

Ασκήσεις



28 Οκτωβρίου 2025

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Πραγματικοί Αριθμοί

Άσκηση 1 (De Morgan's laws). Θεωρούμε σύνολα A , B , X . Δείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες συνόλων, που είναι γνωστές και ως **Νόμοι De Morgan**:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Υπόδειξη. Σε κάθε ιδιότητα δείξτε ότι το σύνολο στα αριστερά είναι υποσύνολο του συνόλου στα δεξιά και αντίστροφα.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι:

(i) $2n^2 > 2n + 1$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

(ii) $3^n > n^2$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι για $n = 0, 1$ η (i) **δεν** ισχύει. Από την άλλη η (ii) ισχύει για $n = 0, 1$. Παρ' όλα αυτά στην (ii) ξεκινάμε την επαγωγή από το $n = 2$. Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρησιμοποιήσουμε την (i) που ισχύει για $n \geq 2$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι ο αριθμός $(2n + 1)^2 - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 8 για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι:

$$2 + 5 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

(Όταν $n = 1$ θεωρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι ίσο με 2, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα αποτελείται μόνο από τον πρώτο όρο του.)

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ταυτότητα

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Άσκηση 6. Δείξτε ότι $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορείτε να βρείτε μια γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ιδιότητας;

Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Άσκηση 8. Δείξτε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $m + n \in \mathbb{N}$ και $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Εφαρμόστε επαγωγή στο n ξεχωριστά για τον κάθε ένα από τους πιο πάνω ισχυρισμούς.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι $2^n \geq n + 1$ για κάθε $n \geq 1$ με τους εξής δύο τρόπους:

(i) Με την Αρχή της Επαγωγής.

(ii) Με την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 10. Δείξτε την **αυστηρή** ανισότητα Bernoulli: για κάθε $a > -1$ με $a \neq 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Άσκηση 11 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα).

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$$

(ii) Υπολογίστε τον αριθμό

$$a = 1 + \binom{5}{1} \cdot (-2) + \binom{5}{2} \cdot (-2)^2 + \cdots + \binom{5}{4} \cdot (-2)^4 + (-2)^5.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$1 + \binom{7}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \cdots + \binom{7}{6} \cdot x^6 + x^7 \geq 7x + 1.$$

Υπόδειξη για το (iii). Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 12 (Τρίγωνο του Pascal). Να δείξετε ότι για κάθε θετικούς ακέραιους αριθμούς k, n με $k \leq n$ ισχύει

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Άσκηση 13 (Χρήση του συμβολισμού Σ). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$17 \cdot \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n x^k \right) + x^{n+1} = \sum_{k=1}^{\dots} \dots\dots\dots$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \dots\dots\dots \quad \text{όπου } a, b \neq 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 14. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικούς αριθμούς $0 \leq k \leq n$ ισχύει

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Άσκηση 15. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{ n \in \mathbb{N} : (n-3) \cdot (n+2) \cdot (n+4) > 0 \}$ είναι μη κενό και βρείτε το ελάχιστο στοιχείο του.

Άσκηση 16. Να βρείτε το minimum/maximum των ακόλουθων συνόλων εφόσον αυτά υπάρχουν (με πλήρη αιτιολόγηση):

$$A = \{ x \in \mathbb{N} : 3 < x^2 - 1 \leq 15 \}$$

$$B = (1, 2]$$

$$C = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1 \}$$

$$D = \{ n^2 + 3 : n \in \mathbb{N} \}$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι ένα μη κενό σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ δεν έχει minimum θεωρούμε ένα $x \in X$ και δείχνουμε ότι υπάρχει $y \in X$ που είναι μικρότερο του x .

Άσκηση 17 (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή του Ελαχίστου με τη βοήθεια της Αρχής της Επαγωγής.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum και εφαρμόστε την Αρχή της Επαγωγής παίρνοντας για ιδιότητα P το εξής:

το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P αν για κάθε φυσικό $k \leq n$ έχουμε $k \notin A$.

Συμπεράνετε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ που δεν έχει minimum πρέπει να είναι το κενό σύνολο.

Άσκηση 18 (Απαιτητική). Αποδείξτε την Αρχή της Επαγωγής με τη βοήθεια της Αρχής του Ελαχίστου.

Υπόδειξη. Θεωρήστε μια ιδιότητα P που ικανοποιεί τις υποθέσεις της Αρχής της Επαγωγής και υποθέστε προς άτοπο ότι το σύνολο

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : \text{το } n \text{ δεν έχει την ιδιότητα } P \}$$

είναι μη κενό.

Άσκηση 19. Δείξτε ότι το μέγιστο και το ελάχιστο ενός μη κενού συνόλου A , εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Άσκηση 20. Δείξτε ότι το ελάχιστο κάτω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός μη κενού συνόλου A , εφόσον υπάρχουν, είναι μοναδικά.

Άσκηση 21 (Σύγκριση supremum και maximum). Δίνεται ένα μη κενό σύνολο A . Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν υπάρχει το $\max A$ τότε $\max A = \sup A$.

Δηλαδή το μέγιστο ενός συνόλου είναι και ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου.

(ii) Αν υπάρχει το $\sup A$ και ισχύει $\sup A \in A$ τότε $\sup A = \max A$.

Δηλαδή αν το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου είναι και στοιχείο του συνόλου, τότε είναι μέγιστο.

Ποιες είναι οι αντίστοιχες προτάσεις για τα $\min A$ και $\inf A$;

Άσκηση 22. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.
- (ii) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.
- (iii) Αν A και B είναι μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει $a < b$, τότε $\sup A < \inf B$.
- (iv) Αν $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 23. Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων

$$(0, 1], (0, 1), [0, 1).$$

Άσκηση 24 (Υπολογισμός supremum). Προσδιορίστε το supremum των πιο κάτω συνόλων

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \text{ και } n + m \leq 10 \right\}.$$

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

Άσκηση 25 (Χαρακτηρισμός supremum). Θεωρούμε ένα μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ και ένα $b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A αν και μόνο αν

- (1) το b είναι άνω φράγμα του A και
- (2) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $b - \varepsilon < x$.

