  έτσι που το διάστημα  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να περιέχεται στο  $(a, b)$ .)

Από την Αρχή Μεταφοράς έχουμε  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  και αφού  $f(x_n) \leq 0$  για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ , προκύπτει ότι  $f(x_0) \leq 0$ , άτοπο.

**Σχόλιο:** Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής “σχεδόν σε όλα τα σημεία” του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με “πάρα πολλά” σημεία ασυνέχειας.

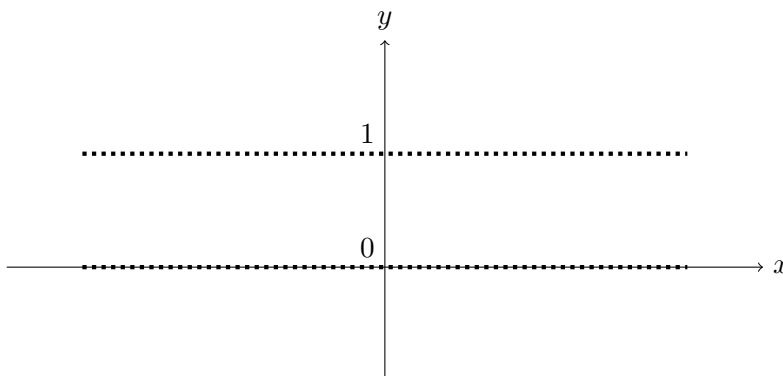
**Άσκηση 107** (Συνάρτηση Dirichlet). Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η  $f$  δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 103.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



### Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε ένα  $x \in \mathbb{R}$ . Για να δείξουμε ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x$  αρκεί να βρούμε μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_n \rightarrow x$  και  $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$ .

1η περίπτωση:  $x \in \mathbb{Q}$ . Τότε  $f(x) = 1$ . Από την Άσκηση 103 υπάρχει ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από άρρητους αριθμούς με  $x_n \rightarrow x$ . Αφού  $x_n \notin \mathbb{Q}$  θα έχουμε  $f(x_n) = 0$  για κάθε  $n \geq 1$ , επομένως  $f(x_n) \not\rightarrow 1 = f(x)$ .

2η περίπτωση:  $x \notin \mathbb{Q}$ . Τότε  $f(x) = 0$ . Από την Άσκηση 103 υπάρχει ακολουθία  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από ρητούς αριθμούς με  $q_n \rightarrow x$ . Αφού  $q_n \in \mathbb{Q}$  θα έχουμε  $f(q_n) = 1$  για κάθε  $n \geq 1$ , επομένως  $f(q_n) \not\rightarrow 0 = f(x)$ .

**Άσκηση 108.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $\cos(x^2) = x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(0, \pi/2)$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \cos(x^2) - x$ . Η  $f$  είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0 \quad \text{και} \quad f(\sqrt{\pi/2}) = \cos(\pi/2) - \sqrt{\pi/2} = -\sqrt{\pi/2} < 0.$$

Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει ένα  $\xi \in (0, \pi/2)$  με  $f(\xi) = 0$ , δηλαδή  $\cos(\xi^2) = \xi$ .

Σχετικά με τη μοναδικότητα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \pi/2]$ . Αν έχουμε  $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$  με  $x_1 < x_2$  τότε  $x_1^2 < x_2^2$  και άρα  $\cos(x_2^2) < \cos(x_1^2)$ . Επομένως

$$f(x_2) = \cos(x_2^2) - x_2 < \cos(x_1^2) - x_2 < \cos(x_1^2) - x_1 = f(x_1)$$

και άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \pi/2]$ . Ειδικότερα η  $f$  είναι 1-1 σε αυτό το διάστημα. Αν έχουμε λοιπόν  $\cos(x^2) = x$  για κάποιο  $x \in [0, \pi/2]$ , τότε  $f(x) = 0 = f(\xi)$  και άρα  $x = \xi$ . Με άλλα λόγια η εξίσωση  $\cos(x^2) = x$  έχει μοναδική λύση στο  $[0, \pi/2]$ .

**Σχόλιο:** Μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $\cos(x^2) = x$  έχει μοναδική λύση σε όλο το  $\mathbb{R}$  ως εξής. Αν  $x > \pi/2$  τότε  $x > 1$  και άρα  $\cos(x^2) - x < \cos(x^2) - 1 < 0$ . Αν  $x < -\pi/2$  τότε  $x < -1$  και άρα  $\cos(x^2) - x > -1 - x > 0$ . Τέλος αν  $x \in [-\pi/2, 0]$  τότε  $\cos(x^2) > 0 > x$ . Σε κάθε περίπτωση έχουμε  $\cos(x^2) \neq x$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0) \cup (\pi/2, +\infty)$ .

**Άσκηση 109** (Διερεύνηση ορίου). Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

Εξετάστε αν υπάρχουν στο  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  τα όρια των πιο πάνω συναρτήσεων όταν το  $x$  τείνει στο 0 και αν ναι να υπολογίσετε το εν λόγω όριο.

**Λύση - υποδείξεις.**

Σχετικά με την  $f$ , θεωρούμε μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_n \rightarrow 0$  και  $x_n \neq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε  $x_n^2 \rightarrow 0$  και  $f(x_n) = 1/x_n^2 \rightarrow \infty$ , όπου στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε ότι  $x_n^2 \geq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .

Σχετικά με τη  $g$  παίρνουμε τις ακολουθίες  $x_n = 1/n$  και  $y_n = -1/n$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$  καθώς και  $x_n, y_n \neq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Από την άλλη  $g(x_n) = n^2 \rightarrow +\infty$  ενώ  $g(y_n) = -n^2 \rightarrow -\infty$ . Άρα δεν υπάρχει το όριο της  $g$  όταν το  $x$  τείνει στο 0.

**Άσκηση 110** (Όριο συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου στα  $\pm\infty$ ). Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν στο  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  τα όρια των συναρτήσεων  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$  και όμοια όταν το  $x$  τείνει στο  $-\infty$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Για τη συνάρτηση του συνημιτόνου παίρνουμε τις ακολουθίες  $x_n = 2\pi n$  και  $y_n = 2\pi n + \pi/2$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Έχουμε  $x_n \rightarrow \infty$  και  $y_n \rightarrow \infty$ . Από την άλλη  $\cos(x_n) = 1$  και  $\cos(y_n) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$ . Για το όριο όταν το  $x$  τείνει στο  $-\infty$  θεωρούμε τις ακολουθίες  $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(-y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  οι οποίες συγκλίνουν στο  $-\infty$ . Ισχύει  $\cos(-x_n) = \cos(x_n) = 1$  και  $\cos(-y_n) = \cos(y_n) = 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , επομένως δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)$ .

Το συμπέρασμα για τη συνάρτηση του ημιτόνου προκύπτει με τον ίδιο τρόπο -και μάλιστα με τις ίδιες ακολουθίες.

**Άσκηση 111** (Ιδιότητες ορίου συνάρτησης). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , το οποίο είναι σημείο συσώρευσης του  $A$ . Δείξτε ότι αν  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell_1$  και  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell_2$ , όπου  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow b} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Χρησιμοποιούμε την Αρχή Μεταφοράς για όρια. Θεωρούμε μία ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $A$  για την οποία ισχύει  $x_n \rightarrow b$  και  $x_n \neq b$  για κάθε  $n \geq 1$ . Αφού  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell_1$  και  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell_2$  έχουμε  $f(x_n) \rightarrow \ell_1$  και  $g(x_n) \rightarrow \ell_2$ . Επομένως

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow \ell_1 + \ell_2.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow b} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$ .

**Άσκηση 112** (Όριο συνάρτησης και άπειρο). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) = +\infty$ .

(ii) Αν  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) = -\infty$ .

Μπορείτε να πάρετε δεδομένα τα αντίστοιχα αποτελέσματα για ακολουθίες.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Θεωρούμε μια ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στοιχείων του  $A$  με  $x_n \rightarrow b$  και  $x_n \neq b$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Από την υπόθεσή μας έχουμε  $f(x_n) \rightarrow +\infty$  και  $g(x_n) \rightarrow +\infty$ . Επιπλέον από τις ιδιότητες των ακολουθιών προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = +\infty.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) = +\infty$ .

(ii) Όμοια με το (i).

**Άσκηση 113** (Όρια πολωνύμων).

(i) Δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$ .

**Υπόδειξη:** Γράψτε το πολώνυμο ως γινόμενο  $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$ .

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  και ο  $k$  είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  και ο  $k$  είναι περιττός τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2 + 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} [x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)] = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 3/x + 1/x^3) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot (1 - 3 \cdot 0 + 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^k = 0$  για κάθε  $k \geq 1$ .

Σχετικά με τα υπόλοιπα ερωτήματα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x) = x^k \cdot \left( a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^k} \right).$$

Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^k} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^k} \right) = a_k + 0 + \cdots + 0 = a_k.$$

Άρα από τους γνωστούς κανόνες

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^k} \right) = a_k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^k.$$

(ii) Από τον κανόνα  $\infty \cdot \infty = \infty$  προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty$  και από τα προηγούμενα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = a_k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^k = a_k \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Από τον κανόνα  $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty$  για θετικό άρτιο αριθμό  $k$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = a_k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^k = a_k \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Από τους κανόνες  $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$  και  $(-\infty) \cdot \infty = -\infty$  προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = -\infty$  για περιττό αριθμό  $k$ . Άρα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = a_k \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = a_k \cdot (-\infty) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

**Άσκηση 114** (Κανόνας de L' Hospital). Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4x}$$

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Στο πρώτο όριο έχουμε απροσδιοριστία της μορφής  $\infty/\infty$  (Άσκηση 113). Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες. Ελέγχουμε  $(5x^2 + 4x)' = 10x + 4 \neq 0$  για κάθε  $x > 0$ . (Είναι αναγκαίο η παράγωγος του παρονομαστή να μην μηδενίζεται στο διάστημα  $I$  που παίρνουμε το όριο.) Επομένως από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{10x + 4}.$$

Αυτό οδηγεί πάλι σε μια απροσδιοριστία της μορφής  $\infty/\infty$ . Επειδή  $(10x + 4)' = 10 \neq 0$  έχουμε ξανά με εφαρμογή του Κανόνα de L' Hospital,

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{10x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Στο  $\ell_2$  παρατηρούμε ότι πάλι έχουμε απροσδιοριστία της μορφής  $-\infty/\infty$ . Ελέγχουμε τις παραγώγους  $(x^2 + 1)' = 2x \neq 0$  για κάθε  $x > 0$ ,  $(2x)' = 2 \neq 0$  (τη δεύτερη παράγωγο την παίρνουμε γιατί θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε δύο φορές τον Κανόνα de L' Hospital). Έχουμε

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 6}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 3) = -\infty.$$

Στην τρίτη ισότητα εφαρμόζουμε πάλι τον κανόνα de L' Hospital γιατί το όριο μετά από παραγωγή οδηγεί σε απροσδιοριστία της μορφής  $\infty/(-\infty)$

**Σχόλιο.** Τα  $\ell_1$  και  $\ell_2$  μπορούν να υπολογιστούν και με πιο στοιχειώδεις μεθόδους. Όπως στις ακολουθίες μπορούμε να διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του  $x$  και να χρησιμοποιήσουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^k = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x^k = 0$ .

Στο  $\ell_3$  έχουμε απροσδιοριστία της μορφής  $\infty/\infty$ . Η παράγωγος του παρονομαστή είναι  $e^x \neq 0$  για κάθε  $x$ . Από τον Κανόνα de L' Hospital έχουμε

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 2 \cdot 0 = 0,$$

όπου στην τρίτη ισότητα εφαρμόσαμε πάλι τον Κανόνα de L' Hospital γιατί έχουμε την απροσδιοριστία  $\infty/\infty$ .

**Άσκηση 115** (Κριτήριο Παρεμβολής για όρια συναρτήσεων). Θεωρούμε ένα διάστημα  $I$  και ένα  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  που είναι σημείο συσσώρευσης του  $I$ . Αν οι συναρτήσεις  $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιούν

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

και αν  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \ell$ .

**Υπόδειξη.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για ακολουθίες.

**Λύση - υποδείξεις.**

Εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια. Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία στοιχείων του  $I$  με  $x_n \rightarrow c$  και  $x_n \neq c$  για κάθε  $n \geq 1$ .

Έχουμε  $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$  για κάθε  $n \geq 1$ . Από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια και την υπόθεση  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$  έχουμε  $\ell = \lim_{x_n \rightarrow c} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow c} g(x_n)$ .

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής για τις ακολουθίες έχουμε  $\lim_{x_n \rightarrow c} h(x_n) = \ell$ . Με άλλα λόγια δείξαμε ότι για κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  από στοιχεία του  $I$  με  $x_n \rightarrow c$  και  $x_n \neq c$  για όλα τα  $n \geq 1$ , έχουμε  $h(x_n) \rightarrow \ell$ . Από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \ell$ .

**Άσκηση 116** (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων). Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1, 1) \text{ και } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : (0, \pi/2) \rightarrow (-1, 1) : f(t) = \cos t$ . Η  $f$  είναι 1-1, επί και  $\arccos = f^{-1}$ . Έστω  $x \in (-1, 1)$ , τότε  $x = f(t) = \cos t$  για κάποιο  $t \in (0, \pi/2)$ . Έχουμε  $f'(t) = -\sin t \neq 0$  επειδή  $t \in (0, \pi/2)$ . Άρα από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η  $\arccos$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x$  και

$$\arccos'(x) = \frac{1}{f'(t)} = -\frac{1}{\sin t}.$$

Εκφράζουμε την ποσότητα  $\sin t$  συναρτήσει του  $x = \cos t$ . Από τον τύπο  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  έχουμε

$$\sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Αφού  $t \in (0, \pi/2)$  έχουμε  $\sin t > 0$  άρα  $t = \sqrt{1 - x^2}$  και επομένως

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Για το επόμενο θεωρούμε τη συνάρτηση  $g : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R} : g(t) = \tan t$ . Η  $g$  είναι 1-1, επί και  $\arctan = g^{-1}$ . Έστω  $x \in \mathbb{R}$ , τότε  $x = g(t) = \tan t$  για κάποιο  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Έχουμε

$$g'(t) = \frac{\cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot (-\sin t)}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \neq 0.$$

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες συναρτήσεις η  $\arccos$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x$  και

$$\arctan'(x) = \frac{1}{g'(t)} = \cos^2 t.$$

Εκφράζουμε την ποσότητα  $\cos^2 t$  συναρτήσει του  $x = \tan t$ . Παίρνουμε τον τύπο  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ , διαιρούμε με το  $\cos^2 t$  και λαμβάνουμε

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t},$$

άρα  $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$  και  $\cos^2 t = 1/(1 + x^2)$ . Καταλήγουμε

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

**Άσκηση 117** (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy). Έστω  $a < b$  και  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς και διαφορίσιμες σε κάθε  $x \in (a, b)$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $c \in (a, b)$  με

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a)).$$

**Υπόδειξη.** Αν  $g(a) \neq g(b)$  θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), \quad x \in [a, b].$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Αν  $g(a) = g(b)$  τότε  $f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = 0$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle στη συνάρτηση  $g$  και βρίσκουμε  $c \in (a, b)$  με  $g'(c) = 0$ , έτσι που  $g'(c) \cdot (f(b) - f(a)) = 0$ .

