

5^ο Κεφάλαιο

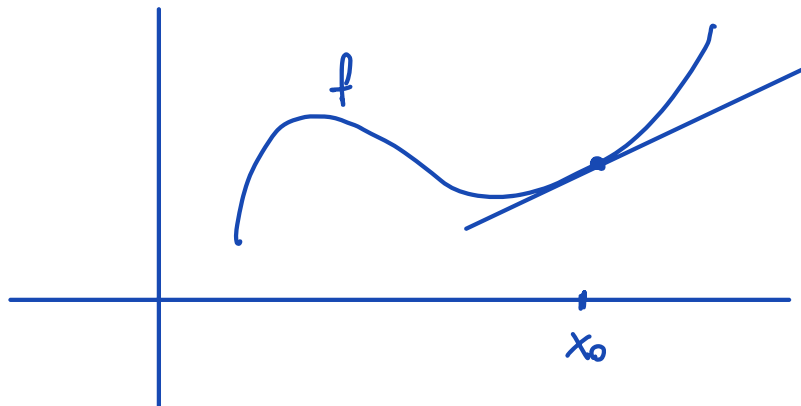
Πολυώνυμα Taylor

Πολυώνυμα Taylor

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και παίρνουμε $x_0 \in (a, b)$.

Στόχος: να προσεγγίσουμε τις τιμές $f(x)$ για τα x "κοντά" στο x_0 .

Αυτή η προσέγγιση θα γίνει με τη βοήθεια πολυωνύμων.



- 1) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 1 .
Μια καλή προσέγγιση είναι να πάρουμε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Παίρνουμε $p(x) = a + b \cdot (x - x_0)$
 $a, b = ; ;$ εξίσωση ευθείας

$$\chi_{\text{ρίση}} = b$$

Θέλουμε :

$$(1.1) \quad p(x_0) = f(x_0)$$

$$(1.2) \quad p'(x_0) = f'(x_0)$$

(δηλαδή η χρίση της
ευθείας, που είναι το
 $b = p'(x_0)$ να είναι
ίση με $f'(x_0)$)

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a + b \cdot (x_0 - x_0) \\ &= a \end{aligned}$$

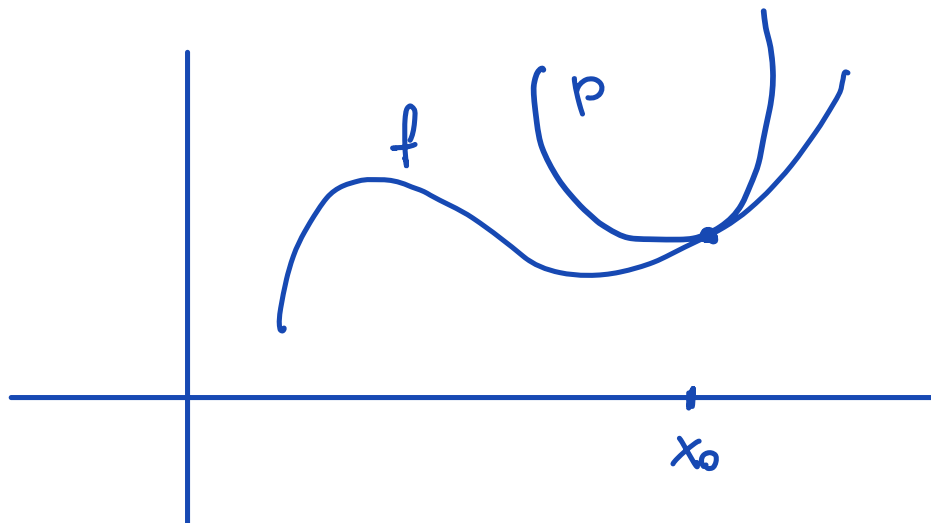
Από (1.1) έχουμε $a = f(x_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Επιπλέον} \quad p'(x) &= 0 + b \cdot 1 = b \\ \text{άρα} \quad p'(x_0) &= b \end{aligned}$$

Από (1.2) έχουμε $b = f'(x_0)$

Λαμβάνουμε ότι $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

2) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 .