Άσκηση 26. (α)(Χαρακτηρισμός infimum) Έστω $A \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $c = \inf A$ αν και μόνο αν

- (1) το c είναι κάτω φράγμα του A και
- (2) για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < c + \varepsilon$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

Υπόδειξη για το (β). Να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Άσκηση 27 (Απαιτητική). Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών και θέτουμε

$$A + B = \{ a + b : a \in A \text{ και } b \in B \}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Άσκηση 28. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ θέτουμε

$$-A = \{ -a : a \in A \}.$$

Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(ii) Αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, τότε το $-B$ είναι κάτω φραγμένο και ισχύει

$$\inf(-B) = -\sup B.$$

Άσκηση 29 (Ισοδύναμη διατύπωση του Αξιώματος Πληρότητας). Δείξτε ότι το Αξίωμα Πληρότητας (κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum) είναι ισοδύναμο με την πρόταση: κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 28.

Άσκηση 30. Να δείξετε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \notin \mathbb{Q}$ και $0 \neq b \in \mathbb{Q}$, τότε ab και $a + b \notin \mathbb{Q}$. Είναι αλήθεια ότι αν $a, b \notin \mathbb{Q}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα ab και $a + b$ δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$;

Άσκηση 31. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός q , τέτοιος ώστε $q^2 = 3$.

Άσκηση 32. Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{6}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ δεν είναι ρητοί.

Άσκηση 33 (Το ακέραιο μέρος). Δείξτε τα εξής:

(i) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του x .

Υπόδειξη. Θεωρήστε το σύνολο $A = \{ k \in \mathbb{N} : k > x \}$.

(ii) Για κάθε $x \geq 0$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{Z}$ με $n \leq x < n + 1$.

(iii) Για κάθε $y < 0$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq y < m + 1$.

(iv) Συμπεράνετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq z < m + 1$.

Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι αυτό το $m \in \mathbb{Z}$ είναι μοναδικό για το z . Αυτό το μοναδικό m ονομάζεται **το ακέραιο μέρος του z** . Για παράδειγμα το ακέραιο μέρος του 3,14 είναι το 3 και το ακέραιο μέρος του $-3,14$ είναι το -4 .

Άσκηση 34 (Πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς). Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως **πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς**:

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.

Δείχνουμε το παραπάνω με τα εξής βήματα. Δίνονται αρχικά $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

(i) Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \quad \text{και} \quad m \leq n \cdot a + 1 < m + 1.$$

(ii) Αν τα m, n είναι όπως στο (i) δείξτε ότι

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Άσκηση 35 (Πυκνότητα αρρητών στους πραγματικούς). Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $a < r < b$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}$ και εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση. Μπορείτε να πάρετε ως δεδομένο ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Άσκηση 36. Δείξτε ότι $\sup \{ x \in \mathbb{R} : x^2 < 2 \} = \sup \{ q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2 \}$, **χωρίς** να χρησιμοποιήσετε τη γνωστή πρόταση ότι το τετράγωνο του πρώτου supremum ισούται με 2.

Ακολουθίες

Άσκηση 37. Επιλέξτε **Σωστό** - **Λάθος** (χωρίς απόδειξη).

	Σωστό	Λάθος
1. Η ακολουθία $a_n = n^3$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
2. Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι και αύξουσα.	Σ	Λ
3. Μια αύξουσα ακολουθία που δεν είναι σταθερή είναι γνησίως αύξουσα.	Σ	Λ
4. Μια ακολουθία είναι φραγμένη ακριβώς όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη.	Σ	Λ
5. Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.	Σ	Λ

Άσκηση 38.

- (i) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που είναι άνω φραγμένη και όχι κάτω φραγμένη (με απόδειξη).
- (ii) Δώστε το παράδειγμα μιας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη (με απόδειξη).
- (iii) Δώστε το παράδειγμα μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που είναι φραγμένη (με απόδειξη).

Άσκηση 39 (Ισοδυναμίες φραγμένης ακολουθίας). Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) υπάρχει $M_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει $|a_n| \leq M_0$,
- (ii) υπάρχει $M_1 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει $|a_n| \leq M_1$,
- (iii) υπάρχει $M_2 > 75847912$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει $|a_n| \leq M_2$.

Υπόδειξη. Δείξτε τις συνεπαγωγές (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Άσκηση 40 (Ισοδυναμίες φραγμένης ακολουθίας). Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{\mathbb{N}}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει $|a_n| \leq M$,
- (ii) υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει $-M_1 \leq a_n \leq M_2$.

Άσκηση 41. Δίνεται ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Διατυπώστε χωρίς απόδειξη την άρνηση της ακόλουθης μαθηματικής πρότασης (δεν χρειάζεται να εξετάσετε αν ισχύει):

υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $b \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in A$ με $x > b$ ή $b \leq a$.

Άσκηση 42. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$; (Χωρίς απόδειξη)

$$\begin{aligned} A &= \{5, 6, 7, \dots, 99, 100\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 400\} \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : (n-3) \cdot (n-8) > 0\} \\ C &= \{n \in \mathbb{N} : (n-3) \cdot (n-8) = 0\} \\ D &= \{n \in \mathbb{N} : \text{o } n \text{ είναι άρτιος}\} \end{aligned}$$

Άσκηση 43 (Απαιτητική).

(i) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη: Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο ακριβώς όταν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $B \subseteq \{k \in \mathbb{N} : k < n_0\}$.

(ii) Συμπεράνετε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ **δεν** περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν έχουμε $n \notin A$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}$.

Σχόλιο: Το (i) της άσκησης αιτιολογεί γιατί ένα σύνολο A που περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται και *συμπεπερασμένο*. Ο όρος προκύπτει από το συνθετικό *συν* (που στα μαθηματικά χρησιμοποιείται κυρίως για να αναφερθεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου) και το επίθετο *πεπερασμένο*.

