

Κεφάλαιο 7 Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

- Να δώσουμε την παρουσίαση στα ολοκληρώματα στο $\mathbb{R}$.

Τεχνικές ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων

Υπενθυμίζουμε ότι ρητή είναι κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{p}{q}$

όπου τα p, q είναι πολώνυμα.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$I(p, q) = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

για μια μεγάλη κατηγορία
πολυνύμων p και q .

Θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις όπου

$$\underbrace{\deg p}_{\text{βαθμός } p} < \deg q$$

Όταν $\deg p \geq \deg q$

εκτελούμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{p}{q} = \pi + \frac{r}{q}$$

όπου τα π, r είναι πολυώνυμα
και $\deg r < \deg q$.

Τότε το $I(p, q)$ στην ουσία
ανάγεται στο $I(r, q)$:

$$\underbrace{\int \frac{p(x)}{q(x)} dx}_{I(p, q)} = \int \pi(x) dx + \underbrace{\int \frac{r(x)}{q(x)} dx}_{I(r, q)}$$

$\deg r < \deg q$

Σημείωση: όταν $\deg p = \deg q$ η
διαίρεση είναι απλή.

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. } \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{x^2 + 3x + 2 - 3x - 2 + 5}{x^2 + 3x + 2} \\ \pi(x) \searrow & \\ &= 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 3x + 2} \swarrow r(x) \end{aligned}$$

Θεμελιώδη Ολοκληρώματα:

$$i) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

γενικόζερα:

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

$$ii) \int \frac{1}{x^2+1} dx = \underbrace{\arctan x}_\text{τόσο εφαπτομένη x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

γενικόζερα:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$,

Θα καθορίσουμε το $I(p, q)$
στις εξής περιπτώσεις:

	$\deg p$	$\deg q / q(x)$
1)	0	$q(x) = (ax+b)^n, n \geq 1$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$
2)	0	2
3)	1	2

Θα εξετάσουμε επίσης τις
εξής περιπτώσεις:

4) $\deg p \leq 2$ και

$$q(x) = (dx+e)(ax^2+bx+c)$$

όπου $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a, d \neq 0$

5) $\deg p \leq 3$ και

$$q(x) = (dx+e)^2(ax^2+bx+c)$$

όπου $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a, d \neq 0$

Περίπτωση 1)

$$\deg p = 0 \quad \text{και} \quad q(x) = (ax+b)^n$$

$n \geq 1 \quad a \neq 0$

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$u = ax + b$$

Παραδείγματα:

$$i) \quad I = \int \frac{3}{2x-5} dx$$

$$u = 2x - 5, \quad du = 2 dx$$

$$I = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{3}{2} \ln|u| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln|2x-5| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad I = \int \frac{1}{(3x+7)^{10}} dx$$

$$u = 3x + 7, \quad du = 3 dx$$

$$I = \int \frac{1}{u^{10}} \cdot \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^{10}} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-9}}{-9} + C$$

$$= -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{(3x+7)^9} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Περίπτωση 2)

$$\deg p = 0 \quad \text{και} \quad \deg q = 2$$

$$q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

Θεωρούμε την διακρίνουσα Δ
του q :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Υπο περίπτωση 2α) $\Delta < 0$

Τότε το $q(x)$ έρχεται στη
μορφή

$$q(x) = \pm \left[(Ax + B)^2 + C^2 \right]$$

όπου $A, B, C \in \mathbb{R}, \quad A, C \neq 0.$

Εντεղούμε την αντικατάσταση

$u = Ax + B$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της αρίστης.

Παραδείγματα:

$$i) \quad I = \int \frac{2}{x^2 + 3x + 4} dx$$

$$q(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$

Χρήση ταυτότητας

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$q(x) = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$u = x + \frac{3}{2} \quad du = dx$$

$$I = \int \frac{2}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} du$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} \arctan\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2\sqrt{7}}{7} \left(x + \frac{3}{2}\right)\right) + c$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7} (2x + 3)\right) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Προσοχή: Αν ο συντελεστής του x^2 στο q είναι < 0 , τότε βγάδουμε το -1 κωδ παράγοντα και ασχολούμαστε με το $-q$. Δείτε το επόμενο παράδειγμα.

$$ii) \quad I = \int \frac{1}{-x^2 + x - 1} dx \quad q(x) = -x^2 + x - 1$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

Έχουμε

$$I = - \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

Εργαζόμαστε με το $-q(x) = x^2 - x + 1$
όπως προηγουμένως.