Αν  $g(a) \neq g(b)$  θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), \quad x \in [a, b].$$

Η  $h$  είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε κάθε  $x \in (a, b)$ . Επιπλέον μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$h(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} = h(b).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει  $c \in (a, b)$  με

$$h'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

**Σχόλιο.** Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy χρησιμεύει στην απόδειξη του Κανόνα de L'Hospital.

**Άσκηση 118** (Ιδιάζουσες Συναρτήσεις). Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ .

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f_2$  είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f_3$  είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος  $f'_3$  δίνεται ως εξής:

$$f'_3(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η  $f'_3$  συνεχής;

**Υπόδειξη.** Στα  $x \neq 0$  μπορείτε να παραγωγίσετε την  $f_3$  με τον συνήθη τρόπο.

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Ορίζουμε  $x_n = \frac{1}{2\pi n}$  και  $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$  για κάθε  $n \geq 1$ . Παρατηρούμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  και  $x_n, y_n \neq 0$  για κάθε  $n \geq 1$ . Επιπλέον

$$f_1(x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

και

$$f_1(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Επομένως  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$  και από την Αρχή Μεταφοράς για τα όρια έχουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της  $f_1$  όταν το  $x$  τείνει στο 0.

(ii) Για να δείξουμε ότι η  $f_2$  είναι συνεχής στο 0 εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς. Έστω  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία πραγματικών αριθμών με  $x_n \rightarrow 0$ . Δείχνουμε ότι  $f_2(x_n) \rightarrow 0$ . Παρατηρούμε ότι  $|f_1(x)| \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , επομένως

$$|f_2(x_n)| = |x_n \cdot f_1(x_n)| \leq |x_n| \rightarrow 0.$$

Άρα  $f_2(x_n) \rightarrow 0 = f_2(0)$ .

Για να δείξουμε ότι η  $f_2$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 θεωρούμε  $x \neq 0$  και τον λόγο

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot f_1(x) - 0}{x} = f_1(x).$$

Επομένως, αν υπήρχε η παράγωγος της  $f_2$  στο 0, δηλαδή αν υπήρχε το όριο του πιο πάνω λόγου όταν το  $x$  τείνει στο 0, θα υπήρχε και το όριο της  $f_1$  όταν το  $x$  τείνει στο 0, που είναι άτοπο από το (i).

(iii) Με τους συνήθεις κανόνες παραγωγίσης βρίσκουμε στα  $x \neq 0$ ,

$$f'_3(x) = (x^2 \cdot \sin(1/x))' = 2x \sin(1/x) + x^2 \cdot (-1/x^2) \cos(1/x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Στο 0 έχουμε για  $x \neq 0$ ,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot f_1(x) - 0}{x - 0} = x \cdot f_1(x) = f_2(x).$$

Άρα

$$f'_3(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = f_2(0) = 0 \cdot f_1(0) = 0,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η  $f_2$  είναι συνεχής στο 0.

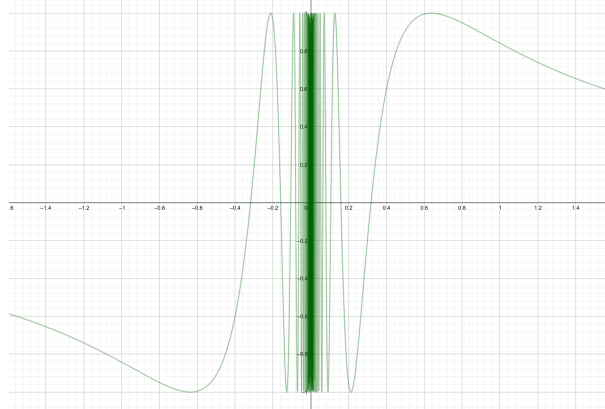
Τέλος η  $f'_3$  δεν είναι συνεχής στο 0. Για να το δείξουμε θεωρούμε την ακολουθία  $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ,  $n \geq 1$ . Τότε  $x_n \rightarrow 0$  αλλά

$$f'_3(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = 0 - 1 = -1$$

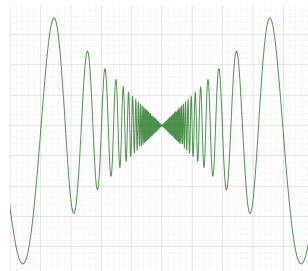
για κάθε  $n \geq 1$ . Επομένως  $f'_3(x_n) \not\rightarrow 0 = f'_3(0)$ . Από την Αρχή Μεταφοράς η  $f'_3$  δεν είναι συνεχής στο 0.

Δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , ο οποίες κοντά στο  $x = 0$  μπορούν να κατασκευαστούν μόνο κατά προσέγγιση.

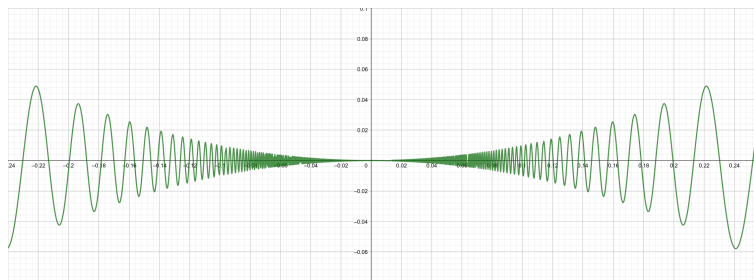
$f_1 :$



$f_2 :$



$f_3 :$



**Άσκηση 119** (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital).

- (i) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + 1$  και  $g(x) = x$ . Δείξτε ότι τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;
- (ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$  και  $g(x) = x$ . Δείξτε ότι το όριο  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της  $f'/g'$  ούτε είναι  $\pm \infty$  όταν το  $x$  τείνει στο  $\infty$ . (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$$

(Παρατηρήστε ότι  $x > 0$  στα πιο πάνω όρια γιατί οι συναρτήσεις ορίζονται στο  $(0, 1)$ .)

Άρα τα δύο όρια διαφέρουν. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital γιατί ενώ το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  είναι 0, το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  **δεν είναι** 0, είναι 1. Άρα δεν είμαστε σε κάποια από τις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται ο κανόνας.

(iii) Παρατηρούμε πρώτα ότι  $x + \sin x \geq x - 1$ . Επειδή  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - 1 = \infty$  έχουμε επίσης  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Παρατηρούμε επίσης ότι

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

και παίρνοντας το όριο  $x \rightarrow \infty$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ . Άρα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

Από την άλλη  $f'(x) = 1 + \cos x$  και  $g'(x) = 1$ , άρα  $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$ . Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $1 + \cos x$  όταν το  $x$  τείνει στο  $\infty$ . Προς αυτό βρίσκουμε δύο ακολουθίες  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow \infty$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \cos x_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \cos y_n$ .

Παίρνουμε  $x_n = 2\pi \cdot n$  και  $y_n = 2\pi n + \pi/2$ . Τότε  $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ ,  $1 + \cos x_n = 1 + \cos(2\pi n) = 1 + 1 = 2$  για κάθε  $n \geq 1$ , ενώ  $1 + \cos y_n = 1 + \cos(2\pi n + \pi/2) = 1 + 0 = 1$  για κάθε  $n \geq 1$ . Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $1 + \cos x$  όταν το  $x$  τείνει στο  $\infty$ .

**Άσκηση 120** (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης). Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2.$$

Δείξτε ότι η  $f$  είναι 1-1 και επί του  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια υπολογίστε την παράγωγο  $(f^{-1})'(2)$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Αφού  $f'(x) = x^2 + 5/3 > 0$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και άρα ένα-προς-ένα. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

και συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής η  $f$  είναι επί του  $\mathbb{R}$ . Ορίζεται επομένως η

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

και σύμφωνα με το θεώρημα για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης θα έχουμε

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}.$$

Όμως

$$f^{-1}(2) = x \Leftrightarrow x = 0.$$

Επομένως

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = 3/5.$$

**Άσκηση 121.** Δείξτε ότι

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Έστω  $x, y \in \mathbb{R}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $x < y$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση  $f(x) = \arctan t$  στο διάστημα  $[x, y]$ , τότε βρίσκουμε  $\xi \in (x, y)$  τέτοιο ώστε

$$\frac{|\arctan x - \arctan y|}{|x - y|} = \frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = (\arctan)'(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

**Άσκηση 122.** Έστω ότι η συνάρτηση  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , διαφορίσιμη στο  $(a, b)$  και  $f(a) = f(b) = 0$ . Δείξτε ότι για κάθε  $\gamma \in \mathbb{R}$ , υπάρχει  $x_0 \in (a, b)$  τέτοιο ώστε

$$\gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Έστω  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Αν θέσουμε  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$g(x) = e^{\gamma x} f(x),$$

τότε  $g(\alpha) = g(\beta) = 0$  και επομένως ικανοποιούνται για την  $g$  οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle. Θα υπάρξει συνεπώς  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

**Άσκηση 123.** Να δείξετε ότι  $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2 \arctan(x)$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

**Υπόδειξη.** Πώς σχετίζονται οι παράγωγοι των πιο πάνω συναρτήσεων για  $x > 0$ ;

**Λύση - υποδείξεις.**

Η συνάρτηση  $\arccos$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  και συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x \neq 0$ . Έχουμε λοιπόν για κάθε  $x > 0$

$$\begin{aligned} \left(\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \\ &= \dots \\ &= \frac{2}{1+x^2} \\ &= (2 \arctan(x))'. \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει σταθερά  $c$ , τέτοια ώστε για κάθε  $x > 0$  να έχουμε ότι

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2 \arctan(x) + c.$$

Θέτοντας  $x = 1$  στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{1-1^2}{1+1^2}\right) &= 2 \arctan(1) + c \\ \Leftrightarrow \arccos(0) &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} + c \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + c. \\ \Leftrightarrow c &= 0. \end{aligned}$$

Τέλος για  $x = 0$  είναι σαφές ότι

$$\arccos\left(\frac{1-0^2}{1+0^2}\right) = \arccos(1) = 0 = 2 \arctan(0),$$

συνεπώς

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2 \arctan(x), \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

**Άσκηση 124.** Θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι **τοπικά σταθερή** αν για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$  υπάρχει  $\delta > 0$ , που πιθανώς εξαρτάται από το  $x$ , τέτοιο ώστε η  $f$  να είναι σταθερή στο  $(x - \delta, x + \delta)$ .

Δείξτε ότι κάθε τοπικά σταθερή παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι σταθερή.

**Λύση - υποδείξεις.**

Έστω  $x \in (\alpha, \beta)$ . Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η παράγωγος  $f'(x)$  είναι ίση με 0.

Αφού η  $f$  είναι τοπικά σταθερή, υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε η  $f$  να είναι σταθερή στο  $(x - \delta, x + \delta)$ . (Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $\delta$  είναι αρκετά μικρό ώστε το τελευταίο διάστημα να περιέχεται στο πεδίο ορισμού  $(\alpha, \beta)$ .)

Θεωρούμε μια ακολουθία  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $(-\delta, \delta)$  με  $h_n \rightarrow 0$  και  $h_n \neq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , έτσι που  $x + h_n \in (x - \delta, x + \delta)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{h_n} = 0.$$

Επομένως η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση.

**Άσκηση 125** (Συμβολισμός  $\sum$  και παράγωγος). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$\left( \sum_{k=1}^n 5x^k \right)' = \dots \quad \left( \sum_{k=0}^n 5x^k \right)' = \dots$$

$$\left( \sum_{k=1}^n (x^{2k} + 3x^2 + 1) \right)' = \dots$$

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!} \right)' = \dots$$

Δείξτε επιπλέον ότι για κάθε  $n \geq 1$  και κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{k-1}.$$

**Σχόλιο.** Στα πιο πάνω με  $x^0$  εννοούμε τον αριθμό 1.

**Λύση - υποδείξεις.**

Μένει να συμπληρωθεί.

**Άσκηση 126** (Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση). Έστω  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $x_0 \in (a, b)$ . Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_\lambda(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0), \quad x \in (a, b).$$

Δείξτε ότι αν υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$  με

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g_\lambda(x)}{x - x_0} = 0,$$

όπου η  $g_\lambda$  είναι όπως πιο πάνω, τότε η  $f$  είναι διαφορίσιμη στο  $x_0$  και μάλιστα  $f'(x_0) = \lambda$ . (Επομένως η γραμμικοποίηση  $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  είναι η μοναδική “καλή γραμμική” προσέγγιση της  $f$  κοντά στο  $x_0$ .)

### Λύση - υποδείξεις.

Παρατηρούμε ότι  $f(x) - g_\lambda(x) = f(x) - [f(x_0) + \lambda(x - x_0)] = f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)$ . Άρα αν υπάρχει τέτοιο  $\lambda$  τότε

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g_\lambda(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - \lambda.$$

Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda,$$

άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0) = \lambda$ .

**Άσκηση 127** (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς  $(1,0002)^{50}$  και  $\sqrt[3]{1,009}$ .

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Η γραμμικοποίηση της  $f(x) = (1+x)^{50}$ , γύρω από το  $x_0 = 0$  είναι

$$L(x) = 1 + 50x.$$

Επομένως

$$(1,0002)^{50} = f(0,0002) \approx L(0,0002) = 1,01.$$

(ii) Αντίστοιχα η γραμμικοποίηση της  $f(x) = (1+x)^{1/3}$ , γύρω από το  $x_0 = 0$  είναι

$$L(x) = 1 + 1/3x.$$

Επομένως

$$\sqrt[3]{1,009} = f(0,009) \approx L(0,009) = 1,003.$$

**Άσκηση 128** (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό  $\tan 42^\circ$ , δηλαδή για τον  $\tan \frac{7\pi}{30}$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Γραμμικοποιούμε την  $f(x) = \tan x$  στο  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  και έχουμε

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Οπότε

$$\tan 42^\circ \equiv \tan \frac{7\pi}{30} \approx L\left(\frac{7\pi}{30}\right) = 1 + 2\left(-\frac{\pi}{60}\right) = \frac{30 - \pi}{30}.$$

**Άσκηση 129** (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο  $x_0 = 0$ ). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = e^x$ . Δείξτε ότι  $f^{(n)}(0) = 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Δείχνουμε την ισχυρότερη σχέση  $f^{(n)}(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Εφαρμόζουμε την Αρχή της Επαγωγής: για  $n = 0$  έχουμε προφανώς  $f^{(0)}(x) = f(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $f^{(n)}(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και δείχνουμε ότι  $f^{(n+1)}(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου στη δεύτερη ισότητα πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος για να δείξουμε ότι  $f^{(n)}(0) = 1$  παίρνουμε την ισότητα  $f^{(n)}(x) = e^x$  και θέτουμε  $x = 0$ .

**Άσκηση 130** (Πολυώνυμο Taylor Εκθετικής Συνάρτησης). Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^x$ . Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor  $P_n$  της  $f$  τάξης  $n \in \mathbb{N}$  στο σημείο  $x_0 = 0$  δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Αφού  $f^{(k)}(0) = 1$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \quad (\text{από τον ορισμό}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k. \end{aligned}$$

**Άσκηση 131** (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο  $x_0 = 1$ ). Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} :$

$$g(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad x \in (-1, 1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε  $k \geq 1$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Ο ισχυρισμός για τη  $g$  αποδεικνύεται με επαγωγή. Για  $n = 0$  έχουμε προφανώς  $g^{(0)}(x) = g(x) = \frac{1}{1+x}$  και

$$\frac{(-1)^0 \cdot 0!}{(1+x)^{0+1}} = \frac{1 \cdot 1}{(1+x)^1} = \frac{1}{1+x} = g^{(0)}(x), \quad x \in (-1, 1).$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$ , όπου  $x \in (-1, 1)$ . Δείχνουμε ότι

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Για κάθε  $x \in (-1, 1)$  έχουμε

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \left( g^{(n)}(x) \right)' \\ &= \left( \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}} \right)' \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot \left( \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \right)' \\ &= (-1)^n \cdot n! \cdot [-(n+1)] \cdot (1+x)^{-(n+2)} \cdot (1+x)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \cdot (-1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+2}} \cdot 1 \\
&= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι  $g = f'$  οπότε  $g^{(n)} = f^{(n+1)}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ή αλλιώς  $f^{(k)} = g^{(k-1)}$  για κάθε  $k \geq 1$ . Ειδικότερα για  $x = 0$  έχουμε  $f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0)$ , δηλαδή

$$f^{(k)}(0) = g^{(k-1)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+0)^{k-1+1}} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε  $k \geq 1$ .