Επομένως το συν-πεπερασμένο (δηλαδή συμπεπερασμένο σύμφωνα με τους κανόνες της ελληνικής γραμματικής) σύνολο είναι ακριβώς το σύνολο με πεπερασμένο συμπλήρωμα. Από το (i) αυτό είναι το ίδιο με το σύνολο που περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 44. Αποδείξτε ότι το σύνολο A όλων των άρτιων αριθμών δεν περιέχει τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 45 (Κατανόηση σύγκλισης). Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει στον αριθμό 1. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 0,99 < a_n < 1,01\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 0,999\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 1,1\}$$

$$D = \{n \in \mathbb{N} : 0,9999 < a_n\}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 46 (Επαλήθευση σύγκλισης με βάση τον ορισμό). Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ συγκλίνει στο 0.

Άσκηση 47 (Σωστό - Λάθος με αιτιολόγηση). Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς; Αν μια πρόταση είναι αληθής δώστε απόδειξη, αλλιώς δώστε ένα παράδειγμα όπου η πρόταση δεν ισχύει.

(i) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη τότε $a_n \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

(ii) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα τότε η $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης συγκλίνουσα.

(iii) Αν οι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσες τότε και η $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αποκλίνουσα.

(iv) Αν οι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσες τότε και η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Άσκηση 48 (Όριο και Μηδέν).

(i) Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| = 0.$$

(ii) Να δείξετε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = 0.$$

Ισχύει το πιο πάνω αν αντικαταστήσουμε το 0 με ένα $\alpha \neq 0$;

Άσκηση 49 (Αθροισμα ορίων). Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, να δείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Άσκηση 50 (Φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία και σύγκλιση). Με χρήση της πρότασης ότι κάθε αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ ναδειχθεί ότι κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n = -b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Άσκηση 51 (Πυκνότητα ρητών και σύγκλιση). Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει σε αυτόν. (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα του συνόλου των ρητών αριθμών)

Άσκηση 52 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > 0$.

Άσκηση 53 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Να δείξετε ότι αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 1$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > \frac{n^2}{3}$.

Άσκηση 54 (Εφαρμογή ορισμού ορίου). Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha > 0$. Να δείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$.

Άσκηση 55 (Όριο ρητών παραστάσεων).

(i) Δείξτε ότι $\frac{1}{2n^2 - 1} \rightarrow 0$. (Χωρίς τη χρήση του ορισμού.)

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 + n^2 + 1}$.

(iii) (Γενίκευση των προηγούμενων) Δίνονται δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \quad \text{και} \quad q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

με $a_k, b_m \neq 0$, $m \geq k$ και $m \geq 1$.

Αν $k = m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a_k}{b_m}$$

και αν $k < m$ δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε κάθε φορά τους αριθμητή-παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του n .

Άσκηση 56 (Υπολογισμός ορίου). Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(i) $a_n = \left(-\frac{7}{8}\right)^n + \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 1.$

(ii) $b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$

(iii) $c_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}, \quad n \geq 1.$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συζυγή παράσταση.

(iv) $d_n = \frac{n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{n^3 - \sqrt[n]{n} + 1}, \quad n \geq 1.$

(v) $e_n = \sqrt[2n]{2n}, \quad n \geq 1.$

Υπόδειξη: Τι σχέση έχει η $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με την $x_n = \sqrt[n]{n}, n \geq 1$;

(vi) $f_n = \sqrt[2n]{n}, \quad n \geq 1.$

Άσκηση 57 (Διερεύνηση σύγκλισης). Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2} \quad n \geq 1.$$

Εξετάστε τις ακολουθίες $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ και $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως προς τη σύγκλιση. (Δηλαδή είτε βρείτε το όριο είτε δείξτε ότι δεν συγκλίνουν.)

Υπόδειξη: Συγκλίνουν μόνο δύο από τις προηγούμενες ακολουθίες.

Άσκηση 58 (Κριτήριο Ρίζας).

(i) (Απαιτητική) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n = 0.$$

Άσκηση 59 (Κριτήριο Λόγου).

(i) (Απαιτητική) Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μη-μηδενικών αριθμών με

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right| = \rho < 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

(ii) (Ένα πολύ σημαντικό όριο) Δείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x , ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Άσκηση 60 (Εφαρμογή Κριτηρίων Λόγου - Ρίζας). Δείξτε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0.

$$a_n = \frac{n^3}{3^n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \quad n \geq 1,$$

$$c_n = \left(\frac{3n^2 + n + 1}{7n^4 + 1} \right)^n \quad n \geq 1,$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Για τη δεύτερη και την τέταρτη ακολουθία θυμίζουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in (2, 3)$.

Άσκηση 61 (Υπολογισμός ορίου). Έστω a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

Άσκηση 62 (Υπολογισμός ορίου). Να υπολογίσετε τα όρια:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\lambda^n,$ όπου $|\lambda| < 1,$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

Άσκηση 63 (Ακολουθία με μεταβαλλόμενο πλήθος προσθετέων). Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

Άσκηση 64 (Ακολουθία με μεταβλητό πλήθος προσθετέων). Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}.$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

(i) $x_{n+1} - x_n > 0,$

(ii) $x_n < 1.$

Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; (Μην επιχειρήσετε να υπολογίσετε κάποιο όριο.)

Άσκηση 65 (Υπολογισμός supremum με ακολουθίες). Επανεξετάζουμε μέρος της Άσκησης 24. Προσδιορίστε το supremum του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

με χρήση ορίων ακολουθιών.

Άσκηση 66 (Υπολογισμός supremum-infimum με ακολουθίες). Επανεξετάζουμε την Άσκηση 23. Να προσδιορίσετε το infimum και το supremum των συνόλων

$$(0, 1], (0, 1), [0, 1)$$

με χρήση ορίων ακολουθιών.