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$I = - \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

Αντικατάσταση: $u = x - \frac{1}{2}$

$$du = dx$$

$$I = - \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du$$

$$= - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \left(\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2u}{\sqrt{3}} \right) + c$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left[\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right] + c$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ici) } I = \int \frac{1}{3x^2 - x + 2} dx$$

$$q(x) = 3x^2 - x + 2$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23 < 0$$

$$q(x) = (\sqrt{3}x)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{(2\sqrt{3})^2}$$

$$- \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} + 2$$

$$= \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4 \cdot 3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}x \cdot 2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{23}{12}$$

$$= \left(\frac{6x-1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}} \right)^2$$

$$u = \frac{6x-1}{2\sqrt{3}} \quad du = \frac{6}{2\sqrt{3}} dx$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} dx = \sqrt{3} dx$$

$$I = \int \frac{1}{u^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} du$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}} \right)^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}} \cdot \arctan \left(\frac{u}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}} \right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \arctan \left(\frac{2\sqrt{3}u}{\sqrt{23}} \right) + c$$

Εξουμε : $\frac{2\sqrt{3} \cdot u}{\sqrt{23}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \cdot \frac{6x-1}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{6x-1}{\sqrt{23}}$$

Άρα

$$I = \frac{2}{\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right) + c$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{23} \cdot 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{23}}{23} (6x-1)\right) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Β' Τρόπος

$$q(x) = 3x^2 - x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Δουλεύουμε με το } x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = r(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } r(x) &= x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6^2} \\ &\quad - \frac{1}{6^2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2$$

(Συνεχίζουμε αμέσως)

Υπο περίπτωση 2β) $\Delta = 0$

Τότε $q(x) = a \cdot (x - \beta)^2$

β = η μοναδική ρίζα του q

a = συντελεστής του x^2 στο q

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$u = x - \beta$$

Κάποιες φορές είναι πιο βολική
η αντικατάσταση

$$u = ax - a\beta$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται
με βάση το $\int \frac{1}{u^2} du$.

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{5}{4x^2 + 4x + 1} dx$$

$$q(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Τότε } q(x) = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$u = x + \frac{1}{2} \quad du = dx$$

$$I = \int \frac{5}{4u^2} du = \frac{5}{4} \int \frac{1}{u^2} du$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{5}{4u} + C$$

$$= -\frac{5}{4\left(x + \frac{1}{2}\right)} + C = -\frac{5}{4x + 2} + C$$

$$C \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Πιο πάνω πύραμε

$$u = x + \frac{1}{2}$$

δηλαδή εφαρμόσαμε την αντικατά-
σταση $u = x - B$. $B = \frac{1}{2}$ ρίζα του q

Όπως όμως αναγράφει κάποιες φορές
είναι πιο βολική η αντικατάσταση

$$u = ax - aB.$$

a : ο συντελεστής
του x^2 στο q

Στο πιο πάνω παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned} q(x) &= 4x^2 + 4x + 1 = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 = \end{aligned}$$

$$= (2x + 1)^2$$

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$u = 2x + 1. \quad du = 2dx$$

(Αυτή είναι η $u = ax - aB$).

Συνεχίζουμε φθέως.

Υπο περίπτωση 2γ) $\Delta > 0$

Τότε $q(x) = a(x - \beta_1)(x - \beta_2)$

$\beta_1 \neq \beta_2$ ρίζες του q

a = συντελεστής του x^2 στο q

Αναλύουμε το κλάσμα:

$$\frac{1}{(x - \beta_1)(x - \beta_2)} = \frac{d_1}{x - \beta_1} + \frac{d_2}{x - \beta_2}$$

όπου $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Κάποιες φορές είναι πιο βοηθητικό να αναλύσουμε μαζί με τον συντελεστή a :

$$\frac{1}{a(x - \beta_1)(x - \beta_2)} = \frac{d_1}{a(x - \beta_1)} + \frac{d_2}{x - \beta_2}$$

Τότε το I υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης $\ln$.

