

Κεφάλαιο 5 - Δυναμοσειρές

Σειρά από n_0 : $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

Μερικά αθροίσματα:

$$S_0 = a_{n_0}$$

$$S_1 = a_{n_0} + a_{n_0+1}$$

$$S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+(n-n_0)}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Ισχύουν ακριβώς τα ίδια με τις
σειρές από $n_0 = 1$.

Δυναμοσειρά = "άπειρο" πολώνυμο.

Ορισμός: (Δυναμοσειρά)

Δίνεται $c \in \mathbb{R}$ και $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Δυναμοσειρά κέντρου c και συντελεστές

a_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n.$$

Αν γιὰ κάθε x έχουμε τη σειρά
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Συμβολισμός: με $a_0 \cdot (x-c)^0$ εννοούμε
το a_0 ακόμα και αν
 $x=c.$

Γράφουμε επίσης:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots \\ \dots + a_n (x-c)^n + \dots$$

Σχόλιο: Τι πιο πολλές φορές το κέντρο
είναι ίσο με 0.

Οπότε έχουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
 $= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Ερώτημα: Για ποια $x \in \mathbb{R}$ συχλίνει
η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$;

Η σειρά συχλίνει για $x=c$:

$$a_0 + a_1 (c-c) + a_2 (c-c)^2 + \dots + a_n (c-c)^n + \dots \\ = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_n \cdot 0^n + \dots \\ = a_0 \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα:

Δίνεται μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

Τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής:

1) Υπάρχει $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ έτσι ώστε

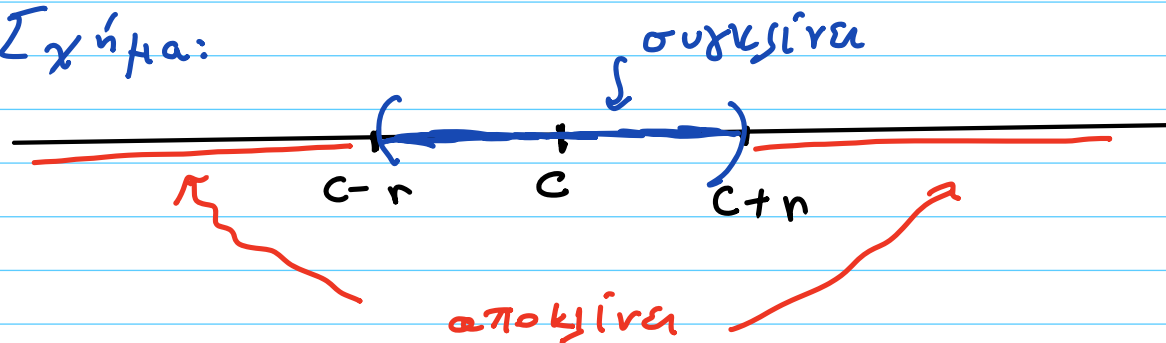
για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-c| < r$ η
σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ συγκλίνει

απολύτως και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$|x-c| > r$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

αποκλίνει.

Σχήμα:



(Για $|x-c| = r$, δηλαδή $x = c \pm r$

εξαρτάται από τα a_n , $n \in \mathbb{N}$).

Αυτό το r είναι μοναδικό και
ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της
δυναμοσειράς.

2) Η σειρά συγκλίνει μόνο για $x=c$.

Λέμε τότε ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης το 0.

3) Η σειρά συγκλίνει και μέγιστα απόλυτα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λέμε τότε ότι η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης το ∞ .

Η εύρεση της ακτίνας σύγκλισης γίνεται συνήθως με το Κριτήριο του Λόγου.

Σχόλιο: Οι δυναμοσειρές μπορούν να ξεκινούν από κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x-c)^n$.
Ισχύουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.

Παραδείγματα

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{κέντρο} = 0$$

$$a_n = 1$$

Εύρεση ακτίνας σύγκλισης:

Θεωρούμε $x \neq 0$ (το κέντρο της δυναμοσειράς)

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Λόγου.

$$\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \rightarrow |x|$$

Άρα για $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει
και για $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Ακρίβεια σύγκλιση $= 1$

Για όλα $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει ;

$|x| < 1 \rightarrow$ συγκλίνει

$|x| > 1 \rightarrow$ αποκλίνει

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Τότε $x^n = 1^n = 1 \rightarrow 1$
ή $x^n = (-1)^n : \text{αποκλίνει}$

Άρα $x^n \not\rightarrow 0$ και άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
αποκλίνει.

Άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει μόνο για
 $x \in (-1, 1)$.

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{κέντρο} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ έχουμε } \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$$

$$= |x| \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| \cdot 0 = 0 < 1$$

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Για $x=0$ = κέντρο η σειρά συγκλίνει)

Ακτίνα σύγκλισης $= +\infty$.

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{4^n}$$

$$\frac{(2x-1)^n}{4^n} = \frac{(2(x-\frac{1}{2}))^n}{4^n} = \frac{2^n}{4^n} \cdot (x-\frac{1}{2})^n$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot (x-\frac{1}{2})^n$$

$$\text{Κέντρο} = \frac{1}{2} \quad a_n = \frac{1}{2^n}$$

Για να βρούμε για ποια $x \in \mathbb{R}$ η σειρά συγκλίνει εξετάσουμε τα ίδια με πριν.

Θεωρούμε $x \neq \frac{1}{2}$ (κέντρο)

$$\left| \frac{(2x-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{(2x-1)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |2x-1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|2x-1|}{4}$$

$$\frac{|2x-1|}{4} < 1 \Leftrightarrow |2x-1| < 4$$

$$\Leftrightarrow -4 < 2x-1 < 4$$

$$\Leftrightarrow -3 < 2x < 5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2 < x - \frac{1}{2} < 2$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| < 2$$

Από το κριτήριο του λόγου η

σειρά συγκλίνει για $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

και αποκλίνει για $x < -\frac{3}{2}$ ή $x > \frac{5}{2}$.

Ακτίνα σύγκλισης = 2

(αυτό το βρίσκουμε από το $|x - \frac{1}{2}| < 2$)

$$x = \frac{5}{2} \quad \frac{(2x-1)^n}{4^n} = \left(2 \cdot \frac{5}{2} - 1\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$$

$$= 4^n \cdot \frac{1}{4^n} = 1$$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ αποκλίνει

$$x = -\frac{3}{2} \quad \frac{(2x-1)^n}{4^n} = \left(2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{1^n} = (-1)^n \cdot 1^n \cdot \frac{1}{1^n} = (-1)^n$$

$(-1)^n \rightarrow 0$ άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$
αποκλίνει

Θεωρήματα Παραγωγής και Ολοκλήρωσης Δυναμοσειρών

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I
και μια δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n, \quad x \in I.$$

(Υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει για
κάθε $x \in I$),

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη

σε κάθε $x \in I$ και ισχύει

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-c)^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2(x-c) + \dots + n a_n (x-c)^{n-1} + \dots$$

Επιπλέον η f είναι ολοκληρώσιμη

και ισχύει

αόριστη ολοκλήρωση

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-c)^{n+1} + \chi$$

όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

Προκύπτει ότι κάθε δυναμ σειρά είναι άπειρη, γοργή παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό του διαστήματος I όπου έχουμε σύγκλιση.

Γιατί ο εξής τύπος:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$$\text{όπου } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n.$$

Γνωστές δυναμ σειρές:

$$1) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$4) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

$$5) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$