Άσκηση 67 (Υπολογισμός supremum-infimum με ακολουθίες). Βρείτε το supremum και το infimum των ακόλουθων συνόλων και έπειτα εξετάστε αν είναι maximum ή minimum:

$$A = \{ 5 - 2^{-n} : n \in \mathbb{N} \}, \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Άσκηση 68 (Υπολογισμός supremum-infimum με ακολουθίες). Δίνονται τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Εξετάστε αν τα A, B είναι α) άνω φραγμένα και β) κάτω φραγμένα. Όπου εφαρμόζεται να βρείτε τα suprema και infima.

Υπόδειξη για το σύνολο B . Παρατηρήστε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x + \frac{4}{x} \geq 4$ και βρείτε πού επιτυγχάνεται η ισότητα.

Άσκηση 69 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι:

(i) $0 < a_n < 2$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $a_n \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Υπόδειξη. Στα (i) και (ii) χρησιμοποιείτε την Αρχή της Επαγωγής.

Άσκηση 70 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Ορίζουμε την ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1 + a_n}{7 + a_n} \quad n \geq 1.$$

Δείξτε ότι

(i) $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε $n \geq 1$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείτε την Αρχή της Επαγωγής. Μπορείτε να αναδιατυπώσετε τις ζητούμενες ανισότητες $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ σε πιο απλές ισοδύναμες ανισότητες.

(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii) $a_n \rightarrow 2$.

Άσκηση 71 (Αναδρομικά ορισμένη ακολουθία και σύγκλιση). Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{n+1} = \sqrt{3\alpha_n}.$$

- (i) Δείξτε, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, ότι η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 3.
- (ii) Δείξτε ότι η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.
- (iii) Εξηγήστε το λόγο για τον οποίο συγκλίνει η $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και στη συνέχεια υπολογίστε το όριο της.

Άσκηση 72 (Η ακολουθία του αριθμού e - Απαιτητική). Θεωρούμε την ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

- (i) Δείξτε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

- (ii) Δείξτε ότι $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το (i) και την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 73. Υπολογίστε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε τις πιο πάνω ακολουθίες με τη βοήθεια της $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$.

Άσκηση 74 (Κατανόηση σύγκλισης στα $\pm\infty$). Δίνονται δύο ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n \rightarrow +\infty$ και $b_n \rightarrow -\infty$. Ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν τελικά όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και ποια σύνολα είναι πεπερασμένα;

$$A = \{ n \in \mathbb{N} : 1234567890 < a_n \}$$

$$B = \{ n \in \mathbb{N} : a_n \leq 17 \}$$

$$C = \{ n \in \mathbb{N} : b_n > 1, 1 \}$$

$$D = \{ n \in \mathbb{N} : b_n < -9876543210 \}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 75 (Σύγκλιση στα $\pm\infty$ με βάση τον ορισμό).

- (i) Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = -n^3$ συγκλίνει στο $-\infty$.
- (ii) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα **όχι** κάτω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $-\infty$.

Σειρές

Άσκηση 76 (Άλγεβρα Σειρών).

- (i) Δώστε το παράδειγμα δύο ακολουθιών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνει αλλά οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν.
- (ii) Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.
- (iii) Δείξτε ότι αν $c \neq 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 77 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{όπου } |x| \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}].$$

Άσκηση 78 (Πεπερασμένο άθροισμα γεωμετρικής προόδου). Δίνονται $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ και $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

και

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}.$$

Υπόδειξη: Ένας τρόπος να αποδειχθεί η πρώτη ισότητα είναι με επαγωγή. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε: $(1 - x) \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=1}^n x^{k-1} - x \cdot \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \dots$

Άσκηση 79 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}}.$$

Σειρές με σημείο εκκίνησης το 0. Όμοια με τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μπορεί κανείς να ορίσει και την

έννοια της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, δηλαδή το σημείο εκκίνησης είναι το $n = 0$. Η διαφορά εδώ είναι ότι η ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων ορίζεται ως ακολούθως: $s_1 = a_0$, $s_2 = a_0 + a_1$, $s_3 = a_0 + a_1 + a_2$, γενικά $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}}$$

Μια σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Όλα τα αποτελέσματα που ισχύουν για τις σειρές με σημείο εκκίνησης το 1 ισχύουν και για τις σειρές με σημείο εκκίνησης το 0.

Άσκηση 80. Δίνεται $\lambda \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|\lambda| < 1$. Δείξτε επίσης ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $0 < |\lambda| < 1$.

Μπορείτε να πάρετε δεδομένες τις αντίστοιχες ιδιότητες για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$.

Σχόλιο. Η $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ ονομάζεται επίσης **γεωμετρική σειρά** και το λ ονομάζεται ο **λόγος** της σειράς.

Άσκηση 81 (Εύρεση ορίου σειράς). Να προσδιορίσετε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Στη συνέχεια, για αυτά τα x που είναι διάφορα του 0, να βρείτε τον αριθμό στον οποίο συγκλίνουν.

Άσκηση 82 (Εύρεση ορίου σειράς). Βρείτε το όριο των ακόλουθων σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 4^{n+2}}{5^{n+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Άσκηση 83 (Εύρεση ορίου σειράς). Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$ και $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta_1 - \beta.$$

Σημειώσεις: 1) Με την ορολογία “εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση” εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει, χωρίς να ασχοληθούμε με την απόλυτη σύγκλιση. Όταν λέμε “εξετάστε μια σειρά ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση” εννοούμε να εξεταστεί αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει απλά χωρίς να συγκλίνει απολύτως ή αποκλίνει.

2) Είναι συχνό το φαινόμενο να εφαρμόζονται πάνω από ένα κριτήρια σύγκλισης σε μια σειρά. Επομένως ακόμα και αν μια άσκηση υποδεικνύει τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου της Ρίζας, εσείς ενδεχομένως να μπορείτε να τη λύσετε με τη χρήση π.χ. του Κριτηρίου του Λόγου.