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{2x^2 + x - 3} dx$$

$$q_1(x) = 2x^2 + x - 3$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$= 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$= \swarrow \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\searrow \frac{4}{4} = 1$$

Άρα

$$q(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) (x - 1)$$

$$= (2x + 3) (x - 1)$$

Αναγύουμε

$$\frac{1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{d_1}{2x+3} + \frac{d_2}{x-1}$$

Για ευκολία αναγύουμε το κλάσμα μαζί με τον συντελεστή α.

$$d_1(x-1) + d_2(2x+3) = 1$$

$$(d_1 + 2d_2)x + 3d_2 - d_1 = 1$$

$$d_1 + 2d_2 = 0 \quad 3d_2 - d_1 = 1$$

$$\text{Άρα } d_1 = -2d_2$$

$$3d_2 - (-2d_2) = 1$$

$$5d_2 = 1$$

$$d_2 = \frac{1}{5} \quad d_1 = -\frac{2}{5}$$

Αρα

$$\frac{1}{q(x)} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(2x+3)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-1}$$

και

$$I = -\frac{2}{5} \int \frac{1}{2x+3} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -\frac{1}{5} \ln \left| x + \frac{3}{2} \right| + \frac{1}{5} \ln |x-1| + C$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

⊛ Επίσης σωστό:

$$-\frac{2}{5} \cdot \int \frac{1}{2x+3} dx = -\frac{2}{5} \cdot \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} du$$

$(u=2x+3)$

$$= -\frac{1}{5} \ln |u| = -\frac{1}{5} \ln |2x+3|$$

Περίπτωση 3: $\deg p = 1$ $\deg q = 2$

$$p(x) = Ax + B, \quad A \neq 0$$

$$q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Μέθοδος: Προσπαθούμε να σχηματίσουμε

την παράγωγο $q'(x)$ στον αριθμητή του
κλάσματος $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Τότε $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ υπολογίζεται

με τη βοήθεια του $\ln$ και της Περίπτωσης 2.

$$q'(x) = 2ax + b$$

$$p(x) = Ax + B = \frac{A}{2a} (2ax + \frac{2a}{A} \cdot B)$$

$$= \frac{A}{2a} (2ax + b + \frac{2aB}{A} - b)$$

$$\text{Άρα } I = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{q(x)} dx + \frac{A}{2a} \int \frac{\frac{2aB}{A} - b}{q(x)} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{q'(x)}{q(x)} dx + \frac{A}{2a} \int \frac{k}{q(x)} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \ln|q(x)| + \frac{A}{2a} \int \frac{k}{q(x)} dx$$

$$k = \frac{2aB}{A} - b$$

Περίπτωση 2

Παραδείγματα:

$$1) \quad I = \int \frac{x}{x^2+2x+3} dx$$

$$(x^2+2x+3)' = 2x+2$$

$$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+3| - J$$

Το J υπολογίζεται όπως στην Περίπτωση 2.

$$q(x) = x^2+2x+3, \quad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$$

(άρα $q(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= x^2+2x+1+2 \\ &= (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } J = \int \frac{1}{q(x)} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} dx$$

$$u = x+1, \quad du = dx$$

$$J = \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{2})^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) - c$$

Apa

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c$$

$c \in \mathbb{R}.$

$$2) \quad I = \int \frac{x+2}{x^2 - 4x + 4} dx$$

$$(x^2 - 4x + 4)' = 2x - 4$$

$$\frac{x+2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4+8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 4x + 4)'}{x^2 - 4x + 4} + \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 4x + 4)'}{x^2 - 4x + 4} dx + 4 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 4| + 4 J$$

$$q(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$J = \int \frac{1}{q(x)} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x-2 & J &= \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} \\ du &= dx & &= -\frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln |(x-2)^2| - \frac{4}{x-2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x-2)^2 - \frac{4}{x-2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \ln |x-2| - \frac{4}{x-2} + C$$

$$= \ln |x-2| - \frac{4}{x-2} + C$$

Οι περιπτώσεις 4) και 5) ανάγονται στις προηγούμενες.

Γενική Μέθοδος:

Θεωρούμε το κλάσμα $\frac{P(x)}{q(x)}$, όπου τα P, q είναι πολυώνυμα με $\deg P < \deg q$.

Παραγοντοποιούμε $q(x)$.

- Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-a)^n$ αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2+bx+c)^m$, όπου η διακρίνουσα του x^2+bx+c είναι αρνητική, αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της μορφής

$$\frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_mx+\Gamma_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Παραδείγματα:

$$1) \frac{2x}{(x^2+9)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

$$2) \frac{2x}{(x^2+9)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+9} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+9)^2}$$

Εκτός των
Περιοτήσεων 4) και 5)

$$3) \frac{2x}{(x^2+9)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+\Gamma)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$\text{Αριθμίζεις} = A_1(x^3+x+x^2+1)$$

$$+ A_2x^2 + A_2 + (Bx+\Gamma)(x^2+2x+1)$$

$$= A_1x^3 + A_1x^2 + A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2 + Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + \Gamma x^2 + 2\Gamma x + \Gamma$$

$$= (A_1+B)x^3 + (A_1+A_2+2B+\Gamma)x^2 + (A_1+B+2\Gamma)x + A_1+A_2+\Gamma = x$$

$$A_1+B=0 \quad (1)$$

$$A_1+A_2+2B+\Gamma=0 \quad (2)$$

$$A_1+B+2\Gamma=1 \quad (3)$$

$$A_1+A_2+\Gamma=0 \quad (4)$$

$$\text{Από (1) και (3) παίρνουμε } 2\Gamma=1 \Rightarrow \Gamma=\frac{1}{2}$$

$$\text{Από (1) και (4): } (A_1+A_2+\Gamma) + 2B=0$$
$$\quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad 0 + 2B=0$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad B=0$$

$$\text{Από (1): } A_1=-B=0$$

$$\text{Anó (1)} : 0 + A_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Apa } \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{0}{x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{0 \cdot x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{Apa } \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx \quad \swarrow I$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx, \quad u = x+1, \quad du = dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2Cx+1} + \frac{1}{2} \cdot \arctan x + C$$

Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

Πολυώνυμο δύο μεταβλητών είναι μια

συνάρτηση $p(x, y)$ όπου τα x, y εμφανίζονται στη μορφή $x^n \cdot y^m$
 $n = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots$ και λέγεται
το $p(x, y)$ είναι πεπερασμένο άθροισμα
πολλαπλασίων των $x^n \cdot y^m$.

Π.χ. 1) $p(x, y) = x^2 y + 2xy^3 + 1$

2) $p(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 8$

3) $p(x, y) = 1$

4) $p(x, y) = x^3 + y^3 + 5x^4 y^5 - y^8 - 1$

Ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι

ο λόγος δύο πολυωνύμων δύο μεταβλητών.

Π.χ. 1) $R(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \quad x, y \in \mathbb{R}$

2) $R(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad x, y \neq 0$

Η ρητή συνάρτηση ορίζεται ακριβώς εκεί
που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Ασχολούμαστε με ολοκληρώματα της μορφής

$$I_R = \int R(\sin x, \cos x) dx$$

όπου $R(u, v)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών u, v .

Π.χ. 1) $R(u, v) = \frac{u^2}{u+v}$

τότε

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$

η προς ολοκλήρωση συνάρτηση

2) Δίνεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin^3 x}{2 \cos x \sin x}.$$

Τότε παίρνουμε $R(u, v) = \frac{v + u^3}{2uv}$

και έχουμε $f(x) = R(\sin x, \cos x)$

Θα μελετήσουμε το I_R στις εξής περιπτώσεις:

(Α) Η $R(u, v)$ είναι περιετή ως προς u ,
δηλαδή
 $R(-u, v) = -R(u, v).$

(B) Η $R(u, v)$ είναι περιττή ως προς v ,
δηλαδή
$$R(u, -v) = -R(u, v).$$

(C) Η $R(u, v)$ είναι άρτια ως προς
το γινόμενο (u, v) , δηλαδή
$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

Θα δούμε ότι με κατάλληλη αντικατάσταση
το I_R σε αυτές τις περιπτώσεις
ανάγεται σε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης
μίας μεταβλητής.

Περίπτωση (A):

$R(u, v) =$ περιττή ως προς u .

Αντικατάσταση $t = \cos x$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{3 + \cos x} dx$$

$$R(u, v) = \frac{u^3}{3+v}, \quad \text{ισχύει:}$$

$$R(-u, v) = \frac{(-u)^3}{3+v} = -\frac{u^3}{3+v} = -R(u, v)$$

Άρα η R είναι περιττή ως προς u .