**Άσκηση 132** (Πολυώνυμο Taylor Λογαρίθμου). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor  $P_n$  της συνάρτησης

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$$

τάξης  $n$  στο σημείο 0 δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 131.

**Λύση - υποδείξεις.**

Από προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι  $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$  για κάθε  $k \geq 1$ . Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \quad (\text{ορισμός } P_n) \\
&= f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot (x-0)^k \quad (\text{διαχωρίζουμε περιπτώσεις } k=0 \text{ και } k \geq 1) \\
&= \ln 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} \cdot x^k \quad (\text{από τα προηγούμενα}) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \quad (\text{ισχύει } k! = (k-1)! \cdot k) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$

**Άσκηση 133** (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε

(1)

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $f^{(m)}(x)$  είναι η παράγωγος της  $f$  τάξης  $m \in \mathbb{N}$ . (Με  $f^{(0)}$  εννοούμε την  $f$ .) Συμπεράνετε ότι

$$(2) \quad \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j+1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

### Λύση - υποδείξεις.

Δείχνουμε τις ισότητες (1) με επαγωγή στο  $n$ . Ορίζουμε την ιδιότητα  $P$  ως εξής: ένας φυσικός αριθμός  $n$  ικανοποιεί την  $P$  ακριβώς όταν ικανοποιούνται **και οι τέσσερις** ισότητες στην (1) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Για  $n = 0$  έχουμε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\sin^{(0)}(x) &= \sin(x), & \sin^{(1)}x &= (\sin(x))' = \cos(x) \\ \sin^{(2)}(x) &= (\cos(x))' = -\sin(x), & \sin^{(3)}(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x).\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  ικανοποιεί την ιδιότητα  $P$  και δείχνουμε το ίδιο για το  $n + 1$ . Έστω  $x \in \mathbb{R}$ , για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$\sin^{(4(n+1))}(x) = \sin^{(4n+4)}(x) = (\sin^{(4n+3)})'(x) = (-\cos(x))' = +\sin(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την **τέταρτη ισότητα** της (1). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\begin{aligned}\sin^{(4(n+1)+1)}(x) &= \sin^{(4n+5)}(x) = (\sin^{(4n+4)}(x))' = (\sin(x))' = \cos(x) \\ \sin^{(4(n+1)+2)}(x) &= \sin^{(4n+6)}(x) = (\sin^{(4n+5)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)\end{aligned}$$

και

$$\sin^{(4(n+1)+3)}(x) = \sin^{(4n+7)}(x) = (\sin^{(4n+6)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x).$$

Επομένως το  $n + 1$  ικανοποιεί την ιδιότητα  $P$  και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για την (2) θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό  $k \in \mathbb{N}$  και  $j \in \mathbb{N}$  με  $k = 2j$ . Αν ο  $j$  είναι άρτιος τότε  $j = 2n$  για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  και  $k = 4n$ , ενώ αν ο  $j$  είναι περιττός τότε  $j = 2n + 1$  για κάποιο  $n$  και τότε  $k = 2(2n + 1) = 4n + 2$ . Από την (1) έχουμε  $\sin^{(k)}(0) = \pm \sin(0) = 0$ .

Τέλος θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό  $k \in \mathbb{N}$  και  $j \in \mathbb{N}$  με  $k = 2j + 1$ . Αν  $j = 2n$  τότε  $k = 4n + 1$  οπότε από την (1) έχουμε  $\sin^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$ , και αν  $j = 2n + 1$  τότε  $k = 2 \cdot (2n + 1) + 1 = 4n + 3$  οπότε από την (1) έχουμε  $\sin^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$ . Σε κάθε περίπτωση έχουμε  $\sin^{(k)}(0) = (-1)^j$ , όταν  $k = 2j + 1$ .

**Άσκηση 134** (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις ισότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου  $\cosine$  ( $\cos$ ) που είναι αντίστοιχες με τις (1) και (2) της Άσκησης 133.

### Λύση - υποδείξεις.

Οι αντίστοιχες ισότητες για τη συνάρτηση  $\cos$  είναι

(3)

$$\cos^{(4n)}(x) = \cos(x), \quad \cos^{(4n+1)}(x) = -\sin(x), \quad \cos^{(4n+2)}(x) = -\cos(x), \quad \cos^{(4n+3)}(x) = \sin(x),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $n \in \mathbb{N}$ . Στο  $x = 0$  έχουμε

$$(4) \quad \cos^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j + 1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Δείχνουμε τις ισότητες της (3) με επαγωγή στο  $n \in \mathbb{N}$ . Για  $n = 0$  έχουμε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\cos^{(0)}(x) &= \cos(x), & \cos^{(1)}x &= (\cos(x))' = -\sin(x) \\ \cos^{(2)}(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x), & \cos^{(3)}(x) &= (-\cos(x))' = +\sin(x).\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι οι ισότητες της (3) ισχύουν για κάποιο  $n$  και δείχνουμε ότι ισχύουν και για το  $n + 1$ . Έστω  $x \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\cos^{(4(n+1))}(x) = \cos^{(4n+4)}(x) = (\cos^{(4n+3)})'(x) = (\sin(x))' = \cos(x),$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Επαγωγική Υπόθεση και πιο συγκεκριμένα την **τέταρτη ισότητα** της (3). Για τις υπόλοιπες ισότητες,

$$\cos^{(4(n+1)+1)}(x) = \cos^{(4n+5)}(x) = (\cos^{(4n+4)}(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$\cos^{(4(n+1)+2)}(x) = \cos^{(4n+6)}(x) = (\cos^{(4n+5)}(x))' = (-\sin(x))' = -\cos(x)$$

και

$$\cos^{(4(n+1)+3)}(x) = \cos^{(4n+7)}(x) = (\cos^{(4n+6)}(x))' = (-\cos(x))' = \sin(x).$$

Επομένως οι ισότητες ικανοποιούνται για το  $n+1$  και από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Για τη (4) θεωρούμε έναν περιττό φυσικό αριθμό  $k \in \mathbb{N}$  και  $j \in \mathbb{N}$  με  $k = 2j + 1$ . Αν  $j = 2n$  τότε  $k = 4n + 1$  οπότε από την (3) έχουμε  $\cos^{(k)}(0) = -\sin(0) = 0$ , και αν  $j = 2n + 1$  τότε  $k = 2 \cdot (2n + 1) + 1 = 4n + 3$  οπότε από την (3) έχουμε  $\cos^{(k)}(0) = \sin(0) = 0$ . Άρα  $\sin^{(k)}(0) = 0$ .

Τέλος θεωρούμε έναν άρτιο φυσικό αριθμό  $k \in \mathbb{N}$  και  $j \in \mathbb{N}$  με  $k = 2j$ . Αν ο  $j$  είναι άρτιος τότε  $j = 2n$  για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  και  $k = 4n$ . Από την (3) έχουμε  $\cos^{(k)}(0) = \cos(0) = 1 = (-1)^{2n} = (-1)^j$ . Αν ο  $j$  είναι περιττός τότε  $j = 2n + 1$  για κάποιο  $n$  και τότε  $k = 2(2n + 1) = 4n + 2$ . Επομένως από την (3)  $\cos^{(k)}(0) = -\cos(0) = -1 = (-1)^{2n+1} = (-1)^j$ .

**Άσκηση 135** (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor).

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό  $n$  για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό  $n$  με την πιο πάνω ιδιότητα.

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Το πολυώνυμο Taylor  $P_n$  της  $e^x$  στο 0 είναι το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Συμβολίζουμε με  $R_n$  το αντίστοιχο υπόλοιπο. Παίρνουμε  $x = 1$  και  $n \in \mathbb{N}$ . Παρατηρούμε ότι

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

και άρα

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - P_n(1) = R_n(1).$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  έτσι ώστε

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (1-0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

όπου  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Επειδή  $f^{(m)}(x) = f(x)$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  έχουμε

$$R_n(1) = \frac{f(\xi)}{(n+1)!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

και συνεπώς

$$(5) \quad e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}.$$

Επειδή η  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και  $\xi < 1$  έχουμε

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ειδικότερα από την (5) έχουμε

$$(6) \quad e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε  $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$ . Ισοδύναμα  $(n+1)! > 30000$ . Υπολογίζουμε

$$5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 720 \cdot 7 = 5040, \quad 8! = 5040 \cdot 8 = 40320 > 30000.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε  $n+1 = 8$  δηλαδή  $n = 7$ .

**Προσοχή.** Θέτοντας  $n = 6$  στην (6) βλέπουμε ότι  $e - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040}$ . Η τελευταία ανισότητα

δεν μπορεί να αποκλείσει το ενδεχόμενο η προσέγγιση του  $\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!}$  στο  $e$  να είναι πολύ μικρότερη του  $3 \cdot 5040^{-1}$ , ίσως και μικρότερη του  $10^{-4}$ . Επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ακόμα ότι το  $n = 7$  είναι ο ελάχιστος φυσικός  $n$  με  $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}$ . Αυτό ουσιαστικά είναι το ζητούμενο του επόμενου ερωτήματος.

(ii) Από την (5) και το γεγονός ότι η  $e^x$  είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} > \frac{e^0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Για  $n = 6$  έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} > \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}.$$

Αλλά  $5040 < 10000 = 10^4$ , άρα  $e - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} > \frac{1}{5040} > 10^{-4}$ .

Επομένως ο  $n = 7$  είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με  $e - \sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} < 10^{-4}$ .

**Άσκηση 136** (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Αρχικά δείχνουμε μια ανισότητα με βάση το  $\cos x$  και το πολυώνυμο Taylor  $P_5$  της  $\cos x$  στο 0 - έπειτα αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $2x$ . Το 5 υπαγορεύεται από την εκφώνηση όπου το σφάλμα στην προσέγγιση είναι  $64x^6/6!$ , με άλλα λόγια **το υπόλοιπο Taylor πρέπει να έχει τάξη 6**. Αυτό συμβαίνει όταν το πολυώνυμο Taylor είναι το  $P_5$ .

Υπενθυμίζουμε ότι τα πολυώνυμα Taylor της  $\cos x$  στο 0 δίνονται από

$$1, \quad 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \quad \dots$$

Για να βρούμε το πολυώνυμο Taylor  $P_5$  στο 0 παίρνουμε τις δυνάμεις όπου ο εκθέτης φτάνει το πολύ μέχρι 5, δηλαδή

$$P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

(Δεν πειράζει που ο συντελεστής του  $x^5$  είναι 0.)

Θεωρούμε  $x \in \mathbb{R}$ . Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει  $\xi$  ανάμεσα στο 0 και στο  $x$  με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6$$

όπου  $R_5(x) = \cos(x) - P_5(x)$ . Έχουμε  $|\cos^{(6)}(\xi)| \leq 1$  (οι παράγωγοι του συνημιτόνου κάθε τάξης είναι της μορφής  $\pm \sin$  ή  $\pm \cos$ ), άρα

$$|\cos x - P_5(x)| = |R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot |x|^6$$

$$\Rightarrow \left| \cos x - \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{x^6}{6!}.$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $x$  με το  $2x$  και παίρνουμε

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{(2x)^6}{6!}.$$

Δηλαδή

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}.$$

**Σχόλιο:** Επειδή ο συντελεστής του  $x^5$  στο  $P_5(x)$  είναι 0 έχουμε ότι  $P_5(x) = P_4(x)$ . Άρα το  $|\cos x - P_5(x)|$  παραμένει το ίδιο με το  $|\cos x - P_4(x)| = |R_4(x)|$ . Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια παίρνοντας το υπόλοιπο  $R_4$  αντί του  $R_5$ . Όπως με πριν καταλήγουμε στο  $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$ . Τέλος αντικαθιστώντας το  $x$  με το  $2x$  παίρνουμε

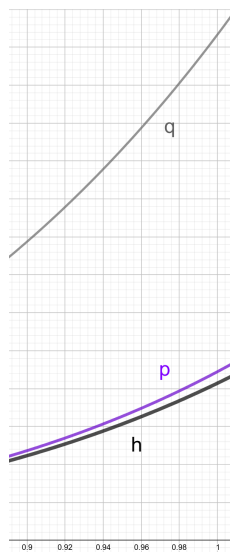
$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| = |\cos(2x) - P_4(2x)| = |R_4(2x)| \leq \frac{|2x|^5}{5!} = \frac{32|x|^5}{5!}.$$

Με άλλα λόγια η προσέγγιση με σφάλμα το πολύ  $\frac{32|x|^5}{5!}$  είναι επίσης σωστή. Όμως η προσέγγιση της εκφώνησης, δηλαδή με σφάλμα το πολύ  $\frac{64|x|^6}{6!}$ , είναι ακριβέστερη όταν  $0 < |x| < 3$ . Για να δούμε το τελευταίο παρατηρούμε ότι

$$\frac{64|x|^6}{6!} < \frac{32|x|^5}{5!} \iff \frac{2|x|^6}{6} < |x|^5 \iff |x| < 3, \quad \text{όπου } x \neq 0.$$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των  $h(x) = \left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right|$ ,

$p(x) = \frac{64x^6}{6!}$  και  $q(x) = \frac{32|x|^5}{5!}$  γύρω από το  $x = 0,96$  για να δούμε την τάξη μεγέθους στη διαφορά των σφαλμάτων:



Όπως βλέπουμε στην περιοχή του  $x = 0,96$  η συνάρτηση  $p$  είναι αρκετά καλύτερη προσέγγιση της  $h$  σε σχέση με την  $q$ .

**Άσκηση 137** (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left| \sin 1 - \left( 1 - \frac{1}{3!} \right) \right| < 10^{-2}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Το πολυώνυμο Taylor  $P_4$  της συνάρτησης ημίτονο στο 0 είναι το

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Για το  $x = 1$  υπάρχει από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου ένα  $\xi \in (0, 1)$  με

$$R_4(1) = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot 1^5 = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!},$$

όπου

$$R_4(1) = \sin 1 - P_4(1) = \sin 1 - \left( 1 - \frac{1}{3!} \right).$$

Τότε

$$\left| \sin 1 - \left( 1 - \frac{1}{3!} \right) \right| = |R_4(1)| = \left| \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \right| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 10^{-2}.$$

**Άσκηση 138** (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου 0 χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το  $\sin 1$  με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από 0,001; Ποιος είναι ο τύπος αυτού του πολυωνύμου;

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor για την  $f$  στο 0 τάξης  $n$  έχουμε

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

για κάποιο  $\xi \in (0, 1)$ , όπου το  $f^{(n+1)}(\xi)$  είναι  $\sin \xi$  ή  $\cos \xi$ . Συνεπώς

$$|R_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Θέλουμε να έχουμε  $1/(n+1)! < 0,001 = 10^{-3}$ , ισοδύναμα  $(n+1)! > 1000$ . Ο ελάχιστος  $m \in \mathbb{N}$  με  $m! > 1000$  είναι ο  $m = 7$ . Άρα παίρνουμε  $n = 6$  και έχουμε  $(n+1)! = 7! > 1000$ , δηλαδή η ζητούμενη προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί για  $n = 6$ . Επομένως χρειαζόμαστε το πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης ημίτονο στο 0 τάξης 6. Αυτό το πολυώνυμο δίνεται από τον τύπο

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

(Ο συντελεστής του  $x^6$  είναι 0.)