Παίρνουμε

$$p(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2$$

Θέλουμε:

$$p(x_0) = f(x_0) \quad (2.1)$$

$$p'(x_0) = f'(x_0) \quad (2.2)$$

$$p''(x_0) = f''(x_0) \quad (2.3)$$

$$p'(x) = b + 2c(x-x_0)$$

$$p''(x) = 2c$$

$$(2.1) \Rightarrow f(x_0) = p(x_0) = a$$

$$(2.2) \Rightarrow f'(x_0) = p'(x_0) = b + 2c \cdot 0 = b$$

$$(2.3) \Rightarrow f''(x_0) = p''(x_0) = 2c$$

$$\text{Άρα} \quad a = f(x_0), \quad b = f'(x_0), \quad c = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$\text{και} \quad p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

3) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 3

Παίρνουμε

$$p(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0)^3$$

$$\begin{aligned}\text{Θέτουμε: } p(x_0) &= f(x_0) \\ p'(x_0) &= f'(x_0) \\ p''(x_0) &= f''(x_0) \\ p^{(3)}(x_0) &= f^{(3)}(x_0)\end{aligned}$$

$$p'(x) = b + 2c(x-x_0) + 3d(x-x_0)^2$$

$$p''(x) = 2c + 3 \cdot 2 \cdot d(x-x_0)$$

$$p^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot d$$

Τελικά βρίσκουμε

$$\begin{aligned}a &= f(x_0) & b &= f'(x_0) & c &= \frac{f''(x_0)}{2!} \\ d &= \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}p(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\end{aligned}$$

Ορισμός (Πολυώνυμα Taylor):

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι n -φορές παραγωγίσιμη, όπου $n \in \mathbb{N}$. Δίνεται επίσης ένα $x_0 \in I$.

Το πολυώνυμο Taylor τάξης n σχετίζεται με p_{n, x_0}^f

και ορίζεται ως εξής:

$$p_{n, x_0}^f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Με τον συμβολισμό Σ έχουμε:

$$p_{n, x_0}^f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Όταν $n = f$ και το x_0 είναι σαφώς συμβολίζουμε το p_{n, x_0}^f πω απλά με P_n .

Παρατηρήσεις: 1) $P_0(x) = f(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$
(σταθερό πολυώνυμο)

2) Βαθμός $(P_n) \leq n$

3) $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$

Σχόλιο: $P_{n, x_0}^f \approx f$ όταν f : πολυώνυμο

Παραδείγματα Πολυωνύμων Taylor για συγκεκριμένες συναρτήσεις

1) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}, x_0 = 0.$

Ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$

(Αυστηρή απόδειξη με επαγωγή.
→ Φυλλάδια Ασκήσεων)

Άρα $f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$

$$p_0(x) = f(0) = 1$$

$$p_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x = 1 + x$$

$$p_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2$$

$$= p_1(x) + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} (x-0)^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!} x^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Γενικά λαχσει:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{N}. \\ x \in \mathbb{R}. \end{matrix}$$

$$2) \quad f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0.$$

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x$$

$$f^{(3)} = +\sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\text{Στο } 0: \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$\text{Επομένως:} \quad P_0(x) = f(0) = \cos 0 = 1$$

$$P_1(x) = P_0(x) + \frac{f'(0)}{1!} (x-0)^1 = 1 + \frac{0}{1!} \cdot x$$

$$= 1$$

$$\text{Βλ. επόμες} \quad \text{ότι} \quad P_1(x) = P_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2$$

$$= 1 + \frac{(-1)}{2!} x^2 = 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

$$P_3(x) = P_2(x) \text{ γιατί } f^{(3)}(0) = 0.$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot (x-0)^4$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4!} \cdot x^4$$

Μηνημονικός κανόνας:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$3) \quad f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = +\sin x$$

$$\text{Σε } 0: \quad f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(0) = -1 \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$P_0(x) = f(0) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!} (x-0)^1 = x$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{0}{2!} (x-0)^2 = P_1(x) = x$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{(-1)}{3!} (x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \text{ γιατί } f^{(4)}(0) = 0$$

$$P_5(x) = P_4(x) + \frac{1}{5!} (x-0)^5$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Μνημονικός κανόνας:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$4) f(x) = \ln(1+x), x \in (-1, 1), x_0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = +\frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

Στο $x = 0$:

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 2! \quad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$P_0(x) = f(0) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x = x$$

$$P_2(x) = x + \frac{(-1)}{2!} \cdot x^2 = x - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!}{3!} x^3$$

$$= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(-3!)}{4!} \cdot x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3!}{4!} x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Μεταφορικά κανόνας:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Εκτιμήσεις τιμών της f με βάση τα πολώνυμα Taylor

Ορισμός: Το πολώνυμο 1^{ου} βαθμού
 $P(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ονομάζεται
γραμμικοποίηση της f στο x_0 και
χρησιεύει στον υπολογισμό τιμών
της $f(x)$ για τα x που είναι "κοντά"
στο x_0 δεδομένου ότι οι τιμές $f(x_0)$
και $f'(x_0)$ είναι γνωστές.