Αντικατάσταση $t = \cos x$.

$$dt = -\sin x \, dx,$$

$$\frac{\sin^3 x}{3 + \cos x} dx = - \frac{\sin^2 x}{3 + \cos x} \cdot (-\sin x) dx$$

$$= - \frac{1 - \cos^2 x}{3 + \cos x} (-\sin x) dx$$

$$= - \frac{1 - t^2}{3 + t} dt = \frac{t^2 - 1}{t + 3} dt$$

$$\text{Άρα } I = \int \frac{t^2 - 1}{t + 3} dt$$

→ ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης

Βαθμός αριθμητή = 2 > βαθμός
παρονομαστή = 1

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} t^2 + 0t - 1 & t + 3 \\ -t^2 - 3t & \hline \hline -3t - 1 & \\ 3t + 9 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\text{Άρα } \frac{t^2 - 1}{t + 3} = t - 3 + \frac{8}{t + 3}$$

$$I = \int t - 3 + \frac{8}{t+3} dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - 3t + 8 \cdot \int \frac{1}{t+3} dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - 3t + 8 \ln |t+3| + C$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 3 \cos x + 8 \ln (\cos x + 3) + C$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

Περίπτωση (B):

$R(u, v)$: περιζύ ως προς v

Αντικατάσταση $t = \sin x$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$$

$$R(u, v) = \frac{1}{u^2 v},$$

$$R(u, -v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -\frac{1}{u^2 v} = -R(u, v)$$

Αντικαθίσταται $t = \sin x$.

$$dt = \cos x \, dx$$

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt \quad \left(\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ = 1 - t^2 \end{array} \right)$$

Αναλύουμε :

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{1-t^2}$$

$$\left(w = t^2, \quad \frac{1}{w(1-w)} = \frac{A}{w} + \frac{B}{1-w} \right)$$

$$\frac{A}{t^2} + \frac{B}{1-t^2} = \frac{A(1-t^2) + Bt^2}{t^2(1-t^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{Αριθμητής} &= A - At^2 + Bt^2 \\ &= (-A + B)t^2 + A \end{aligned}$$

$$\text{Αριθμητής} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -A + B = 0 \\ A = 1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} A = B = 1 \end{array} \right.$$

Άρα

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}$$

Αναλύουμε το $\frac{1}{1-t^2} : \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)}$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}$$

Καταλήγουμε ότι:

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{-1}{1+s} ds + \frac{1}{2} \ln|1+t| + C$$
$$s = -t$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} - (-1) \ln|1+s| + \frac{1}{2} \ln|1+t| + C$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln|1-\sin x| + \frac{1}{2} \ln|1+\sin x| + C$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln(1-\sin x) + \frac{1}{2} \ln(1+\sin x) + C$$
$$(\sin x \leq 1 \Rightarrow 1-\sin x \geq 0)$$

Περίπτωση Γ:

$R(u, v)$: άρτια ως προς (u, v)
Αντικατάσταση: $t = \tan x$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

$$R(u, v) = \frac{1}{u^4 v^2}$$

$$R(-u, -v) = \frac{1}{(-u)^4 (-v)^2} = \frac{1}{u^4 v^2} = R(u, v)$$

Αντικατάσταση $t = \tan x$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

Πρέπει να αντικαταστήσουμε το $\frac{1}{\sin^4 x}$

με μία συνάρτηση του t .

$$t = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow t \cdot \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow t^2 \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow t^2 (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow t^2 - t^2 \sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow t^2 = \sin^2 x (1 + t^2)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \sin^4 x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+t^2)^2}{t^4} = \left(\frac{1+t^2}{t^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right)^2 = \frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1$$