**Άσκηση 139** (Εύρεση διαστήματος προσέγγισης). Βρείτε ένα ανοικτό διάστημα  $I$  με κέντρο το 0 έτσι ώστε για κάθε  $x \in I$  να ισχύει

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| < 10^{-4}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Συμβολίζουμε με  $P_4$  το πολυώνυμο Taylor της  $f$  στο 0 τάξης 4 και με  $R_4$  το αντίστοιχο υπόλοιπο.

Θεωρούμε ένα  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε  $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ , επομένως

$$\sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) = f(x) - P_4(x) = R_4(x).$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου υπάρχει  $\xi$  ανάμεσα στο 0 και στο  $x$  έτσι ώστε

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x - 0)^5.$$

Ισχύει  $|f^{(5)}(\xi)| \leq 1$  άρα

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{5!} \cdot |x|^5.$$

Άρα αν έχουμε

$$(7) \quad \frac{|x|^5}{5!} < 10^{-4}$$

τότε θα ισχύει

$$(8) \quad \left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| = |R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} < 10^{-4}.$$

Επιλύουμε την ανίσωση (7):

$$\iff \frac{|x|^5}{5!} < 10^{-4}$$

$$\iff |x|^5 < 10^{-4} \cdot 5!$$

$$\iff |x|^5 < 120 \cdot 10^{-4}$$

$$\iff |x|^5 < 1,2 \cdot 10^{-2}$$

$$\iff |x| < \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}$$

$$\iff -\sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}} < x < \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}.$$

Επομένως για κάθε  $x \in \left( -\sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}, \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}} \right)$  έχουμε από την (8) ότι ισχύει

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| < 10^{-4},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Οπότε **ένα κατάλληλο** διάστημα είναι το

$$I = \left( -\sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}}, \sqrt[5]{1,2 \cdot 10^{-2}} \right).$$

**Άσκηση 140** (Taylor και φραγμένη συνάρτηση). Έστω ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο φορές διαφορίσιμη και  $f(0) = f'(0) = 0$ . Υποθέτουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $|x| \leq 1$  ισχύει

$$|f''(x)| \leq 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε  $|x| \leq 1$  έχουμε

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , υπάρχει  $\xi$  μεταξύ του  $x$  και του 0, τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(\xi)}{2} x^2 = \frac{f''(\xi)}{2} x^2.$$

Όμως, από υπόθεση,  $|f''(\xi)| \leq 1$  και επομένως αν επιπλέον υποθέσουμε ότι  $|x| \leq 1$  παίρνουμε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

**Άσκηση 141** (Taylor και ανισώσεις). Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα Taylor της  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x}$  στο 0 μέχρι 3ης τάξης και να δείξετε ότι

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Υπολογίζουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad \text{για } x > 0,$$

και επομένως

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}, \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 + \frac{x}{2}, \quad P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \\ P_3(x) &= P_2(x) + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = P_2(x) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε ένα  $x > 0$ . Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου για  $n = 1$  έχουμε

$$\sqrt{1+x} = P_1(x) + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2$$

για κάποιο  $\xi \in (0, x)$ . Αφού  $x, \xi > 0$  προκύπτει από πιο πάνω ότι  $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ .

Αντίστοιχα για  $n = 2$  έχουμε

$$\sqrt{1+x} = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = P_2(x) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+c)^{-\frac{5}{2}}x^3,$$

για κάποιο  $c \in (0, x)$ . Αφού  $x, c > 0$  προκύπτει από πιο πάνω ότι  $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ .

**Άσκηση 142** (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι

$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$ . Επίσης παίρνουμε το πολυώνυμο  $P_n$  και το υπόλοιπο  $R_n$  Taylor της  $f$  στο 0 τάξης  $n$ .

Έστω  $x > 0$ . Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor για  $n = 1$  έχουμε

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x-0)^2 = -\frac{1}{2(1+\xi)} \cdot x^2.$$

για κάποιο  $\xi \in (0, x)$ .

Επίσης γνωρίζουμε ότι  $P_1(x) = x$ . Άρα

$$\ln(1+x) = P_1(x) + R_1(x) = x - \frac{1}{2(1+\xi)} \cdot x^2$$

και

$$x - \ln(1+x) = \frac{1}{2(1+\xi)} \cdot x^2 > 0$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιούμε ότι  $\xi > 0$  και  $x \neq 0$ .

Αντίστοιχα για  $n = 2$  έχουμε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2(1+c)^{-3}}{3!} \cdot x^3$$

για κάποιο  $c \in (0, x)$  και επομένως

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2(1+c)^{-3}}{3!} \cdot x^3 < \frac{x^2}{2},$$

όπου στην τελευταία ανίσωση χρησιμοποιούμε ότι  $c, x > 0$ .

**Άσκηση 143** (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ , για κάθε  $x \in [-\pi, 0]$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Το πολυώνυμο Taylor  $P_5$  της συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sin(x)$  στο 0 τάξης 5 είναι το  $P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ .

Σύμφωνα με τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor, έχουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , υπάρχει  $\xi$  μεταξύ του  $x$  και του 0, τέτοιο ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^6 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin \xi}{6!}x^6.$$

Πιο πάνω χρησιμοποιούμε ότι  $f^{(6)}(x) = f^{(2)}(x) = -\sin(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν  $x \in [-\pi, 0]$ , τότε  $\xi \in (-\pi, 0)$  και συνεπώς  $-\sin \xi > 0$ . Οπότε έχουμε από πιο πάνω ότι

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

(Η ισότητα ισχύει για  $x = 0$ .)

**Σχόλιο.** Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο Taylor  $P_6$  της πιο πάνω  $f$  (στο 0) είναι το ίδιο με το  $P_5$ . Θα μπορούσε επομένως κανείς να χρησιμοποιήσει τη μορφή Lagrange για το υπόλοιπο τάξης 6. Αυτό δίνει για κάθε  $x \in [-\pi, 0]$  κάποιο  $\xi \in (x, 0) \subseteq (-\pi, 0)$ , για το οποίο ισχύει

$$\sin x = P_6(x) + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}x^7 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\cos \xi}{7!}x^7.$$

(Χρησιμοποιούμε ότι  $f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x) = -\cos(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .)

Τώρα όμως δεν έχουμε τρόπο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα γιατί η συνάρτηση του συνημιτόνου δεν διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα  $(-\pi, 0)$ . Συγκεκριμένα, για να προκύπτει το ζητούμενο πρέπει πιο πάνω να έχουμε ότι  $-\frac{\cos \xi}{7!}x^7 \geq 0$ , ισοδύναμα  $\cos \xi \geq 0$  (γιατί  $x < 0$ ), ισοδύναμα  $\xi \in [-\pi/2, 0)$ .

Το τελευταίο δεν προκύπτει από τα δεδομένα μας: εμείς γνωρίζουμε ότι  $\xi \in (x, 0)$  αλλά στην περίπτωση όπου το  $x$  είναι μικρότερο από το  $-\pi/2$  δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $\xi \in [-\pi/2, 0)$ . Με άλλα λόγια η επιλογή του  $P_6$  δίνει τη ζητούμενη ανισότητα μόνο για τα  $x$  στο διάστημα  $[-\pi/2, 0]$ , σε αντιδιαστολή με την επιλογή του  $P_5$  που επιτυγχάνει για τα  $x$  στο  $[-\pi, 0]$ .

Βλέπουμε λοιπόν σε αυτό το παράδειγμα ότι η επιλογή του πολυωνύμου Taylor τάξης 5 είναι προτιμότερη από την επιλογή του πολυωνύμου Taylor τάξης 6.(!)

**Άσκηση 144** (Taylor και τοπικό ελάχιστο - Απαιτητική). Έστω ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι απεριορίστα διαφορίσιμη και

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  και κάποιο  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι αν  $f^{(2n)}(x_0) > 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  τοπικό ελάχιστο.

**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της  $f$  καθώς και ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση  $h$ , αν  $h(x_0) > 0$  τότε υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να ισχύει  $h(x) > 0$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Η υπόθεσή μας για τις μηδενικές παραγώγους συνεπάγεται ότι το πολυώνυμο Taylor  $P_{2n-1}$  της  $f$  στο  $x_0$  τάξης  $2n-1$  είναι ίσο με

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!} \cdot (x - x_0)^{2n-1} \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

(ειδικότερα είναι σταθερό πολυώνυμο).

Αφού η  $f^{(2n)}$  είναι συνεχής (ως διαφορίσιμη) και  $f^{(2n)}(x_0) > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να ισχύει  $f^{(2n)}(x) > 0$ . Ισχυριζόμαστε ότι αυτό το  $\delta$  υλοποιεί ότι η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ , δηλαδή ότι για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ισχύει  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Θεωρούμε λοιπόν ένα  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  με  $x \neq x_0$  και δείχνουμε ότι  $f(x) \geq f(x_0)$  (η περίπτωση  $x = x_0$  είναι προφανής). Σύμφωνα με τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor  $R_{2n-1}$ , υπάρχει  $\xi$  μεταξύ του  $x_0$  και του  $x$ , τέτοιο ώστε

$$f(x) = P_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n}.$$

Αφού το  $\xi$  βρίσκεται ανάμεσα στο  $x_0$  και στο  $x$  και αφού  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  έχουμε επίσης ότι  $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Σύμφωνα με τα πιο πάνω ισχύει  $f^{(2n)}(\xi) > 0$ . Επίσης  $(x - x_0)^{2n} > 0$  γιατί ο εκθέτης είναι άρτιος αριθμός. Επομένως

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n} > 0, \quad \text{άρα } f(x) > f(x_0).$$

**Άσκηση 145** (Taylor και σταθερή συνάρτηση - Απαιτητική). Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

**Υπόδειξη.** Δείξτε ότι  $f'(x_0) = 0$  για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$  χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της  $f$  στο σημείο  $x_0$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Θεωρούμε το πολυώνυμο  $P_1$  και το υπόλοιπο  $R_1$  Taylor της  $f$  στο σημείο  $x_0$  τάξης 1. Τότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ειδικότερα για κάθε  $h \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$P_1(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Σύμφωνα με τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor έχουμε ότι για κάθε  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , υπάρχει  $\xi$  μεταξύ του  $x_0$  και του  $x_0 + h$  τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= P_1(x_0 + h) + R_1(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!} (x_0 + h - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!} h^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση έχουμε ότι

$$0 \leq f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!} h^2 \leq f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$f(x_0) + f'(x_0)h \geq 0 \quad \text{για κάθε } h \neq 0.$$

---

Αν ήταν  $f'(x_0) \neq 0$  τότε θα υπήρχε κατάλληλη επιλογή  $h \neq 0$  έτσι ώστε  $f(x_0) + f'(x_0)h < 0$ , πράγμα που αντιβαίνει στο πιο πάνω. Επομένως  $f'(x_0) = 0$ . Δεδομένου ότι το  $x_0$  είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός προκύπτει ότι  $f' = 0$  και άρα η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή.

**Παρατήρηση.** Η υπόθεση  $f'' \leq 0$  μας λέει ότι η  $f$  είναι κοίλη. Με βάση αυτό μπορεί κανείς να διαπιστώσει με ένα πρόχειρο σχήμα ότι αν η  $f$  ήταν μη σταθερή τότε θα έπαιρνε αρνητικές τιμές.

## Δυναμοσειρές

### Θεώρημα Παραγωγίσης Δυναμοσειρών (υπενθύμιση).

Θεωρούμε ότι η δυναμοσειρά  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  συγκλίνει για όλα τα  $x$  μέσα σε ένα ανοικτό διάστημα  $I$ . Τότε η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $I$  και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1} \quad x \in I.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να παραγωγίσουμε τη δυναμοσειρά **όρο προς όρο**

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right)' &= (a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-c)^n + \cdots)' \\ &= a_1 + 2a_2 \cdot (x-c) + \cdots + na_n \cdot (x-c)^{n-1} + \cdots \quad x \in I. \end{aligned}$$

**Άσκηση 146** (Ερωτήσεις Κατανόησης). Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

- (i) Αν η  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δυναμοσειρά και το  $I$  είναι ανοικτό διάστημα τότε η  $f$  είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο  $I$ . Σωστό ή Λάθος;
- (ii) Οι δυναμοσειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  και  $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$  συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια  $x \in \mathbb{R}$ . Σωστό ή Λάθος;
- (iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (iv) Δίνεται μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε  $x \in (3, 8)$  και αποκλίνει για  $x = 8$ . Ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Είναι **Σωστό** γιατί από το Θεώρημα Παραγωγίσης Δυναμοσειρών η παράγωγος μιας δυναμοσειράς σε ένα ανοικτό διάστημα  $I$  είναι επίσης δυναμοσειρά στο  $I$  και επομένως παραγωγίζεται ξανά.

(ii) Είναι **Σωστό** γιατί τα μερικά αθροίσματα των δύο δυναμοσειρών διαφέρουν κατά ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, συγκεκριμένα διαφέρουν κατά  $\sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$ . Επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  συγκλίνει στον αριθμό  $s_x$  τότε η σειρά  $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$  συγκλίνει στον αριθμό  $s_x - \sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$ . Ισχύει και το αντίστροφο: για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αν η σειρά  $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$  συγκλίνει στον αριθμό  $t_x$  τότε η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  συγκλίνει στον αριθμό  $t_x + \sum_{n=0}^{1338} a_n \cdot x^n$ .

Επομένως οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τα ίδια  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) Όχι απαραίτητα. Ας πάρουμε τις δυναμοσειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  και  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ . Η πρώτη συγκλίνει ακριβώς για κάθε  $x \in (-1, 1)$  ενώ η δεύτερη ακριβώς για κάθε  $x \in [-1, 1)$ . Άρα οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης  $r = 1$  αλλά για  $x = -1$  η μία συγκλίνει ενώ η άλλη όχι.

(iv) Το κέντρο της δυναμοσειράς είναι ο αριθμός  $\frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$  και η ακτίνα σύγκλισης ο αριθμός  $r = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$ .

Εξήγηση: μια δυναμοσειρά είτε (α) θα συγκλίνει ακριβώς για ένα  $x$  (το κέντρο της δυναμοσειράς), είτε (β) θα συγκλίνει για τα  $x$  σε ένα διάστημα της μορφής  $(c-r, c+r)$  και θα αποκλίνει για τα  $x \notin [c-r, c+r]$  ενώ για τα  $x = c-r, c+r$  μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, είτε (γ) θα συγκλίνει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$ .

Από τα δεδομένα μας δεν βρισκόμαστε στις περιπτώσεις (α) και (γ). Επομένως είμαστε στη (β). Τότε το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το μέσο του μεγαλύτερου διαστήματος  $I$  στο εσωτερικό του οποίου έχουμε σύγκλιση ενώ η ακτίνα σύγκλισης είναι το μισό του μήκους του. Από τα δεδομένα μας το προηγούμενο  $I$  είναι το  $(3, 8)$ .

**Άσκηση 147** (Αναγνώριση δυναμοσειράς). Βρείτε το κέντρο  $c$  και τους συντελεστές  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Στην πρώτη δυναμοσειρά έχουμε  $a_n = 3^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και  $c = 0$ .

Στη δεύτερη:  $a_n = \frac{1}{n!}$  και  $c = 1$ .