Άσκηση 84 (Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n^2 + 1)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Άσκηση 85 (Κριτήριο Λόγου). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}.$$

Άσκηση 86 (Κριτήριο Ρίζας). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Άσκηση 87 (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^5 - 3n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{n^{7/2} + 2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}.$$

Υπόδειξη: Στην πρώτη σειρά θεωρήστε την ακολουθία $b_n = \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Ακολουθήστε παρόμοιο συλλογισμό στις άλλες δύο σειρές.

Άσκηση 88 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+7}.$$

Άσκηση 89 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές όπως ως προς τη σύγκλιση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n)}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 + 1/n)^n}{(2^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2},$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 90 (Διερεύνηση σύγκλισης σειράς). Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(3n)!}, \quad (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{4^n}, \quad (\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Άσκηση 91 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

Άσκηση 92 (Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης σειράς).

(i) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right)$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη: Δείξτε αρχικά ότι $\sin\left(n \cdot \pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ για κάθε n .

(ii) Δείξτε ότι η προηγούμενη σειρά **δεν** συγκλίνει **απολύτως**.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x$, όπου $x \in [0, \pi/2]$.

(iii) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

(iv) Εξετάστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$$

ως προς τη σύγκλιση.

Άσκηση 93 (Ανισότητα Young με εκθέτη το 2). Δείξτε ότι για $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|a \cdot b| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Άσκηση 94. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n| < 1$.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει επίσης. Ισχύει το αντίστροφο?

(iii) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη. Στο (i) να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας και στα (ii), (iii) το κριτήριο σύγκρισης. Θα χρειαστείτε και την ανισότητα Young.

Άσκηση 95 (Σύγκλιση σειράς). Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2 + n^2 \alpha_n}$$

συγκλίνει.

Συναρτήσεις - συνέχεια και παράγωγος

Αρχή Μεταφοράς (υπενθύμιση): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η f είναι συνεχής στο x .
- (2) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \rightarrow x$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Άσκηση 96. Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n^2}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } a_1 > 0.$$

Εξετάστε τις ακόλουθες σειρές ως προς τη σύγκλιση.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(a_n + \frac{1}{n}\right).$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

Άσκηση 97 (Εξακρίβωση συνέχειας-ασυνέχειας). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 3 \\ -x, & x \leq 3. \end{cases}$$

Δείξτε τα εξής:

- (i) Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο 3.
- (ii) Για κάθε $x \neq 3$ η f είναι συνεχής στο x .

Άσκηση 98 (Αδυναμία Συνεχούς Επέκτασης). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ δεν έχει συνεχή επέκταση στο 0, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = f(x) = 1/x$ για κάθε $x \neq 0$, η F δεν είναι συνεχής στο 0.

Άσκηση 99 (Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν ισχύει στους ρητούς). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} : f(x) = x^2 - 2$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση και εξετάστε αν ισχύει η ακόλουθη πρόταση: για κάθε $a, b, q \in \mathbb{Q}$ με $a < b$, αν το q είναι γνήσια ανάμεσα στο $f(a)$ και στο $f(b)$ τότε υπάρχει $p \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ με $f(p) = q$.

Άσκηση 100 (Συνέχεια συνάρτησης σε μεμονωμένο σημείο). Θεωρούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε την $f : [0, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0, 1], \\ 9856792783456124918513, & x = 2. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

Άσκηση 101 (Κάθε ακολουθία είναι συνεχής συνάρτηση).

- (i) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από φυσικούς αριθμούς η οποία συγκλίνει σε κάποιο a . Δείξτε ότι υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $x_n = a$, δηλαδή $x_n = a$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις αποστάσεις $|x_{n+1} - x_n|$.

- (ii) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Άσκηση 102 (Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- (i) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = \sqrt{|\sin x|}.$$

Βρείτε δύο συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ και $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $h = g \circ f$.

- (ii) Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι συνεχείς τότε και η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι επίσης συνεχής, όπου τα X, Y και Z είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 103 (Πυκνότητα ρητών-αρρήτων και σύγκλιση ακολουθίας). Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ρητούς και από άρρητους αριθμούς αντίστοιχα έτσι ώστε $q_n \rightarrow x$ και $x_n \rightarrow x$.

Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $a < b$ υπάρχει ρητός q και άρρητος y με $a < q < b$ και $a < y < b$.

Άσκηση 104 (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Υποθέτουμε ότι η $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και ότι $f(q) = 0$ για κάθε ρητό αριθμό $q \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Άσκηση 105 (Τιμές συνεχούς συνάρτησης στους ρητούς). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(q) = q^2$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Υπολογίστε την τιμή $f(\sqrt{2})$.

Άσκηση 106 (Διατήρηση προσήμου τοπικά). Έστω συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 . Δείξτε ότι αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει ότι $f(x) > 0$.

Υπόδειξη. Για την επίλυση με βάση την Αρχή Μεταφοράς πρέπει να χρησιμοποιηθεί η απαγωγή σε άτοπο.

Σχόλιο: Στα συνηθισμένα παραδείγματα μια συνάρτηση είναι συνεχής “σχεδόν σε όλα τα σημεία” του πεδίου ορισμού της. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις με “πάρα πολλά” σημεία ασυνέχειας.

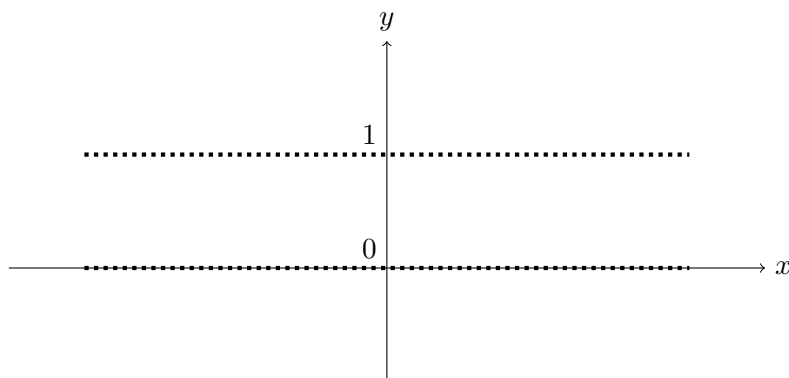
Άσκηση 107 (Συνάρτηση Dirichlet). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας!