Παράδειγμα: Υπολογίζουμε μια προσέγγιση
της $\sqrt{4.1}$ με τη βοήθεια της γραμμικοποίη-
σης της $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Παίρνουμε
 $x_0 = 4$ και έχουμε $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Άρα } P(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = 2 + \frac{x}{4} - 1$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{x}{4} + 1$$

Για $x = 4.1$ έχουμε

$$P(4.1) = \frac{4.1}{4} + 1 = 1.025 + 1 = 2.025.$$

Επαλήθευση:

$$\begin{array}{r} 2025 \\ 2025 \times \\ \hline 10125 \\ 4050 \\ 0000 \\ 4050 \\ \hline 4.100625 \end{array}$$

$$\text{Άρα } \sqrt{4.1} \approx 2.025$$

Στη συνέχεια μας ενδιαφέρει να έχουμε μια εκτίμηση του σφάλματος της τιμής του ποσυνύψιου Taylor (οποιασδήποτε τάξης) από την τιμή της f .

Εκτίμηση της προσέγγισης με πολυώνυμο Taylor

Ορισμός: Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι n -φορές παραγωγίσιμη, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $R_n^{f, x_0}: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$R_n^{f, x_0}(x) = f(x) - P_n^{f, x_0}(x)$$

Η R_n^{f, x_0} ονομάζεται υπόλοιπο Taylor της f στο x_0 τάξης n

και συμβολίζεται επίσης πιο απλά με R_n .

Θεώρημα: (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor)

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -φορές παραγωγίσιμη.

$$x \neq x_0$$

Τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ ανάμεσα στο x_0 και στο x έτσι ώστε

$$R_n^{f, x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Εφαρμογές:

1) Να δείχθεί ότι:

$$\left| \sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Με p_n συμβολίζουμε το πολυώνυμο
Taylor της f στο $x_0 = 0$.

Γνωρίζουμε ότι: $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

$$\text{και } p_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!}$$

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - p_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου
Taylor υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{έτσι ώστε } R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right)^4$$

όπου R_3 = υπόλοιπο Taylor της f τάξης 3.

$$\text{Επομένως } |R_3\left(\frac{1}{2}\right)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \cdot \frac{1}{2^4}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$|f\left(\frac{1}{2}\right) - P_3\left(\frac{1}{2}\right)| = |R_3\left(\frac{1}{2}\right)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{2^4 \cdot 4!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad \text{άρα } f^{(4)}(\xi) = e^\xi$$

$$0 < \xi < \frac{1}{2}, \quad \text{άρα } e^\xi < e^{1/2} < 3^{1/2} \\ 2 < e < 3$$

Επομένως

$$|R_3\left(\frac{1}{2}\right)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{2^4 \cdot 4!} < \frac{3^{1/2}}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

$$2) \text{ Ισχύει } 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$$

Να δείχθεί με τη βοήθεια του 1) ότι το $\frac{79}{48}$ προσεγγίζει το $\sqrt{e}$ με ακρίβεια τουλάχιστον

χίτων δύο ψηφίων στο δεκαδικό ανάπτυγμα.

Λύση: Παίρνουμε $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε με P_3 , R_3 το πολυώνυμο και το υπόλοιπο Taylor αντίστοιχα της f στο $x_0 = 0$. Τότε

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$$

Στο 1) είδαμε ότι

$$\left| \sqrt{e} - P_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| R_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

δηλαδή ότι

$$\left| \sqrt{e} - \frac{79}{48} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left| \sqrt{e} - \frac{79}{48} \right| < 10^{-2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{προσέγγιση με} \\ \text{ακρίβεια } 2 \end{array} \right.$$

δεκαδικών ψηφίων).

Άρα αρκεί να διαχθεί ότι

$$\frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!} < 10^{-2}.$$

Πράγματι:

$$\frac{\sqrt{3}}{24 \cdot 4!} < \frac{3}{16 \cdot 24} = \frac{1}{16 \cdot 8} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100} = 10^{-2}.$$

$$\text{Άρα } |\sqrt{e} - \frac{79}{48}| \leq \frac{\sqrt{3}}{24 \cdot 4!} < 10^{-2}.$$

□

Επαγώνδευση του 2) με αριθμητική:

$$\frac{79}{48} = \underline{1,6458333 \dots}$$

$$\sqrt{e} \simeq \underline{1,648212}$$

3) Να δείξει ότι

$$\left| \cos(x^2) - \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} \right) \right| \leq \frac{x^{12}}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση,

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \right| \leq \frac{x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν το δείξουμε αυτό τότε αντικαθιστούμε το x με το x^2 και έχουμε το ζητούμενο.

Θεωρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 5ης τάξης στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Τότε } P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) \right| = |f(x) - P_5(x)|$$