Σχετικά με την τρίτη δυναμοσειρά πρέπει να φέρουμε τους όρους μέσα στο άθροισμα στη μορφή  $a_n \cdot (x-c)^n$ . Υπολογίζουμε

$$2^{-n} \cdot (7x-1)^n = 2^{-n} \cdot 7^n \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n = \frac{7^n}{2^n} \cdot \left(x - \frac{1}{7}\right)^n.$$

Άρα  $a_n = \frac{7^n}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και  $c = \frac{1}{7}$ .

Τέλος στην τέταρτη δυναμοσειρά υπολογίζουμε

$$\frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n = \frac{1}{n+1} \cdot 5^n \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right)^n = \frac{5^n}{n+1} \cdot (x - (-3/5))^n.$$

Άρα  $a_n = \frac{5^n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και  $c = -\frac{3}{5}$ .

**Άσκηση 148** (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης).

(i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 147 βρείτε το σύνολων όλων των  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

(ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου. Σχετικά με την πρώτη δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$  θεωρούμε  $x \neq 0$ . Τότε έχουμε

$$\left| \frac{3^{n+1} \cdot x^{n+1}}{3^n \cdot x^n} \right| = 3 \cdot |x|$$

Αν  $3 \cdot |x| < 1$ , ισοδύναμα  $|x| < 1/3$  ή αλλιώς  $x \in (-1/3, 1/3)$  τότε η σειρά συγκλίνει. Αν  $3 \cdot |x| > 1$ , ισοδύναμα  $x \notin [-1/3, 1/3]$  η σειρά αποκλίνει. Αν  $x = 1/3$  τότε  $3^n \cdot x^n = 1 \not\rightarrow 0$  άρα η σειρά αποκλίνει. Αν  $x = -1/3$  τότε  $3^n \cdot x^n = (-1)^n \not\rightarrow 0$  άρα η σειρά αποκλίνει επίσης.

Επομένως η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n$  συγκλίνει ακριβώς για  $x \in (-1/3, 1/3)$ .

(Πιο πάνω υποθέσαμε ότι  $x \neq 0 =$  το κέντρο της δυναμοσειράς αλλά όπως έχουμε πει η δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για  $x =$  κέντρο.)

Περνάμε στη δεύτερη δυναμοσειρά:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  έχουμε

$$\left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-1)^n} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x-1| \rightarrow 0 < 1.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Προχωράμε στην τρίτη δυναμοσειρά:  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $7x-1 \neq 0$ , ισοδύναμα  $x \neq 1/7$  (που είναι το κέντρο της δυναμοσειράς) έχουμε

$$\left| \frac{2^{-(n+1)} \cdot (7x-1)^{n+1}}{2^{-n} \cdot (7x-1)^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |7x-1|.$$

Προφανώς

$$\frac{1}{2} \cdot |7x-1| < 1 \iff |7x-1| < 2 \iff 7x \in (1-2, 1+2) \iff 7x \in (-1, 3) \iff x \in (-1/7, 3/7).$$

Άρα για  $x \in (1/7, 3/7)$  η σειρά συγκλίνει ενώ για τα  $x$  με  $\frac{1}{2} \cdot |7x-1| > 1$ , ισοδύναμα  $x \notin [-1/7, 3/7]$  η σειρά αποκλίνει. Εξετάζουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις.

Για  $x = 3/7$  έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

και άρα η σειρά αποκλίνει.

Για  $x = -1/7$  έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

που επίσης αποκλίνει. Ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι  $(-1)^n \not\rightarrow 0$ .

Επομένως η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot x^n$  συγκλίνει ακριβώς για  $x \in (-1/7, 3/7)$ .

**Σχόλιο:** Για να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου δεν χρειάζεται να φέρουμε τη δυναμοσειρά στη μορφή  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ . Δηλαδή δεν απαιτείται να έχουμε λύσει πρώτα την Άσκηση 147. Βοηθάει όμως να αναγνωρίσουμε το κέντρο της δυναμοσειράς.

Τέλος θεωρούμε την τέταρτη δυναμοσειρά:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$ . Έστω  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq -3/5$  (το κέντρο της δυναμοσειράς). Τότε

$$\left| \frac{(5x+3)^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(5x+3)^n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \cdot |5x+3| \rightarrow 1 \cdot |5x+3| = |5x+3|.$$

Υπολογίζουμε

$$|5x+3| < 1 \iff 5x \in (-3-1, -3+1) \iff 5x \in (-4, -2) \iff x \in (-4/5, -2/5).$$

Οπότε για  $x \in (-4/5, -2/5)$  η σειρά συγκλίνει ενώ για  $x \notin [-4/5, -2/5]$  αποκλίνει. Για  $x = -2/5$  έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

που αποκλίνει (αρμονική σειρά). Ενώ για  $x = -4/5$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+3)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

που συγκλίνει από το Κριτήριο Leibniz. Επομένως η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n$  συγκλίνει ακριβώς για  $x \in [-4/5, -2/5)$ .

(ii) Στην πρώτη δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$  έχουμε για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$\left| \frac{\sqrt{n+1} \cdot x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n} \cdot x^n} \right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| \rightarrow \sqrt{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot |x|.$$

Έχουμε  $1/2 \cdot |x| < 1 \iff |x| < 2 \iff x \in (-2, 2)$ . Επομένως η σειρά συγκλίνει για κάθε  $x \in (-2, 2)$  και αποκλίνει για κάθε  $x \notin [-2, 2]$ . Για  $x = 2$  έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$$

και η σειρά αποκλίνει γιατί  $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ . Για  $x = -2$  έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$$

που πάλι αποκλίνει γιατί  $(-1)^n \cdot \sqrt{n} \not\rightarrow 0$ . (Αν συνέκλινε στο 0 τότε και η απόλυτη τιμή της ακολουθίας θα συνέκλινε στο 0 που είναι άτοπο.)

Επομένως η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n$  συγκλίνει ακριβώς για  $x \in (-2, 2)$ .

Περνάμε στην επόμενη δυναμοσειρά:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow |x| \cdot \frac{e}{e} = |x|$$

Οπότε για  $|x| < 1$  η σειρά συγκλίνει ενώ για  $|x| > 1$  αποκλίνει. Για  $|x| = 1$  έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot |x|^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \neq 0.$$

Ειδικότερα η ακολουθία που βρίσκεται μέσα στη σειρά δεν συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά αποκλίνει. Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$  συγκλίνει ακριβώς για  $x \in (-1, 1)$ .

Στην επόμενη δυναμοσειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$  έχουμε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $x \neq 0$ ,

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{n^n \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \geq |x| \cdot (n+1) \rightarrow \infty.$$

Επομένως η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για  $x = 0$ .

Τέλος θεωρούμε τη δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$ . Έστω  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , τότε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+5}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+5}}{x^n} \right| = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{(n+1)^2+5}} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n^2+5}{n^2+2n+6}} \rightarrow |x| \cdot \sqrt{1} = |x|.$$

Επομένως αν  $|x| < 1$  η σειρά συγκλίνει και αν  $|x| > 1$  η σειρά αποκλίνει.

Για  $x = 1$  έχουμε

$$\frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}.$$

Εφαρμόζουμε το Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης με  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+5}}$  και  $b_n = \frac{1}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Έχουμε

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2+5}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+5}} \rightarrow 1 > 0.$$

Επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κριτηρίου, που λέει ότι είτε και οι δύο σειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν. Η  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  όμως αποκλίνει (αρμονική σειρά)

επομένως και η  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  αποκλίνει.

Για  $x = -1$  έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}}.$$

Η ακολουθία  $(\sqrt{n^2+5})_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η ακολουθία  $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από το Κριτήριο του Leibniz η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. (Δεν κάνει διαφορά που τα αθροίσματα ξεκινάνε από το 0.) Καταλήγουμε ότι η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$  συγκλίνει ακριβώς για  $x \in [-1, 1)$ .

**Άσκηση 149** (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα  $I$ :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \quad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$

$$f_3(x) = \frac{x}{2+5x} \quad x \neq -\frac{2}{5}, \quad f_4(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω  $x \neq 0$ . Εκφράστε την παράσταση  $x \cdot \sin(1/x)$  σε μορφή σειράς.

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Σχετικά με την  $f_1$  η ιδέα είναι να πάρουμε τη δυναμοσειρά της συνάρτησης  $x \mapsto 1/(1-x)$  και να αντικαταστήσουμε το  $x$  με το  $-x$ . Για  $x \in (-1, 1)$  έχουμε επίσης  $-x \in (-1, 1)$ , επομένως

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n.$$

Άρα  $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$  για  $x \in (-1, 1)$ .

Σχετικά με την  $f_2$  παρατηρούμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}.$$

Αν έχουμε  $|x/3| < 1$ , ισοδύναμα  $|x| < 3$  τότε  $\frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ . Καταλήγουμε

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n \quad x \in (-3, 3).$$

Στη συνάρτηση  $f_3$  προχωρούμε ανάλογα. Πρώτα παρατηρούμε ότι  $2+5x = 2 \cdot (1 - (-5/2)x)$ , άρα θέλουμε να έχουμε  $|-(5/2)x| = |(5/2)x| < 1$ , ισοδύναμα  $-1 < 5/2 \cdot x < 1$  ή αλλιώς  $-2/5 < x < 2/5$ . Επομένως

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{(1 - (-5/2) \cdot x)} = \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{2} \cdot x\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{2^n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5^n}{2^{n+1}} \cdot x^{n+1} \quad x \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

Σχετικά με τη συνάρτηση  $f_4$  παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο και αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $x^2$ . Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το  $x$ ,

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (x^2)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{4n+3} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Όπως και προηγουμένως με τη συνάρτηση  $f_4$  παίρνουμε τον τύπο για το ημίτονο (που ισχύει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$ ) και αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $1/x$ , όπου  $x \neq 0$ . Έπειτα πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με το  $x$ ,

$$x \cdot \sin(1/x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{x^{2n}} \quad x \neq 0.$$

**Σχόλιο.** Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα δεν είναι δυναμοσειρά ως προς  $x$  γιατί οι δυνάμεις του  $x$  έχουν αρνητικό εκθέτη. Αυτού του είδους οι σειρές είναι γνωστές ως **σειρές Laurent** και χρησιμοποιούνται εκτενώς στη Μιγαδική Ανάλυση.

**Άσκηση 150** (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και παραγωγή). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε δυναμοσειρά σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1, & g_2(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \neq 1, \\ g_3(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad x \in \mathbb{R}, & g_4(x) &= \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

**Λύση - υποδείξεις.**

Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1 \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad x \neq 1.$$

Επομένως

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' \quad x \neq -1 \quad \text{και} \quad g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'' \quad x \neq 1.$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 149 έχουμε  $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$  για  $|x| < 1$ . Από το Θεώρημα

Παραγώγισης Δυναμοσειρών

$$g_1(x) = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$$

για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Όμοια βρίσκουμε

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . Άρα

$$g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^{n-2}$$

για κάθε  $x \in (-1, 1)$ .

Σχετικά με την  $g_3$  παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \text{και άρα} \quad g_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Παίρνουμε τον τύπο της δυναμοσειράς για την  $1/(1+x)$  και αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $x^2$ . Παρατηρούμε ότι  $|x| < 1 \iff |x^2| < 1$ . Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} g_3(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n\right)' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots)' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots + (-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} + \dots) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2n \cdot x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{2n-1} \end{aligned}$$

για κάθε  $x \in (-1, 1)$ .

Τέλος σχετικά με τη συνάρτηση  $g_4$  χρησιμοποιούμε τον δοσμένο τύπο για το ημίτονο  $\sin$  και το Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών. Αφού η συνάρτηση ημίτονο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά σε όλο το  $\mathbb{R}$  ισχύει το ίδιο και για τη συνάρτηση συνημίτονο.

Άρα

$$\begin{aligned}\cos(x) &= (\sin(x))' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \right)' \\&= \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \dots \right)' \\&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**Άσκηση 151.** Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό.

1 Δίνεται η δυναμοσειρά  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Θέλουμε να βρούμε την παράγωγό  
2 της.

3 Για ευκολία γράφουμε τη δυναμοσειρά αναλυτικά ως άπειρο άθροισμα

$$4 \quad f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \dots$$

5 Έπειτα παραγωγίζουμε όρο προς όρο (Θεώρημα Παραγωγίσις Δυναμοσειρών):

$$6 \quad f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

$$7 \quad (9) \quad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

8 Από την άλλη μπορούμε να παραγωγίσουμε κατευθείαν σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνεται  
9 στο Θεώρημα Παραγωγίσις Δυναμοσειρών, προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από  $n = 1$ :

$$10 \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$$

$$11 \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$$12 \quad (10) \quad = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

13 Από τις (9) και (10) παίρνουμε **δύο διαφορετικές εκφράσεις** για την παράγωγο  $f'(x)$ . (!)

14 Αυτές οι εκφράσεις είναι όντως διαφορετικές γιατί για  $x = 0$  η (9) δίνει την τιμή 1 ενώ η (10)  
15 την τιμή 0.

16 Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι (9) και (10) διαφέρουν αφαιρώντας την δεύτερη από την  
17 πρώτη και βλέποντας ότι η διάφορά τους είναι ίση με 1.

**Λύση - υποδείξεις.**

Το λάθος βρίσκεται στις γραμμές 8 και 9 του συλλογισμού:

$$\text{“ προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από } n = 1: f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} \text{ ” .}$$

**Εξήγηση.** Ο κανόνας που λέει να ξεκινάμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από  $n = 1$  ισχύει όταν η δυναμοσειρά δίνεται στη μορφή  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (όταν το κέντρο είναι ίσο με 0). Αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί η παράγωγος του  $a_0 \cdot x^0 = a_0$  είναι ίση με 0 και επομένως μπορεί να παραληφθεί από το άθροισμα.

Αν η δυναμοσειρά όμως δίνεται σε διαφορετική μορφή τότε μπορεί να μην γίνεται να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από  $n = 1$ . Στη δοσμένη δυναμοσειρά  $f$  οι εκθέτες του  $x$  είναι ίσοι με  $2n + 1$  και όχι με  $n$ , δηλαδή η δυναμοσειρά είναι της μορφής  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ , όπου  $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ . Αυτό σημαίνει ότι ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι  $a_0 \cdot x$ , η παράγωγος του οποίου είναι  $a_0 = 1 \neq 0$ . Άρα αν στην παράγωγο ξεκινήσουμε το άθροισμα από  $n = 1$  τότε παραλείπουμε τον όρο  $a_0 = 1$  που δεν είναι σωστό. Η σωστή έκφραση για την παράγωγο είναι αυτή που δίνεται από την (9). Δηλαδή

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

**Συμπέρασμα:**

Όταν είναι να παραγωγίσουμε δυναμοσειρά που **δεν είναι** στη μορφή  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ , **είναι καλύτερα** να γράψουμε πρώτα τη σειρά αναλυτικά και μετά να παραγωγίσουμε όρο προς όρο.

**Σχόλια.** 1) Το ίδιο πρέπει να προσέξουμε όταν η δυναμοσειρά που δίνεται ξεκινά από  $n = 1$  (ή γενικότερα από  $n = n_0$ ). Μπορεί πάλι ο πρώτος της όρος να μην έχει μηδενική παράγωγο και επομένως η σειρά της παραγώγου θα ξεκινά πάλι από  $n = 1$  (αντίστοιχα πάλι από  $n = n_0$ ).