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 103.

Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Dirichlet μπορούμε να τη σχεδιάσουμε μόνο κατά προσέγγιση.



Άσκηση 108. Δείξτε ότι η εξίσωση $\cos(x^2) = x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$.

Άσκηση 109 (Διερεύνηση ορίου). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

Εξετάστε αν υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τα όρια των πιο πάνω συναρτήσεων όταν το x τείνει στο 0 και αν ναι να υπολογίσετε το εν λόγω όριο.

Άσκηση 110 (Όριο συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου στα $\pm\infty$). Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τα όρια των συναρτήσεων $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όταν το x τείνει στο $+\infty$ και όμοια όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Άσκηση 111 (Ιδιότητες ορίου συνάρτησης). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A . Δείξτε ότι αν $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell_2$, όπου $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow b} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2.$$

Άσκηση 112 (Όριο συνάρτησης και άπειρο). Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A . Δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Αν $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

(ii) Αν $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Μπορείτε να πάρετε δεδομένα τα αντίστοιχα αποτελέσματα για ακολουθίες.

Άσκηση 113 (Όρια πολυωνύμων).

(i) Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε το πολυώνυμο ως γινόμενο $x^3 \cdot (1 - 3/x + 1/x^3)$.

(ii) Γενικότερα δείξτε ότι αν $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iii) Αν $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι θετικός άρτιος τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0. \end{cases}$$

(iv) Αν $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ και ο k είναι περιττός τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } a_k < 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_k > 0. \end{cases}$$

Άσκηση 114 (Κανόνας de L' Hospital). Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 4x}$$

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

Άσκηση 115 (Κριτήριο Παρεμβολής για όρια συναρτήσεων). Θεωρούμε ένα διάστημα I και ένα $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ που είναι σημείο συσσώρευσης του I . Αν οι συναρτήσεις $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιούν

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \text{για κάθε } x \in I,$$

και αν $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \ell$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο Παρεμβολής για ακολουθίες.

Άσκηση 116 (Παράγωγος αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων). Δείξτε ότι

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{για κάθε } x \in (-1, 1) \quad \text{και} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 117 (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy). Έστω $a < b$ και $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και διαφορίσιμες σε κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (a, b)$ με

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a)).$$

Υπόδειξη. Αν $g(a) \neq g(b)$ θεωρήστε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x), \quad x \in [a, b].$$

Άσκηση 118 (Ιδιόζουσες Συναρτήσεις). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$f_2(x) = x \cdot f_1(x), \quad f_3(x) = x^2 \cdot f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$.
- (ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_2 είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- (iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f_3 είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος f'_3 δίνεται ως εξής:

$$f'_3(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η f'_3 συνεχής;

Υπόδειξη. Στα $x \neq 0$ μπορείτε να παραγωγίσετε την f_3 με τον συνήθη τρόπο.

Άσκηση 119 (Αδυναμία εφαρμογής του Κανόνα de L' Hospital).

- (i) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ διαφέρουν. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με τον Κανόνα de L' Hospital;
- (ii) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + \sin x$ και $g(x) = x$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός αλλά δεν υπάρχει το όριο της f'/g' ούτε είναι $\pm\infty$ όταν το x τείνει στο ∞ . (Επομένως δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας de L' Hospital.)

Άσκηση 120 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης). Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 2.$$

Δείξτε ότι η f είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια υπολογίστε την παράγωγο $(f^{-1})'(2)$.

Άσκηση 121. Δείξτε ότι

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 122. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, διαφορίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\gamma f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Άσκηση 123. Να δείξετε ότι $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(x)$, για κάθε $x \geq 0$.

Υπόδειξη. Πώς σχετίζονται οι παράγωγοι των πιο πάνω συναρτήσεων για $x > 0$;

Άσκηση 124. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **τοπικά σταθερή** αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει $\delta > 0$, που πιθανώς εξαρτάται από το x , τέτοιο ώστε η f να είναι σταθερή στο $(x - \delta, x + \delta)$.

Δείξτε ότι κάθε τοπικά σταθερή παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Άσκηση 125 (Συμβολισμός $\sum$ και παράγωγος). Συμπληρώστε τα πιο κάτω κενά.

$$\left(\sum_{k=1}^n 5x^k\right)' = \dots\dots\dots \left(\sum_{k=0}^n 5x^k\right)' = \dots\dots\dots$$

$$\left(\sum_{k=1}^n (x^{2k} + 3x^2 + 1)\right)' = \dots\dots\dots$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k!}\right)' = \dots\dots\dots$$

Δείξτε επιπλέον ότι για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{k-1}.$$

Σχόλιο. Στα πιο πάνω με x^0 εννοούμε τον αριθμό 1.

Άσκηση 126 (Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση). Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_\lambda(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0), \quad x \in (a, b).$$

Δείξτε ότι αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g_\lambda(x)}{x - x_0} = 0,$$

όπου η g_λ είναι όπως πιο πάνω, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 και μάλιστα $f'(x_0) = \lambda$. (Επομένως η γραμμικοποίηση $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ είναι η μοναδική “καλή γραμμική” προσέγγιση της f κοντά στο x_0 .)

Άσκηση 127 (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς $(1,0002)^{50}$ και $\sqrt[3]{1,009}$.

Άσκηση 128 (Προσέγγιση με γραμμικοποίηση). Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό $\tan 42^\circ$, δηλαδή για τον $\tan \frac{7\pi}{30}$.

Άσκηση 129 (Εκθετική Συνάρτηση - Παράγωγοι στο $x_0 = 0$). Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 130 (Πολυώνυμο Taylor Εκθετικής Συνάρτησης). Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^x$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της f τάξης $n \in \mathbb{N}$ στο σημείο $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισοδύναμα

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 131 (Παράγωγοι Συνάρτησης Λογαρίθμου στο $x_0 = 1$). Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \ln(1+x).$$

Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad x \in (-1, 1),$$

καθώς και ότι

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

για κάθε $k \geq 1$.