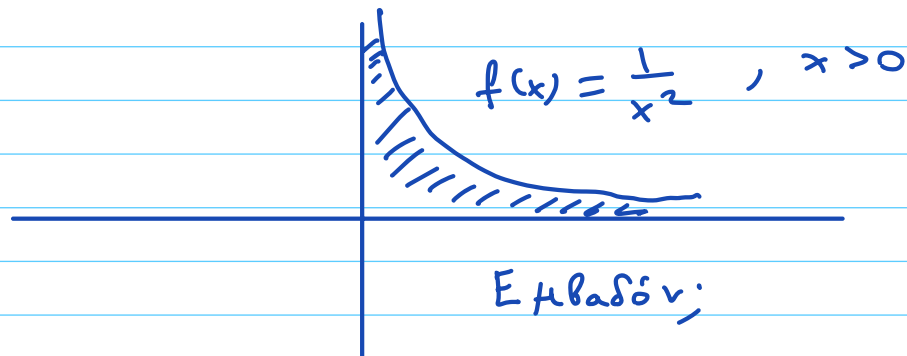
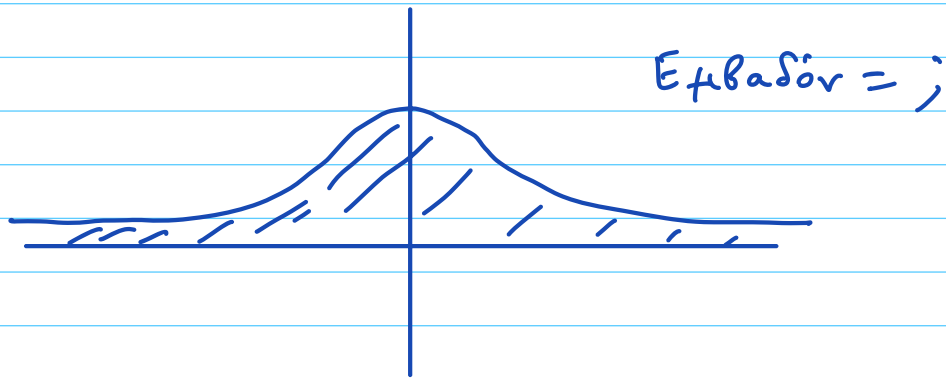
$$I = \int \frac{1}{t^4} dt + \int \frac{2}{t^2} dt + \int 1 dt$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} + 2 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + t + c$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c$$

$$= -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{2}{\tan x} + \tan x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Γενικευμένα οριοκυρήματα

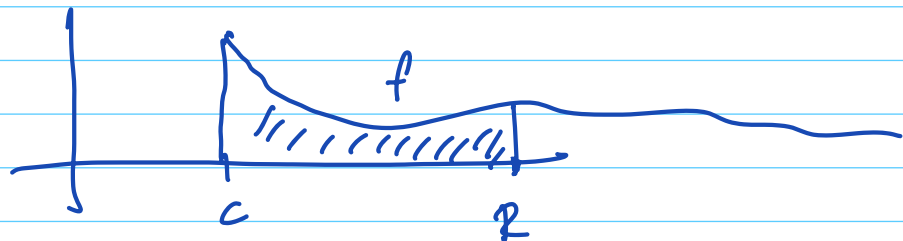


Θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια του ορισμένου οριοκυρήματος σε συναρτήσεις που δεν ορίζονται σε κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Γενικευμένα οριοκυρήματα α' είδους:

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση

$$f: [c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$



Τότε για κάθε $R > c$ ορίζεται το
ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_c^R f(x) dx$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_c^R f(x) dx.$$

↓
σημαίνει ότι
είναι πραγματικός
αριθμός

Τότε ορίζουμε

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_c^R f(x) dx$$

Όμοια αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση
 $f: (-\infty, c] \rightarrow \mathbb{R}$ και αν υπάρχει
το όριο

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^c f(x) dx$$

↓
σημαίνει ότι
είναι πραγματικός
αριθμός

τότε ορίζουμε:

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^c f(x) dx$$

Τέλος θεωρούμε μια συνεχή $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το
οποίο υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^c f(x) dx \text{ και } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_c^R f(x) dx$$

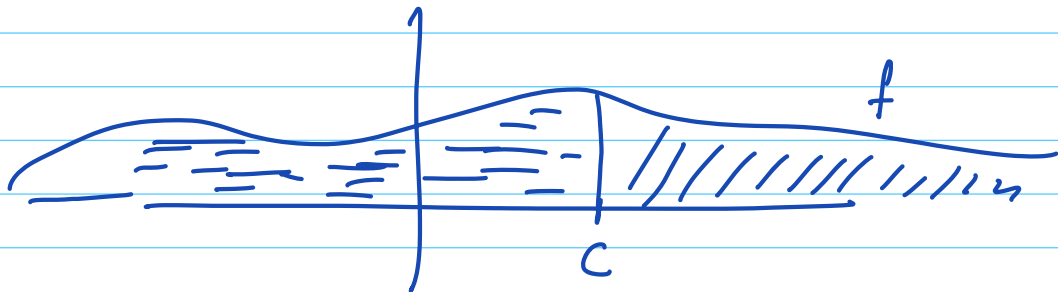
$\in \mathbb{R} \qquad \qquad \qquad \in \mathbb{R}$