2) Πώς θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα όπου ξεκινάμε από  $n = 1$  στην παράγωγο της πιο πάνω δυναμοσειράς  $f$ ; Πρέπει να φέρουμε την  $f$  στη μορφή  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  για κατάλληλα επιλεγμένα  $b_n$  και μετά όντως έχουμε  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$ . Αυτή όμως η μέθοδος είναι αρκετά δύσκολη και καλό είναι να αποφεύγεται.

3) Όλες οι άλλες γραμμές στον προηγούμενο συλλογισμό είναι σωστές. Ειδικότερα δεν υπάρχει πρόβλημα να γράφουμε για ευκολία μια δυναμοσειρά ως άπειρο άθροισμα όπως κάνουμε π.χ. στη γραμμή 3.

Ούτε υπάρχει πρόβλημα να αφαιρέσουμε το ένα άπειρο άθροισμα από το άλλο όπως κάνουμε στις γραμμές 14-15. **Πρέπει όμως οι σειρές να συγκλίνουν.** Αν δεν συνέκλιναν αυτό θα ήταν όντως πρόβλημα αλλά στην προκειμένη περίπτωση οι δυναμοσειρές έχουν άπειρη ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή συγκλίνουν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

4) Δεν σημαίνει πως όποτε οι δυνάμεις του  $x$  δεν είναι της μορφής  $x^n$  θα έχουμε το ίδιο φαινόμενο. Για παράδειγμα αν πάρουμε τη σειρά

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

και παραγωγίσουμε τους όρους έναν προς έναν παίρνουμε ως αποτέλεσμα

$$g(x)' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot 2nx^{2n-1}}{(2n)!} + \dots = -x + \frac{x^3}{3!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1} - \dots$$

που είναι το ίδιο με το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot x^{2n-1}.$$

Με άλλα λόγια σε αυτό το παράδειγμα μπορούμε όντως να ξεκινήσουμε τη δυναμοσειρά της παραγώγου από  $n = 1$  παραγωγίζοντας όρο προς όρο. Ο λόγος που μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι επειδή η παράγωγος του πρώτου όρου του αθροίσματος  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$  είναι 0. Αυτό όμως έτυχε στη συγκεκριμένη περίπτωση.

**Άσκηση 152** (Δυναμοσειρά Εκθετικής συνάρτησης). Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(ii) Βρείτε την παράγωγο  $f'$ . Τι παρατηρείτε;

(iii) Δείξτε ότι  $f(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Έστω  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \rightarrow 0 < 1.$$

Από το Κριτήριο του Λόγου η σειρά συγκλίνει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

(ii) Από το Θεώρημα Παραγωγίσης Δυναμοσειρών έχουμε

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι  $f' = f$ .

(iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Έχουμε

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Επομένως η  $g$  είναι σταθερή συνάρτηση. (Θεώρημα Μέσης Τιμής.)

Άρα υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  με  $g(x) = c$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Για να υπολογίσουμε τη σταθερά  $c$  θέτουμε  $x = 0$  και έχουμε

$$f(0) = \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1.$$

Είναι γνωστό ότι  $e^0 = 1$ . Άρα  $c = g(0) = 1$ . Επομένως  $\frac{f(x)}{e^x} = g(x) = 1$  και  $f(x) = e^x$  για  $x \in \mathbb{R}$ .

**Άσκηση 153** (Παράγωγος δυναμοσειράς τάξης  $m$ ). Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $m \geq 1$

κάθε δυναμοσειρά  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$  που συγκλίνει για κάθε  $x$  σε ένα ανοικτό διάστημα  $I$  έχει παράγωγο  $m$ -τάξης στο  $I$ , η οποία δίνεται από του τύπους

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \cdots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-m} \quad x \in I.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ισότητα των δύο δυναμοσειρών

$$\sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \dots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-m}$$

προκύπτει εύκολα αντικαθιστώντας  $k = n - m - 1$ , το κάτω όριο από  $k = 0$  γίνεται  $n = m + 1$ . Επομένως δείχνουμε μόνο την ισότητα με την πρώτη δυναμοσειρά.

Αυτό γίνεται με επαγωγή στο  $m$ . Για  $m = 1$  το ζητούμενο είναι σαφές από το Θεώρημα Παραγωγίσης Δυναμοσειρών:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \cdot a_{1+k} \cdot (x-c)^k.$$

Θεωρούμε ότι ισχύει το ζητούμενο για κάποιο  $m \geq 1$  και το δείχνουμε με το  $m+1$ .

Έστω  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ,  $x \in I$ , όπου  $I$  ανοικτό διάστημα. Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= \left( f^{(m)} \right)'(x) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \dots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k \right)' \quad (\text{Επαγωγική Υπόθεση}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \dots \cdot (1+k) \cdot k \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^{k-1} \\ &\quad (\text{Θεώρημα Παραγωγίσης Δυναμοσειρών}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k+1) \cdot (m-1+k+1) \cdot \dots \cdot (1+k+1) \cdot (k+1) \cdot a_{m+k+1} \cdot (x-c)^k \\ &\quad (\text{αντικαθιστούμε το } k \text{ με το } k+1, \text{ το κάτω όριο ξεκινά από το } 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((m+1)+k) \cdot (m+k) \cdot \dots \cdot (2+k) \cdot (1+k) \cdot a_{(m+1)+k} \cdot (x-c)^k. \end{aligned}$$

**Άσκηση 154** (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και ολοκλήρωση). Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με  $|x| < 1$  έχουμε

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n.$$

Από το Θεώρημα Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών προκύπτει

$$\ln(1+x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n \cdot x^n dx \right) + c = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + c$$

για κάποιο  $c \in \mathbb{R}$ . Για  $x = 0$  έχουμε

$$0 = \ln(1+0) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} \right) + c = 0 + c = c.$$

Άρα για κάθε  $|x| < 1$ , ισχύει

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε αντικαταστήσει το  $n$  με το  $n-1$ .

**Άσκηση 155** (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και υπόλοιπο Taylor). Με χρήση του υπολοίπου Taylor αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης καθώς και τον τύπο των πολυωνύμων Taylor της συνάρτησης ημίτονο (βλ. Άσκηση ??):

$$P_{2n+1}(x) = \left( \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right).$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Έστω  $x \in \mathbb{R}$  και  $n \in \mathbb{N}$ . Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει  $\xi$  ανάμεσα στο 0 και στο  $x$  με

$$\sin x = P_{2n+1}(x) + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}.$$

Έχουμε

$$\left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Το τελευταίο όριο το βρήκαμε με το Κριτήριο του Λόγου:

$$\frac{x^{2(n+1)+2}}{(2(n+1)+2)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1.$$

Παίρνοντας όριο  $n \rightarrow \infty$  στην πιο πάνω ισότητα με το  $\sin x$  έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1}(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \\ \Rightarrow \sin x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right) + 0 \\ \Rightarrow \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο για τα πολυώνυμα Taylor της συνάρτησης ημίτονο που αναφέρεται στην εκφώνηση.

**Άσκηση 156** (Εύρεση πολυωνύμων Taylor). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Σε αντίθεση με την Άσκηση 155 όπου υπολογίσαμε τα πολυώνυμα Taylor στο 0 με βάση τις παραγώγους στο 0, τώρα θα αναπτύξουμε τις συναρτήσεις σε δυναμοσειρές με κέντρο το 0 με βάση τα γνωστά αναπτύγματα. Όπως έχουμε πει **τα πολυώνυμα Taylor στο 0 είναι τα μερικά αθροίσματα των δυναμοσειρών.**

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο Taylor  $P_n$  στο 0 είναι το μερικό άθροισμα μέχρι τη  $n$ -οστή δύναμη του  $x$ . Άρα πρέπει να πάρουμε το μερικό άθροισμα μέχρι το  $n-1$ . Επομένως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^{k+1} = x - \frac{x^2}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot x^n.$$

Για την  $g$ , χρησιμοποιούμε τα γνωστά αναπτύγματα των  $e^x$  και  $\cos x$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \cdot x^{2n} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι το άθροισμα των συγκλινουσών σειρών δύο ακολουθιών είναι η σειρά του αθροίσματος των δύο ακολουθιών.

Αν συμβολίσουμε με  $Q_m$  τα πολυώνυμα Taylor στο 0 της συνάρτησης  $g$ , τότε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$Q_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k!} + \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) \cdot x^{2k}.$$

Για το  $Q_{2n+1}(x)$  παρατηρούμε ότι στο ανάπτυγμα της  $g$  δεν υπάρχουν δυνάμεις του  $x$  με περιττό εκθέτη ή αλλιώς ο συντελεστής των δυνάμεων του  $x$  με περιττό εκθέτη είναι 0. Επομένως  $Q_{2n+1}(x) = Q_{2n}(x)$ , για κάθε  $n, x$ .

### Άσκηση 157.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό  $n$  για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό  $n$  με την πιο πάνω ιδιότητα.

### Λύση - υποδείξεις.

(i) Γνωρίζουμε ότι  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως το πολυώνυμο Taylor  $P_n$  της  $e^x$  στο 0 είναι το

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Έστω  $n \in \mathbb{N}$ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για  $x = 1$ . Τότε υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  έτσι ώστε

$$e^1 = P_n(1) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow e = P_n(1) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

όπου  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Προφανώς

$$P_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Συνεπώς

$$(11) \quad e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}.$$

Επειδή η  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και  $\xi < 1$  έχουμε

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ειδικότερα από την (11) έχουμε

$$(12) \quad e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε  $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$ . Ισοδύναμα  $(n+1)! > 30000$ . Υπολογίζουμε

$$5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 720 \cdot 7 = 5040, \quad 8! = 5040 \cdot 8 = 40320 > 30000.$$

Επομένως αρκεί να έχουμε  $n+1 = 8$  δηλαδή  $n = 7$ .

**Προσοχή.** Θέτοντας  $n = 6$  στην (12) βλέπουμε ότι  $e - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040}$ . Η τελευταία ανισότητα δεν μπορεί να αποκλείσει το ενδεχόμενο η προσέγγιση του  $\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!}$  στο  $e$  να είναι πολύ μικρότερη του  $3 \cdot 5040^{-1}$ , ίσως και μικρότερη του  $10^{-4}$ . Επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ακόμα ότι το  $n = 7$  είναι ο ελάχιστος φυσικός  $n$  με  $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}$ . Αυτό ουσιαστικά είναι το ζητούμενο του επόμενου ερωτήματος.

(ii) Από την (11) και το γεγονός ότι η  $e^x$  είναι αύξουσα συνάρτηση έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} > \frac{e^0}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Για  $n = 6$  έχουμε

$$e - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} > \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}.$$

Αλλά  $5040 < 10000 = 10^4$ , άρα  $e - \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} > \frac{1}{5040} > 10^{-4}$ .

Επομένως ο  $n = 7$  είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με  $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}$ .

**Άσκηση 158.** Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος Taylor ότι

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### Λύση - υποδείξεις.

Αρχικά δείχνουμε μια ανισότητα με βάση το  $\cos x$  και το πολυώνυμο Taylor  $P_5$  της  $\cos x$  στο 0 - έπειτα αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $2x$ . Το 5 υπαγορεύεται από την εκφώνηση όπου το σφάλμα στην προσέγγιση είναι  $64x^6/6!$ , με άλλα λόγια **το υπόλοιπο Taylor πρέπει να έχει τάξη 6**. Αυτό συμβαίνει όταν το πολυώνυμο Taylor είναι το  $P_5$ .

Έχουμε  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Για να βρούμε το πολυώνυμο Taylor  $P_5$  στο 0 παίρνουμε τις δυνάμεις όπου ο εκθέτης φτάνει το πολύ μέχρι 5, δηλαδή

$$P_5(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (2x)^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

(Δεν πειράζει που ο συντελεστής του  $x^5$  είναι 0.)

Θεωρούμε  $x \in \mathbb{R}$ . Από το Θεώρημα Taylor υπάρχει  $\xi$  ανάμεσα στο 0 και στο  $x$  με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 = \frac{\cos^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6$$

όπου  $R_5(x) = \cos(x) - P_5(x)$ . Έχουμε  $|\cos^{(6)}(\xi)| \leq 1$  (οι παράγωγοι του συνημιτόνου κάθε τάξης είναι της μορφής  $\pm \sin$  ή  $\pm \cos$ ), άρα

$$\begin{aligned} |\cos x - P_5(x)| &= |R_5(x)| \leq \frac{1}{6!} \cdot |x^6| \\ \Rightarrow \left| \cos x - \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \right| &\leq \frac{x^6}{6!}. \end{aligned}$$

Το πιο πάνω ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $x$  με το  $2x$  και παίρνουμε

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{(2x)^6}{6!}.$$

Δηλαδή

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}.$$

**Σχόλιο:** Επειδή ο συντελεστής του  $x^5$  στο  $P_5(x)$  είναι 0 έχουμε ότι  $P_5(x) = P_4(x)$ . Άρα το  $|\cos x - P_5(x)|$  παραμένει το ίδιο με το  $|\cos x - P_4(x)| = |R_4(x)|$ . Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Taylor παίρνοντας το υπόλοιπο  $R_4$  αντί του  $R_5$ . Όπως με πριν καταλήγουμε στο  $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$ . Τέλος αντικαθιστώντας το  $x$  με το  $2x$  παίρνουμε

$$\left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| = |\cos(2x) - P_4(2x)| = |R_4(2x)| \leq \frac{|2x|^5}{5!} = \frac{32|x|^5}{5!}.$$

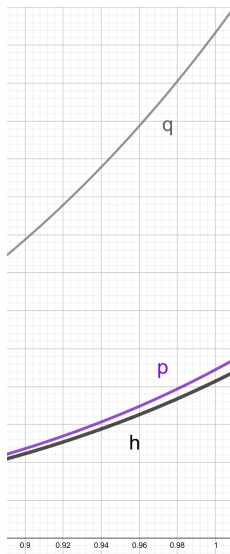
Με άλλα λόγια η προσέγγιση με σφάλμα το πολύ  $\frac{32|x|^5}{5!}$  είναι επίσης σωστή και προκύπτει από το Θεώρημα Taylor. Όμως η προσέγγιση της εκφώνησης, δηλαδή με σφάλμα το πολύ  $\frac{64|x|^6}{6!}$ , είναι ακριβέστερη όταν  $0 < |x| < 3$ . Για να δούμε το τελευταίο παρατηρούμε ότι

$$\frac{64|x|^6}{6!} < \frac{32|x|^5}{5!} \iff \frac{2|x|^6}{6} < |x|^5 \iff |x| < 3, \quad \text{όπου } x \neq 0.$$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των  $h(x) = \left| \cos(2x) - \left( 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right|$ ,

$p(x) = \frac{64x^6}{6!}$  και  $q(x) = \frac{32|x|^5}{5!}$  γύρω από το  $x = 0,96$  για να δούμε την τάξη μεγέθους στη

διαφορά των σφαλμάτων:



Όπως βλέπουμε στην περιοχή του  $x = 0,96$  η συνάρτηση  $p$  είναι αρκετά καλύτερη προσέγγιση της  $h$  σε σχέση με την  $q$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Γνωρίζουμε ότι  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ , επομένως το πολυώνυμο Taylor  $P_4$  της συνάρτησης ημίτονο στο 0 είναι το

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Για το  $x = 1$  υπάρχει από το Θεώρημα Taylor ένα  $\xi \in (0, 1)$  με

$$R_4(1) = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot 1^5 = \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!},$$

όπου

$$R_4(1) = \sin 1 - P_4(1) = \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right).$$

Τότε

$$\left| \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!}\right) \right| = |R_4(1)| = \left| \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} \right| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 10^{-2}.$$

**Άσκηση 159** (Εύρεση σειράς MacLaurin και παραγώγων ανώτερης τάξης στο κέντρο).

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad h(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Βρείτε τις παραγώγους  $f^{(6)}(0)$ ,  $g^{(6)}(0)$ ,  $h^{(6)}(0)$  και  $h^{(7)}(0)$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Χρησιμοποιούμε τον τύπο ανάπτυξης σε δυναμοσειρά της συνάρτησης  $e^x$  και έχουμε

$$f(x) = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^n$$

$$g(x) = x \cdot e^{-x} = x \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$$

$$h(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}.$$

Για την εύρεση των παραγώγων έκτης τάξης στο 0 χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  για  $x$  σε κάποιο ανοικτό διάστημα  $I$  κέντρου 0. Πιο απλά:

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \text{ο συντελεστής του } x^n \text{ στο ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0.}$$

Επομένως

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \text{συντελεστής του } x^6 = \frac{(-1)^6}{6!} = \frac{1}{6!}.$$

Άρα  $f^{(6)}(0) = 1$ .