Άσκηση 132 (Πολυώνυμα Taylor Λογαρίθμου). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor P_n της συνάρτησης

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x)$$

τάξης n στο σημείο 0 δίνεται από τον τύπο

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 131.

Άσκηση 133 (Παράγωγοι ημιτόνου κάθε τάξης). Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(1)

$$\sin^{(4n)}(x) = \sin(x), \quad \sin^{(4n+1)}(x) = \cos(x), \quad \sin^{(4n+2)}(x) = -\sin(x), \quad \sin^{(4n+3)}(x) = -\cos(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $f^{(m)}(x)$ είναι η παράγωγος της f τάξης $m \in \mathbb{N}$. (Με $f^{(0)}$ εννοούμε την f .) Συμπεράνετε ότι

$$(2) \quad \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^j, & k = 2j + 1 \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2j \text{ για κάποιο } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 134 (Παράγωγοι συνημιτόνου κάθε τάξης). Διατυπώστε και αποδείξτε τις ιδιότητες για τη συνάρτηση του συνημιτόνου $\cosine$ ($\cos$) που είναι αντίστοιχες με τις (1) και (2) της Άσκησης 133.

Άσκηση 135 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor).

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Άσκηση 136 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 137 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Δείξτε ότι

$$\left| \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!} \right) \right| < 10^{-2}.$$

Άσκηση 138 (Προσέγγιση με πολυώνυμα Taylor). Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου 0 χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το $\sin 1$ με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από 0,001; Ποιος είναι ο τύπος αυτού του πολυωνύμου;

Άσκηση 139 (Εύρεση διαστήματος προσέγγισης). Βρείτε ένα ανοικτό διάστημα I με κέντρο το 0 έτσι ώστε για κάθε $x \in I$ να ισχύει

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| < 10^{-4}.$$

Άσκηση 140 (Taylor και φραγμένη συνάρτηση). Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη και $f(0) = f'(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| \leq 1$ ισχύει

$$|f''(x)| \leq 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $|x| \leq 1$ έχουμε

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 141 (Taylor και ανισώσεις). Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα Taylor της $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x}$ στο 0 μέχρι 3ης τάξης και να δείξετε ότι

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άσκηση 142 (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι

$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άσκηση 143 (Taylor και ανισώσεις). Να δείξετε ότι $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, για κάθε $x \in [-\pi, 0]$.

Άσκηση 144 (Taylor και τοπικό ελάχιστο - Απαιτητική). Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι απεριορίστα διαφορίσιμη και

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $f^{(2n)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της f καθώς και ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση h , αν $h(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $h(x) > 0$.

Άσκηση 145 (Taylor και σταθερή συνάρτηση - Απαιτητική). Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλα επιλεγμένο πολυώνυμο Taylor της f στο σημείο x_0 .

Δυναμοσειρές

Θεώρημα Παραγωγίσης Δυναμοσειρών (υπενθύμιση).

Θεωρούμε ότι η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ συγκλίνει για όλα τα x μέσα σε ένα ανοικτό διάστημα I . Τότε η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη σε όλο το I και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1} \quad x \in I.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να παραγωγίσουμε τη δυναμοσειρά όρο προς όρο

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right)' &= (a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-c)^n + \cdots)' \\ &= a_1 + 2a_2 \cdot (x-c) + \cdots + na_n \cdot (x-c)^{n-1} + \cdots \quad x \in I. \end{aligned}$$

Άσκηση 146 (Ερωτήσεις Κατανόησης). Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις με αιτιολόγηση.

- (i) Αν η $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά και το I είναι ανοικτό διάστημα τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I . Σωστό ή Λάθος;
- (ii) Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ και $\sum_{n=1339}^{\infty} a_n \cdot x^n$ συγκλίνουν ακριβώς για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$. Σωστό ή Λάθος;
- (iii) Αν δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης θα συγκλίνουν απαραίτητα για τα ίδια $x \in \mathbb{R}$;
- (iv) Δίνεται μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in (3, 8)$ και αποκλίνει για $x = 8$. Ποιο είναι το κέντρο της δυναμοσειράς και ποια η ακτίνα σύγκλισής της;

Άσκηση 147 (Αναγνώριση δυναμοσειράς). Βρείτε το κέντρο c και τους συντελεστές a_n , $n \in \mathbb{N}$ στις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cdot (7x-1)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (5x+3)^n.$$

Άσκηση 148 (Εύρεση διαστήματος σύγκλισης).

- (i) Για κάθε δυναμοσειρά της Άσκησης 147 βρείτε το σύνολων όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.
- (ii) Επαναλάβετε το ίδιο για τις ακόλουθες δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+5}}$$

Άσκηση 149 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειράς σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα I :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad x \neq -1, \quad f_2(x) = \frac{1}{3-x} \quad x \neq 3,$$

$$f_3(x) = \frac{x}{2+5x} \quad x \neq -\frac{2}{5}, \quad f_4(x) = x \cdot \sin(x^2) \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω $x \neq 0$. Εκφράστε την παράσταση $x \cdot \sin(1/x)$ σε μορφή σειράς.

Άσκηση 150 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και παραγώγιση). Δίνεται ότι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις σε δυναμοσειρά σε κατάλληλα επιλεγμένα ανοικτά διαστήματα.

$$g_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad x \neq -1, \quad g_2(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \quad x \neq 1,$$

$$g_3(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad g_4(x) = \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 151. Βρείτε το λάθος στον ακόλουθο συλλογισμό.

1 Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Θέλουμε να βρούμε την παράγωγό
2 της.

