

Συναρτήσεις: ορισμός, συνέχεια, όριο, παράγωγος

Σημειώσεις για τις διαλέξεις

Βασίλειος Γρηγοριάδης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συναρτήσεις

Ορισμός:

Συνάρτηση από ένα μη-κενό σύνολο A σε ένα μη-κενό σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση f που σε **κάθε** $x \in A$ αντιστοιχεί **ακριβώς ένα** $y \in B$.

Το A καλείται **πεδίο ορισμού** της f και το B **πεδίο τιμών** ή **σύνολο τιμών**.

Συμβολισμοί: Με $f: A \rightarrow B$ εννοούμε ότι η f είναι συνάρτηση από το A στο B . Αν $x \in A$ συμβολίζουμε με $f(x)$ το μοναδικό y που αντιστοιχεί στο x μέσω της f .

Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και παίρνουν πραγματικές τιμές.

Τα πεδία ορισμού και τιμών μπορούν να είναι όμως αυθαίρετα σύνολα, π.χ. σύνολα από πίνακες.

Οι συναρτήσεις που μελετάμε συνήθως ορίζονται μέσα από κάποιο τύπο, π.χ. $f(x) = x^2$. Δεν είναι όμως απαραίτητο μια συνάρτηση να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ η **εικόνα** της f είναι το σύνολο

$$f(A) = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A \}.$$

Πιο γενικά αν $I \subseteq A$ τότε η **εικόνα του συνόλου I** μέσω της f είναι το σύνολο

$$f(I) = \{ y \in B \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in I \}.$$

Η $f: A \rightarrow B$ είναι **επί** συνάρτηση αν $f(A) = B$ και **1-1** συνάρτηση αν:

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$,

ισοδύναμα

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ 1-1 και επί τότε ορίζεται η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1}: B \rightarrow A$ ως εξής:

$$f^{-1}(y) = \text{το μοναδικό } x \in A \text{ με } f(x) = y.$$

Παραδείγματα: 1) Η συνάρτηση $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

2) Η συνάρτηση $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

Περιορισμός συνάρτησης: Δίνεται μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ και X ένα μη-κενό υποσύνολο του A . Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h: X \rightarrow B : h(x) = f(x)$. Η h ονομάζεται **περιορισμός της f** στο σύνολο X και συνήθως συμβολίζεται με $f|X$. Η f ονομάζεται **επέκταση της h** .

Σύνθεση συναρτήσεων: Δίνονται δύο συναρτήσεις $f: X \rightarrow Y$ και $g: Y \rightarrow Z$. Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $h: X \rightarrow Z: x \mapsto g(f(x))$. Η h συμβολίζεται ως $g \circ f$ και διαβάζεται με διαφορετικούς τρόπους:
"g συντεθειμένη με την f", "g της f", "g κύκλος f" κ.λ.π.

Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν τη σύνθεση περιορίζοντας κατάλληλα τα πεδία ορισμού: αν $f: A \rightarrow B$ και $g: C \rightarrow Z$ και το σύνολο $X = \{ x \in A \mid f(x) \in C \}$ είναι μη-κενό, τότε ορίζεται η $g \circ f: X \rightarrow Z: x \mapsto g(f(x))$.

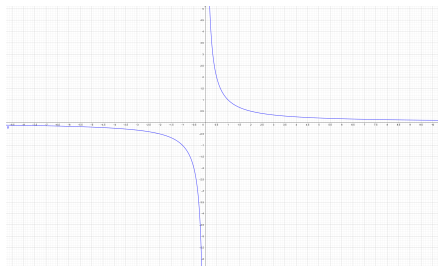
Στην ουσία όμως είναι **σύνθεση των περιορισμών** $g|f(X)$ και $f|X$.

Η **γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ είναι το εξής υποσύνολο του $A \times B$,

$$C_f = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = f(x) \}.$$

Στην περίπτωση όπου τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουμε $C_f \subseteq \mathbb{R}^2$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση με βάση ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

Π.χ. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1/x$.



Στοιχειώδεις Συναρτήσεις

(Θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε κάποιες από αυτές σε μεταγενέστερο στάδιο)

(1) Οι σταθερές συναρτήσεις $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Τα πολυώνυμα $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) Οι ρητές συναρτήσεις $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ και $q(x) \neq 0$, όπου p, q είναι πολύωνυμα.

(4) Η συνάρτηση της n -στης ρίζας, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$.

(5) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(6) Η λογαριθμική συνάρτηση (αντίστροφη της εκθετικής)
 $\ln(x)$, $x > 0$.

(7) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos(x)$, $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\tan(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

(8) Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \\ \arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1).$$

(9) Η συνάρτηση της απολύτου τιμής, $f(x) = |x|$ και γενικότερα οι συναρτήσεις που ορίζονται με διακλάδωση όλων των προηγούμενων.