Σχετικά με την τιμή  $g^{(6)}(0)$  πρέπει να προσέξουμε ότι **δεν είναι σωστό** να πάρουμε την τιμή που προκύπτει από το  $\frac{(-1)^n}{n!}$  για  $n = 6$  και να την πολλαπλασιάσουμε με  $6!$ . Αυτό συμβαίνει γιατί για  $n = 6$  στο ανάπτυγμα  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$  θα πάρουμε το συντελεστή του  $x^7$ .

**1ος τρόπος (ο πιο απλός):** Για να βρούμε την τιμή  $g^{(6)}(0)/6!$  παίρνουμε τον **συντελεστή του  $x^6$**  στο ανάπτυγμα της  $g$ . Στο ανάπτυγμα  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$  το  $x^6$  επιτυγχάνεται για  $n = 5$ , οπότε

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = \frac{(-1)^5}{5!} \quad \text{και άρα} \quad g^{(6)}(0) = \frac{(-1)^5}{5!} \cdot 6! = -6.$$

**2ος τρόπος:** Φέρνουμε το ανάπτυγμα  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1}$  στη μορφή  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$  για κάποια  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \dots \\ &= 0 \cdot x^0 + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Επομένως ορίζουμε  $b_0 = 0$  και  $b_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!}$ . Τότε

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \cdot x^0 + \frac{(-1)^0}{0!} \cdot x^1 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{n+1} + \dots \\ &= b_0 \cdot x^0 + b_1 \cdot x^1 + \dots + b_{n+1} \cdot x^{n+1} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = b_6 = \frac{(-1)^5}{5!} \quad \text{και επομένως} \quad g^{(6)}(0) = \frac{(-1)^5}{5!} \cdot 6! = -6.$$

---

Για την τιμή  $h^{(6)}(0)$  παίρνουμε τον συντελεστή του  $x^6$  στο ανάπτυγμα της  $h$  (ακολουθούμε τον πρώτο από τους πιο πάνω τρόπους). Το  $x^6$  επιτυγχάνεται για  $n = 3$  στο ανάπτυγμα  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}$ , άρα

$$\frac{h^{(6)}(0)}{6!} = \frac{(-1)^3}{3!} \quad \text{και άρα} \quad h^{(6)}(0) = \frac{(-1)^3}{3!} \cdot 6! = -4 \cdot 5 \cdot 6 = -120.$$

Τέλος για την τιμή  $h^{(7)}(0)$  παρατηρούμε ότι στο πιο πάνω ανάπτυγμα προκύπτουν μόνο δυνάμεις με άρτιο εκθέτη. Επομένως η δύναμη  $x^7$  δεν εμφανίζεται ή αλλιώς ο συντελεστής του  $x^7$  είναι 0. Συνεπώς

$$\frac{h^{(7)}(0)}{7!} = 0 \quad \text{και} \quad h^{(7)}(0) = 0.$$

## Ολοκληρώματα

**Άσκηση 160** (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση). Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, & I_2 &= \int \frac{1}{x^2-a^2} dx, \\ I_3 &= \int \frac{1}{x^2+a^2} dx, & I_4 &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \\ I_5 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx, \quad (x > \sqrt{2}). \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω  $a > 0$ . Όλες οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις θεωρούνται ότι ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα.

**Υπόδειξη.** Το  $I_5$ , μετά από κατάλληλη αντικατάσταση, ανάγεται στο  $I_4$  με  $a = 1$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Στο  $I_1$  εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = x^2 + 1$ , έτσι που  $du = 2x dx$  και άρα

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2+1)} + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ .

Στο  $I_2$  αναλύουμε το κλάσμα  $1/(x^2 - a^2)$  και μετά από πράξεις βρίσκουμε

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right).$$

Άρα

$$I_2 = \frac{1}{2a} \cdot \left( \int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) = \frac{1}{2a} \cdot (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + c = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ .

Στο  $I_3$  έχουμε

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{1}{((x/a)^2+1) \cdot a^2} dx.$$

Οπότε με την αντικατάσταση  $u = x/a$  παίρνουμε  $du = dx/a$  και

$$I_3 = \int \frac{1}{(u^2+1) \cdot a} du = \frac{1}{a} \cdot \arctan(u) + c = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ .

Στο  $I_4$  εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = x/a$  καθώς και τον τύπο  $\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ :

$$I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2} \cdot |a|} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(u) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$  -υπενθυμίζουμε ότι  $a > 0$  άρα  $dx/|a| = dx/a = du$ .

Τέλος έχουμε

$$I_5 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 \cdot (1-(\sqrt{2}/x)^2)}} dx = \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1-(\sqrt{2}/x)^2}} dx,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται στα  $x > \sqrt{2}$  και συνεπώς  $\sqrt{x^2} = x$ . Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \sqrt{2}/x$ , έτσι που  $du = (-\sqrt{2}/x^2)dx$ . Άρα

$$I_5 = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) du = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arcsin(u) + c = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ .

**Σχόλιο.** Επίσης σωστό είναι ότι

$$I_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos(u) + c = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + c,$$

γιατί  $\arccos'(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ .

Φαίνεται ότι οι δύο απαντήσεις για το  $I_5$  διαφέρουν αρκετά γιατί η μία εκφράζεται με τη βοήθεια του  $\arcsin$  και η άλλη με του  $\arccos$ . Αυτό δεν πρέπει να μας προβληματίζει γιατί ισχύει η ταυτότητα

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2, \quad x \in [-1, 1].$$

Από αυτό προκύπτει ότι οι δύο διαφορετικές απαντήσεις που έχουμε για το  $I_5$  διαφέρουν κατά μία σταθερά, κάτι που είναι εντάξει όταν έχουμε αόριστο ολοκλήρωμα.

**Άσκηση 161.** Με εφαρμογή της αντικατάστασης  $u = \pi - x$  δείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει

$$\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Χρησιμοποιήστε το πιο πάνω για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Θέτουμε  $I = \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx$  και εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \pi - x$ , έτσι που  $du = -dx$ .

Προφανώς  $x = 0 \Rightarrow u = \pi$  και  $x = \pi \Rightarrow u = 0$ .

Με χρήση της ταυτότητας  $\sin(\pi - u) = \sin u$  έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \int_\pi^0 (\pi - u) \cdot f(\sin(\pi - u)) \cdot (-1) du \\ &= \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u) du = \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin u) du - \int_0^\pi u \cdot f(\sin u) du \\ &= \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx - \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx \\ &= \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx - I, \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα απλά αντικαταστήσαμε το σύμβολο  $u$  με το σύμβολο  $x$ . Καταλήγουμε λοιπόν στην ισότητα

$$I = \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx - I,$$

ισοδύναμα

$$2I = \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx, \quad \text{άρα} \quad I = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Για το ολοκλήρωμα  $J$  εφαρμόζουμε τον πιο πάνω τύπο για κατάλληλη επιλογή συνεχούς συνάρτησης  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = x \cdot \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} = x \cdot f(\sin x)$$

όπου  $f(t) = \frac{t}{2-t^2}$ ,  $t \in [0, 1]$ . Επομένως από τον τύπο για το  $I$  έχουμε

$$J = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε αντικατάσταση  $t = \cos x$ : έχουμε  $dt = -\sin x dx$  και  $x = 0 \Rightarrow t = 1$  καθώς και  $x = \pi \Rightarrow t = -1$ . Επομένως

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^{-1} \frac{-1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \arctan t \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \cdot (\pi/4 - (-\pi/4)) \\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

**Άσκηση 162** (Ολοκληρώματα και αναδρομικός τύπος). Θεωρούμε  $x > 0$ . Για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  ορίζουμε

$$I_k = \int_0^x \sin^k t dt,$$

όπου  $\sin^k t$  σημαίνει  $(\sin t)^k$  (ύψωση σε δύναμη). Δείξτε ότι για κάθε  $k \geq 2$  ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$I_k = -\frac{1}{k} \cdot \cos x \cdot \sin^{k-1} x + \frac{k-1}{k} \cdot I_{k-2}.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^x \sin^k t dt = \int_0^x \sin^{k-1} t \cdot \sin t dt \\ &= \sin^{k-1} t \cdot (-\cos t) \Big|_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (\sin^{k-1} t)' \cdot (-\cos t) dt \\ &= -(\sin^{k-1} x \cdot \cos x - \sin^{k-1} 0 \cdot \cos 0) + \int_0^x (k-1) \sin^{k-2} t \cdot (\sin t)' \cdot \cos t dt \\ &= -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot \int_0^x \sin^{k-2} t \cdot \cos^2 t dt \\ &= -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot \int_0^x \sin^{k-2} t \cdot (1 - \sin^2 t) dt \\ &= -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot \left( \int_0^x \sin^{k-2} t dt - \int_0^x \sin^{k-2} t \cdot \sin^2 t dt \right) \\ &= -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot I_{k-2} - (k-1) \cdot I_k. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη σχέση

$$I_k = -\sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \cdot I_{k-2} - (k-1) \cdot I_k$$

απ' όπου λύνοντας ως προς  $I_k$  λαμβάνουμε το ζητούμενο.

**Άσκηση 163** (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx \quad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Το πολυώνυμο  $x^2 + 2x - 3$  έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις  $x = 1$  και  $x = -3$ , επομένως  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ . Αναλύουμε το κλάσμα  $1/(x^2 + 2x - 3)$  σε πιο απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}.$$

Έχουμε  $A(x + 3) + B(x - 1) = Ax + 3A + Bx - B = (A + B)x + 3A - B$ . Προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 3A - B &= 1. \end{aligned}$$

Τότε  $B = -A$  και

$$3A - (-A) = 1 \iff 4A = 1 \iff A = \frac{1}{4}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + 3}.$$

Συνεπώς

$$I = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x + 3} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|x - 1| - \frac{1}{4} \cdot \ln|x + 3| + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα ο παρονομαστής είναι παραγοντοποιημένος. Απαλείφουμε τον  $x$  από τον αριθμητή με τον εξής απλό τρόπο,

$$\frac{x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{(x + 1)(x - 2)}.$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα,

$$\frac{1}{(x + 1)(x - 2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 2}.$$

Άρα

$$\frac{x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

και συνεπώς

$$J = \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{x - 2} dx + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x + 1} dx = \frac{2}{3} \cdot \ln|x - 2| + \frac{1}{3} \cdot \ln|x + 1| + c.$$

**Άσκηση 164** (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \quad I_2 = \int \frac{1}{3x^2 + 1} dx \quad I_3 = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx.$$

### Λύση - υποδείξεις.

Έχουμε

$$\frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x/2)^2 + 1}.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = x/2$  και έχουμε  $dx = 2du$ . Οπότε

$$I_1 = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot 2 du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + c = \frac{1}{2} \cdot \arctan(x/2) + c.$$

**Σχόλιο.** Στο πιο πάνω ολοκλήρωμα (όπως και σε αρκετά επόμενα) θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον τύπο

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

όπου  $a \neq 0$ .

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$\frac{1}{3x^2 + 1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2 + 1}.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \sqrt{3}x$  και έχουμε  $dx = 1/\sqrt{3}du$ . Οπότε

$$I_2 = \int \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} du = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(\sqrt{3}x) + c.$$

Τέλος στο τρίτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε αρχικά ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου  $x^2 - 4x + 7$  είναι αρνητική, επομένως μπορούμε να το φέρουμε στη μορφή  $(ax-b)^2 + c^2$  ή πιο απλά  $(x-b)^2 + c^2$  γιατί ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι η μονάδα. Έχουμε

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + 3 = (x - 2)^2 + 3.$$

Επομένως

$$I_3 = \int \frac{1}{(x-2)^2 + 3} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \frac{x-2}{\sqrt{3}}$  και έχουμε  $dx = \sqrt{3}du$ . Άρα

$$I_3 = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \sqrt{3} du = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

**Άσκηση 165** (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx \quad J = \int \frac{x+5}{4x^2+4x+10} dx.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Στο πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι το τριώνυμο  $x^2 + 2x + 2$  έχει αρνητική διακρίνουσα και ότι

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

Επομένως

$$I = \int \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = (x+1)^2$  οπότε  $du = 2(x+1)dx$ . Επομένως

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u+1} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u+1| + c = \frac{1}{2} \cdot \ln((x+1)^2 + 1) + c = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) + c.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα βλέπουμε πάλι ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου  $4x^2 + 4x + 10$  είναι αρνητική και πως

$$4x^2 + 4x + 10 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x + 1 + 9 = (2x+1)^2 + 9.$$

Άρα

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x+5}{(2x+1)^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+10}{(2x+1)^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1+9}{(2x+1)^2 + 9} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+1}{(2x+1)^2 + 9} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{9}{(2x+1)^2 + 9} dx. \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε τα πιο πάνω ολοκληρώματα με  $J_1$  και  $J_2$  αντίστοιχα και έχουμε

$$(13) \quad J = \frac{1}{2} \cdot (J_1 + J_2)$$

Υπολογίζουμε το κάθε ένα ολοκλήρωμα ξεχωριστά. Στο  $J_1$  εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = (2x + 1)^2$ , οπότε  $du = 2(2x + 1) \cdot 2dx = 4(2x + 1)dx$ . Επομένως

$$J_1 = \int \frac{2x + 1}{(2x + 1)^2 + 9} dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u + 9} du = \frac{1}{4} \cdot \ln |u + 9| + c_1 = \frac{1}{4} \cdot \ln((2x + 1)^2 + 9) + c_1.$$

Υπολογίζουμε το  $J_2$ ,

$$J_2 = \int \frac{9}{(2x + 1)^2 + 9} = \int \frac{1}{\left(\frac{2x + 1}{3}\right)^2 + 1} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \frac{2x + 1}{3}$  και έχουμε  $du = \frac{2}{3}dx$  ή αλλιώς  $dx = \frac{3}{2}du$ . Άρα

$$J_2 = \int \frac{1}{u^2 + 1} \cdot \frac{3}{2} du = \frac{3}{2} \cdot \arctan(u) + c_2 = \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x + 1}{3}\right) + c_2.$$

Από την (13) προκύπτει

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln((2x + 1)^2 + 9) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2x + 1}{3}\right) + c \\ &= \frac{1}{8} \cdot \ln(4x^2 + 4x + 10) + \frac{3}{4} \cdot \arctan\left(\frac{2x + 1}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

**Άσκηση 166** (Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης). Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x + 3)(x^2 + x + 1)} dx.$$

**Λύση - υποδείξεις.**

Αρχικά αναλύουμε το κλάσμα. Επειδή η διακρίνουσα του πολωνύμου  $x^2 + x + 1$  είναι αρνητική έχουμε

$$\frac{1}{(x + 3)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε  $C = 2/7$ ,  $B = -1/7$  και  $A = 1/7$ . Άρα

$$\frac{1}{(x + 3)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{x - 2}{x^2 + x + 1}.$$

Συμβολίζουμε με  $I$  το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Τότε

$$I = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{x + 3} dx - \frac{1}{7} \cdot \int \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με  $I_1$  και  $I_2$  αντίστοιχα, έτσι που

$$I = \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2.$$

Έχουμε

$$I_1 = \int \frac{1}{x + 3} dx = \ln |x + 3| + c_1.$$

Σχετικά με το  $I_2$  έχουμε

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = (x + 1/2)^2 + 3/4.$$

Άρα

$$I_2 = \int \frac{x - 2}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx = \int \frac{x + 1/2}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx - \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx.$$

Συμβολίζουμε τα τελευταία δύο ολοκληρώματα με  $I_3$  και  $I_4$  αντίστοιχα, έτσι που  $I_2 = I_3 - (5/2) \cdot I_4$ . Για τον υπολογισμό του  $I_3$  εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = (x + 1/2)^2$  οπότε  $du = 2(x + 1/2)dx$ . Άρα

$$I_3 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u + 3/4} du = \frac{1}{2} \cdot \ln |u + 3/4| + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln((x + 1/2)^2 + 3/4) + c_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + c_2.$$

Για το  $I_4$  έχουμε

$$I_4 = \int \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 1/2)\right)^2 + 1} dx.$$

Με αντικατάσταση  $u = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 1/2)$  προκύπτει  $du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$  και άρα

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(u) + c_3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 1/2)\right) + c_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c_3. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε

$$I_2 = I_3 - \frac{5}{2} \cdot I_4 = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 1) - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c_4$$

και

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \cdot I_1 - \frac{1}{7} \cdot I_2 \\ &= \frac{1}{7} \cdot \ln |x + 3| - \frac{1}{14} \cdot \ln(x^2 + x + 1) + \frac{5\sqrt{3}}{21} \cdot \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

**Άσκηση 167** (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα). Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

(i) Να αναγάγετε τα  $I$  και  $J$  σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.

(ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα  $I$  και  $J$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $R(u, v) = \frac{1}{u^2 \cdot v}$ ,  $u, v \neq 0$ , έτσι που

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$R(u, -v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -R(u, v)$$

δηλαδή η  $R$  είναι περιττή ως προς  $v$ . (Προσοχή μην μπερδευτείτε με το ότι η συνάρτηση συνιμίτιο είναι άρτια - αυτό δεν έχει σχέση σε αυτό το σημείο.)

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση  $t = \sin x$ .

Έχουμε  $dt = \cos x dx$  και

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)} dt,$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε ότι  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ . Επομένως έχουμε εκφράσει το  $I$  ως αόριστο ολοκλήρωμα της ρητής συνάρτησης  $f(t) = \frac{1}{t^2 \cdot (1-t^2)}$ ,  $t \neq 0$ .

Στο ολοκλήρωμα  $J$  παίρνουμε  $Q(u, v) = \frac{1}{u^4 \cdot v^2}$ ,  $u, v \neq 0$ , έτσι που

$$J = \int Q(\sin x, \cos x) dx.$$

Παρατηρούμε ότι η  $Q$  είναι άρτια ως προς το ζεύγος  $(u, v)$ , δηλαδή

$$Q(-u, -v) = \frac{1}{(-u)^4 \cdot (-v)^2} = \frac{1}{u^4 \cdot v^2} = Q(u, v).$$

Σύμφωνα με τα γνωστά το ολοκλήρωμα  $\int Q(\sin x, \cos x) dx$  ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης εφαρμόζοντας την αντικατάσταση  $t = \tan x$ .

Έχουμε  $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$  και

$$J = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

άρα θέλουμε να εκφράσουμε την ποσότητα  $1/\sin^4 x$  συναρτήσει του  $t$ . Αφού  $t = \tan x$  έχουμε

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= t^2 \cos^2 x \implies \sin^2 x = t^2(1 - \sin^2 x) \\ \implies \sin^2 x &= t^2 - t^2 \sin^2 x \implies \sin^2 x(1 + t^2) = t^2 \\ \implies \sin^2 x &= \frac{t^2}{1 + t^2} \implies \sin^4 x = \frac{t^4}{(1 + t^2)^2} \\ \implies \frac{1}{\sin^4 x} &= \frac{(1 + t^2)^2}{t^4}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$J = \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^4} dt.$$

(ii) Υπολογίζουμε το  $I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt$  ως συνάρτηση του  $t$  και μετά αντικαθιστούμε  $t = \sin x$ .

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα είναι έκφραση του  $t^2$ , δηλαδή αν θέσουμε  $s = t^2$  τότε το κλάσμα μετατρέπεται σε  $\frac{1}{s(1-s)}$ , το οποίο αναλύεται εύκολα ως εξής:

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}.$$

Άρα

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{1-t^2} dt = -\frac{1}{t} + \int \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Για να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ακόμα μία ανάλυση κλάσματος,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}.$$

Καταλήγουμε

$$I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+t} dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \ln|1-t| + \frac{1}{2} \cdot \ln|1+t| + c.$$

(Το προτελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει με αντικατάσταση  $u = -t$ .) Θέτοντας πίσω  $t = \sin x$  έχουμε

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left( \ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x) - \frac{2}{\sin x} \right) + c.$$

Τέλος υπολογίζουμε το  $J$ . Εδώ δεν χρειάζεται να αναλύσουμε το κλάσμα γιατί ο παρονομαστής αποτελείται μόνο από έναν όρο, το  $t^4$ .

$$J = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4} dt = \int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{2}{t^2} dt + \int 1 dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c.$$

Αφού  $t = \tan x$  προκύπτει

$$J = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3 \tan^3 x} + c.$$

**Άσκηση 168** (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται  $\rho \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι αν  $\rho > 1$  τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho-1},$$

ενώ αν  $\rho \leq 1$  το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

**Λύση - υποδείξεις.**

Υποθέτουμε ότι  $\rho > 1$  και θεωρούμε  $R > 1$ . Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \int_1^R x^{-\rho} dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \Big|_1^R = \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1) = \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right).$$

Επειδή  $\rho > 1$  έχουμε  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\rho-1} = \infty$  και συνεπώς

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{\rho-1}} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\rho-1}}\right) = \frac{1}{\rho-1} \cdot (1-0) = \frac{1}{\rho-1}.$$

Καταλήγουμε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho-1}.$$

Αν  $\rho < 1$  τότε  $1-\rho > 0$  και  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\rho+1} = +\infty$ . Όπως πιο πάνω έχουμε

$$\int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1)$$

για κάθε  $R > 1$  και άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\rho} \cdot (R^{-\rho+1} - 1) = +\infty.$$

Επομένως το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$  δεν ορίζεται για  $\rho < 1$ . (Κάποια συγγράμματα αναφέρουν  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = +\infty$  όταν  $\rho < 1$ .)

Τέλος αν  $\rho = 1$ ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R) = \infty.$$

Συνεπώς πάλι δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ .

**Άσκηση 169** (Γενικευμένα ολοκληρώματα).

(i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση να τα υπολογίσετε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

(ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια  $\rho \in \mathbb{R}$  περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα να το υπολογίσετε.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$  (Άσκηση 168);

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Για κάθε  $r > 0$  έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_r^1 = -1 + \frac{1}{r}$$

$$\int_r^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_r^1 = \ln 1 - \ln r = -\ln r$$

$$\int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_r^1 x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} \Big|_r^1 = 2\sqrt{x} \Big|_r^1 = 2(\sqrt{1} - \sqrt{r}) = 2 - 2\sqrt{r}.$$

Παίρνοντας το όριο όταν το  $r$  τείνει στο 0 από δεξιά έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{r}\right) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} (-\ln r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{r}) = 2.$$

Άρα τα δύο πρώτα ολοκληρώματα  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  και  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  δεν ορίζονται, ενώ το τρίτο ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  ορίζεται και είναι ίσο με 2.

(ii) Από το πιο πάνω ερώτημα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx$  δεν ορίζεται για  $\rho = 1, 2$  ενώ ορίζεται για  $\rho = 1/2$ . Ισχυριζόμαστε ότι το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx$  ορίζεται αν και μόνο αν  $\rho < 1$ .

Παρατηρούμε ότι αυτό λειτουργεί συμπληρωματικά σε σχέση με το ολοκλήρωμα  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ : σύμφωνα με την Άσκηση 168 το ολοκλήρωμα  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$  ορίζεται αν και μόνο  $\rho > 1$ . (Για  $\rho = 1$  δεν ορίζεται κανένα από αυτά τα ολοκληρώματα.)

Για να δείξουμε τον ισχυρισμό μας θεωρούμε  $\rho \in \mathbb{R}$  με  $\rho \neq 1$ . (Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα το  $\int_r^1 \frac{1}{x^\rho} dx$  δεν ορίζεται για  $\rho = 1$ .) Τότε για κάθε  $r > 0$  έχουμε

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\rho} dx = \int_r^1 x^{-\rho} dx = \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \Big|_r^1 = \frac{1}{1-\rho} \cdot (1 - r^{1-\rho}).$$

Γνωρίζουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$  για  $\alpha > 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$  για  $\alpha < 0$ . Επομένως αν  $1 - \rho > 0$ , δηλαδή αν  $\rho < 1$ , ισχύει  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\rho} = 0$  και άρα

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 \frac{1}{x^\rho} dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\rho} \cdot (1 - r^{1-\rho}) = \frac{1}{1-\rho},$$

Επομένως

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{1-\rho}, \quad \rho < 1.$$

Από την άλλη αν  $1 - \rho < 0$ , δηλαδή αν  $\rho > 1$ , ισχύει  $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{1-\rho} = +\infty$  και άρα το  $\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx$  δεν ορίζεται. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

**Άσκηση 170** (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

(ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το όριο  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$  αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  να μην ορίζεται.

**Υπόδειξη.** Θεωρήστε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

(i) Εφόσον ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ορίζονται τα γενικευμένα ολοκληρώματα  $\int_c^{\infty} f(x) dx$ ,  $\int_{-\infty}^c f(x) dx$  και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$$

Τότε υπάρχουν τα όρια  $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \int_{R_1}^c f(x) dx$  και  $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_c^{R_2} f(x) dx$ . Παίρνουμε  $R_2 = R$  και  $R_1 = -R$  (δηλαδή θεωρούμε ότι  $R_1 = -R_2$ ) και έχουμε από πιο πάνω

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^c f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^c f(x) dx + \int_c^R f(x) dx \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \end{aligned}$$

(ii) Για κάθε  $R > 0$  έχουμε

$$\int_{-R}^R \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int_{-R}^R \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big|_{-R}^R = \ln(R^2 + 1) - \ln(R^2 + 1) = 0,$$

άρα υπάρχει το όριο  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{2x}{x^2 + 1} dx$  και είναι ίσο με 0.

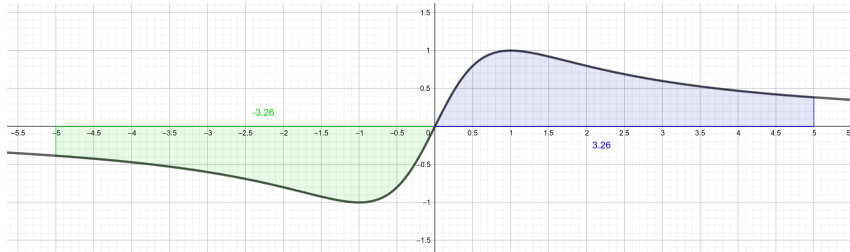
Από την άλλη για κάθε  $c \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$\int_c^R \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) \Big|_c^R = \ln(R^2 + 1) - \ln(c^2 + 1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty.$$

Άρα δεν ορίζεται το  $\int_c^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$  και επομένως ούτε το  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$ .

(Όμοια μπορεί να δείξει κανείς ότι  $\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^c \frac{2x}{x^2+1} dx = -\infty$  και άρα επίσης δεν ορίζεται το  $\int_{-\infty}^c \frac{2x}{x^2+1} dx$ ).

**Σχήμα:**



Πιο πάνω δίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αυτή είναι περιττή συνάρτηση, επομένως τα εμβαδά στην πράσινη και στην μπλε περιοχή είναι ίσα και στο ολοκλήρωμα προσμετρώνται με διαφορετικό πρόσημο. Με άλλα λόγια  $\int_{-R}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx = -\int_0^R \frac{2x}{x^2+1} dx$ , ειδικότερα έχουμε  $\int_{-R}^R \frac{2x}{x^2+1} dx = 0$ .

Από την άλλη το εμβαδόν που καθορίζεται από τον θετικό ημιάξονα  $Ox$  και τη γραφική παράσταση της  $f$  είναι άπειρο και γι' αυτό δεν ορίζεται το  $\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1} dx$ . Παρατηρούμε επίσης ότι το άθροισμα  $\lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \int_{R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx$  οδηγεί στην απροσδιόριστη μορφή  $\infty - \infty$ .

**Άσκηση 171** (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Δείξτε με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Κριτηρίου ότι για κάθε  $\rho > 0$  η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν  $\rho > 1$ .

**Λύση - υποδείξεις.**

Θεωρούμε  $\rho > 0$  και τη συνάρτηση  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x^\rho}$ . Η  $f$  παίρνει θετικές τιμές και είναι συνεχής. Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα: έχουμε  $x^\rho = e^{\rho \cdot \ln x}$ , οι συναρτήσεις  $\exp$  και  $\ln$  είναι γνησίως αύξουσες και  $\rho > 0$ , άρα η  $x \mapsto x^\rho$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx.$$

Από την Άσκηση 168 το προηγούμενο ολοκλήρωμα υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  αν και μόνο αν  $\rho > 1$ .

Επομένως η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho}$  συγκλίνει αν και μόνο αν  $\rho > 1$ .

**Άσκηση 172** (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.

### Λύση - υποδείξεις.

Εφαρμόζουμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο. Στην πρώτη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

Οι συναρτήσεις  $x \mapsto x$  και  $x \mapsto \ln x$  είναι γνησίως αύξουσες και θετικές στο  $[2, \infty)$ , συνεπώς η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και θετική.

Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά  $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$  συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα  $\int_2^{\infty} f(x) dx$ .

Θεωρούμε  $R > 2$ . Τότε

$$\int_2^R f(x) dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln x} dx.$$

Παρατηρούμε ότι  $1/x = (\ln x)'$ . Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \ln x$  και έχουμε  $du = \frac{1}{x} dx$  αλλιώς  $dx = x du$ .

Άρα

$$\int_2^R f(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_2^{\ln R} = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2).$$

Έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(\ln R) = \infty.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Επομένως δεν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_2^{\infty} f(x) dx$  και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

αποκλίνει.

Στη δεύτερη σειρά θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}.$$

Όπως και με την  $f$  η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και θετική. Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά  $\sum_{n=2}^{\infty} g(n)$  συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται το ολοκλήρωμα  $\int_2^{\infty} g(x) dx$ .

Θεωρούμε  $R > 2$ . Τότε

$$\int_2^R g(x) dx = \int_2^R \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx.$$

Εφαρμόζουμε την αντικατάσταση  $u = \ln x$  και έχουμε  $du = \frac{1}{x} dx$  αλλιώς  $dx = x du$ .

Άρα

$$\int_2^R g(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} \Big|_{\ln 2}^{\ln R} = -\frac{1}{\ln R} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Έχουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} = 0.$$

Καταλήγουμε

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R g(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

---

Επομένως ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_2^\infty g(x) \, dx$  και άρα η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} g(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

συγκλίνει.