Ανγιδύ υποθέτουμε ότi ορίδονται τα

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_c^{+\infty} f(x) dx \quad \text{για κάποιο } c \in \mathbb{R}.$$

Τότε ορίδουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$



Αποδεικνύεται ότi το πιο πάνω είναι ανεξάρτητο του c . Ανγιδύ αν για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ ορίδονται τα $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ και

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \quad \text{τότε για κάθε } d \in \mathbb{R}$$

$$\text{ορίδονται επίσης τα } \int_{-\infty}^d f(x) dx \quad \text{και} \quad \int_d^{+\infty} f(x) dx$$

και ήτοι ισχύει

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{+\infty} f(x) dx.$$

$$\text{Τα } \int_{-\infty}^c f(x) dx, \int_c^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

ονομάζονται χενλκσυμένα ολοκληρώματα
α' είδους.

Παραδείγματα:

$$1) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Άρα} \quad I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{R} \right) \rightarrow 1$$

$$2) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Θεωρούμε $R > 1$.

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^R = \ln R - \ln 1$$

$$= \ln R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$$

Άρα δεν ορίζεται το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$3) \quad I = \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx.$$

Θεωρούμε $R < 0$.

$$\int_R^0 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{2R}^0 e^u du$$

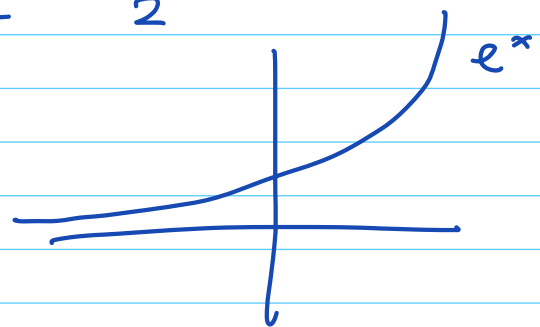
$$\begin{array}{l} u = 2x \\ x=0 \quad u=0 \\ x=R \quad u=2R \\ du = 2 dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} e^u \Big|_{2R}^0$$

$$= \frac{1}{2} (e^0 - e^{2R})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{2R}$$

$$e^{2R} \xrightarrow{R \rightarrow -\infty} 0$$



$$\text{Άρα } \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2R} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους:

Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x=a$.

$$\left[\text{Π.χ. } f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{1}{x} . \right]$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx .$$

Τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx$$

Η περίπτωση $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η f δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x=b$ αντιμετωπίζεται ανάλογα:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) dx$$

Τέλος θεωρούμε $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x=a$ και στο $x=b$.

$$\left[\text{Π.χ. } f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \tan x \right]$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in (a, b)$

έτσι ώστε να υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{και}$$

$$\lim_{r \rightarrow b^-} \int_c^r f(x) dx = \int_c^b f(x) dx.$$

Τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Όπως πριν αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω είναι ανεξάρτητο του c .

Τα $\int_a^b f(x) dx$ όπου u f δεν έχει

συνεχή επέκταση σε κάποια από τα a, b λέγονται γενικευμένα ολοκληρώματα
β' είδους.

Το Ολοκλήρωτικό Κριτήριο

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f: [n, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Τότε η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγχλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο

ολοκλήρωμα $\int_n^{+\infty} f(x) dx$ ορίζεται.

Υπενθύμιση:

$$\int_n^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_n^R f(x) dx$$

Παράδειγμα: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Θεωρούμε την $f: [2, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{έτσι που}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n).$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο
η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ συγκλίνει αν και
μόνο αν ορίζεται $\int_2^{\infty} f(x) dx$.

Για $R > 0$ έχουμε $\int_2^R f(x) dx$

$$= \int_2^R \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^R \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx$$

$$= \ln(\ln x) \Big|_2^R = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2)$$

$\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty$. Άρα δεν ορίζεται

το $\int_2^{\infty} f(x) dx$ και άρα η σειρά

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ αποκλίνει.