3 Για ευκολία γράφουμε τη δυναμοσειρά αναλυτικά ως άπειρο άθροισμα

$$4 \quad f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} - \dots$$

5 Έπειτα παραγωγίζουμε όρο προς όρο (Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών):

$$6 \quad f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

$$7 \quad (3) \quad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

8 Από την άλλη μπορούμε να παραγωγίσουμε κατευθείαν σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνεται
9 στο Θεώρημα Παραγώγισης Δυναμοσειρών, προσέχοντας να ξεκινήσουμε το άθροισμα από $n = 1$:

$$10 \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n}$$

$$11 \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$$12 \quad (4) \quad = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} - \dots$$

13 Από τις (9) και (10) παίρνουμε **δύο διαφορετικές εκφράσεις** για την παράγωγο $f'(x)$. (!)

14 Αυτές οι εκφράσεις είναι όντως διαφορετικές γιατί για $x = 0$ η (9) δίνει την τιμή 1 ενώ η (10)
15 την τιμή 0.

16 Μπορούμε επίσης να δούμε ότι οι (9) και (10) διαφέρουν αφαιρώντας την δεύτερη από την
17 πρώτη και βλέποντας ότι η διάφορά τους είναι ίση με 1.

Άσκηση 152 (Δυναμοσειρά Εκθετικής συνάρτησης). Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(i) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(ii) Βρείτε την παράγωγο f' . Τι παρατηρείτε;

(iii) Δείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Υπόδειξη:** Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 153 (Παράγωγος δυναμοσειράς τάξης m). Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq 1$ κάθε δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ που συγκλίνει για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει παράγωγο m -τάξης στο I , η οποία δίνεται από του τύπους

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot (m-1+k) \cdot \dots \cdot (1+k) \cdot a_{m+k} \cdot (x-c)^k \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-m} \quad x \in I. \end{aligned}$$

Άσκηση 154 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και ολοκλήρωση). Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n, \quad |x| < 1.$$

Άσκηση 155 (Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά και υπόλοιπο Taylor). Με χρήση του υπολοίπου Taylor αποδείξτε τον τύπο της δυναμοσειράς για τη συνάρτηση του ημιτόνου:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι η πιο πάνω δυναμοσειρά έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης καθώς και τον τύπο των πολωνύμων Taylor της συνάρτησης ημίτονο (βλ. Άσκηση ??):

$$P_{2n+1}(x) = \left(\sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \cdot x^{2j+1} \right).$$

Άσκηση 156 (Εύρεση πολωνύμων Taylor). Βρείτε όλα τα πολυώνυμα Taylor στο 0 των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad g(x) = e^{x^2} + \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 157.

(i) Βρείτε έναν φυσικό αριθμό n για τον οποίο

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 10^{-4}.$$

(ii) Βρείτε (με απόδειξη) τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n με την πιο πάνω ιδιότητα.

Άσκηση 158. Δείξτε με χρήση του Θεωρήματος Taylor ότι

$$\left| \cos(2x) - \left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{64x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 159 (Εύρεση σειράς MacLaurin και παραγώγων ανώτερης τάξης στο κέντρο).

(i) Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad h(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Βρείτε τις παραγώγους $f^{(6)}(0)$, $g^{(6)}(0)$, $h^{(6)}(0)$ και $h^{(7)}(0)$.

Ολοκληρώματα

Άσκηση 160 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση). Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, & I_2 &= \int \frac{1}{x^2-a^2} dx, \\ I_3 &= \int \frac{1}{x^2+a^2} dx, & I_4 &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \\ I_5 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx, \quad (x > \sqrt{2}). \end{aligned}$$

όπου πιο πάνω $a > 0$. Όλες οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις θεωρούνται ότι ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα.

Υπόδειξη. Το I_5 , μετά από κατάλληλη αντικατάσταση, ανάγεται στο I_4 με $a = 1$.

Άσκηση 161. Με εφαρμογή της αντικατάστασης $u = \pi - x$ δείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Χρησιμοποιήστε το πιο πάνω για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Άσκηση 162 (Ολοκληρώματα και αναδρομικός τύπος). Θεωρούμε $x > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$I_k = \int_0^x \sin^k t dt,$$

όπου $\sin^k t$ σημαίνει $(\sin t)^k$ (ύψωση σε δύναμη). Δείξτε ότι για κάθε $k \geq 2$ ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$I_k = -\frac{1}{k} \cdot \cos x \cdot \sin^{k-1} x + \frac{k-1}{k} \cdot I_{k-2}.$$

Άσκηση 163 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-3} dx \quad J = \int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

Άσκηση 164 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+4} dx \quad I_2 = \int \frac{1}{3x^2+1} dx \quad I_3 = \int \frac{1}{x^2-4x+7} dx.$$

Άσκηση 165 (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων). Βρείτε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx \quad J = \int \frac{x+5}{4x^2+4x+10} dx.$$

Άσκηση 166 (Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης). Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1}{(x+3)(x^2+x+1)} dx.$$

Άσκηση 167 (Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα). Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} dx.$$

- (i) Να αναγάγετε τα I και J σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων με κατάλληλη αντικατάσταση.
- (ii) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα I και J .

Άσκηση 168 (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται $\rho \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\rho > 1$ τότε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{\rho-1},$$

ενώ αν $\rho \leq 1$ το πιο πάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Άσκηση 169 (Γενικευμένα ολοκληρώματα).

- (i) Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα ορίζονται και σε αυτή την περίπτωση να τα υπολογίσετε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

- (ii) Με βάση το πιο πάνω ερώτημα για ποια $\rho \in \mathbb{R}$ περιμένετε να ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\rho} dx;$$

Διατυπώστε και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας. Όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα να το υπολογίσετε.

Τι παρατηρείτε σε σχέση με το $\int_1^\infty \frac{1}{x^\rho} dx$ (Άσκηση 168);

Άσκηση 170 (Γενικευμένα ολοκληρώματα). Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Αν ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

- (ii) Δείξτε ότι το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος δεν ισχύει γενικά, δηλαδή μπορεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ αλλά το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ να μην ορίζεται.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 171 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Δείξτε με τη βοήθεια του Ολοκληρωτικού Κριτηρίου ότι για κάθε $\rho > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

Άσκηση 172 (Ολοκληρωτικό Κριτήριο). Εξετάστε τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

ως προς τη σύγκλιση.