(10) Η σύνθεση όλων των προηγούμενων, είτε μεταξύ τους, είτε με τις βασικές πράξεις του $\mathbb{R}$, π.χ.

$$f(x) = \frac{\sqrt{|\cos(x)|} + 2x^2 - x^3}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Συνεχείς συναρτήσεις

Ορίζεται η έννοια της συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x \in A$.

Δεν δίνουμε τον αυστηρό ορισμό, αλλά χρησιμοποιούμε το επόμενο αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τη συνέχεια.

Θεώρημα: (Αρχή Μεταφοράς)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 f είναι συνεχής στο x .
- 2 Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \rightarrow x$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

Η Αρχή Μεταφοράς μας επιτρέπει να αποδείξουμε ιδιότητες για τη συνέχεια με βάση τις ιδιότητες του ορίου ακολουθίας.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = -5x^2$ είναι συνεχής. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \rightarrow x$, τότε $x_n^2 \rightarrow x^2$ και $-5x_n^2 \rightarrow -5x^2$. Άρα $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Παράδειγμα: Αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x \in A$ τότε και η συνάρτηση

$f + g: A \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t) + g(t)$ είναι συνεχής στο x .

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του A με $x_n \rightarrow x$. Πρέπει να δείξουμε ότι $(f + g)(x_n) \rightarrow (f + g)(x)$.

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x και $x_n \rightarrow x$ έχουμε από την Αρχή Μεταφοράς $f(x_n) \rightarrow f(x)$ και $g(x_n) \rightarrow g(x)$. Άρα $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x) + g(x)$, δηλαδή $(f + g)(x_n) \rightarrow (f + g)(x)$.

Η Αρχή Μεταφοράς χρησιμοποιείται επίσης για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής σε κάποιο x_0 .

Αρκεί να **βρούμε** μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο πεδίο ορισμού της f με τις ιδιότητες $x_n \rightarrow x_0$ και $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = 1/n$, $n \geq 1$. Τότε $x_n \rightarrow 0$ αλλά $f(x_n) = 1 \not\rightarrow 0 = f(0)$.

Βασικές Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

A) Άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A' \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A \cap A'$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε:

- 1 οι συναρτήσεις $f \pm g: A \cap A' \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \pm g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,
- 2 οι $f \cdot g, f/g: A \cap A' \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)$ είναι συνεχείς στο x_0 ,
(στο πηλίκο θεωρούμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap A'$),
- 3 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\lambda f: A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .

B) Σύθεση συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και αν η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύθεση $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .

Γ) Θεμελιώδεις συνεχείς συναρτήσεις.

(1) Οι σταθερές συναρτήσεις, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^n$, όπου $n \geq 1$.

(3) Όλα τα πολυώνυμα.

(4) Η συνάρτηση της n -οστης ρίζας, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, όπου $n \geq 1$.

(5) Η συνάρτηση της απόλυτου τιμής, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.

(6) Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση.

(7) Όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιες συνεχείς συναρτήσεις από παλιές, π.χ. αν η f είναι συνεχής τότε και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης συνεχείς,

$$g_1(x) = f(x)^2 + (f(x) - 1) \cdot x^2, \quad g_2(x) = \cos(f(x) + 8),$$

$$g_3(x) = \sqrt{f(x)}, \quad \text{όπου } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα

Θεώρημα: (Ενδιάμεσης τιμής)

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ($a < b$). Τότε για κάθε y_0 , το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ με $f(x_0) = y_0$.

2η ισοδύναμη διατύπωση. Έστω I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η εικόνα $f(I)$ είναι επίσης διάστημα.

Ιδέα απόδειξης.

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$. Θεωρούμε το

$$x_0 = \sup \{ x \in [a, b] \mid \forall z \leq x \implies f(z) \leq y_0 \}.$$

Αποδεικνύεται ότι $f(x_0) = y_0$. □

Εφαρμογή: Ύπαρξη n -οστής ρίζας. Έστω $y > 0$, και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x > 0$ με $x^n = y$, δηλαδή $x = \sqrt[n]{y}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $b > y$ (Αρχιμήδεια Ιδιότητα), οπότε θα έχουμε $b^n \geq b > y$ και τη συνάρτηση $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^n$. Έχουμε $f(0) = 0$ και $f(b) = b^n$. Άρα $y \in (f(0), f(b))$ και από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x \in (0, b)$ με $f(x) = y$, δηλαδή $x^n = y$.
(Η μοναδικότητα ισχύει επειδή η f είναι 1-1.)

Θεώρημα: (Μέγιστη και ελάχιστη τιμή συνεχούς συνάρτησης)

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Υπάρχουν δηλαδή τα $\max f([a, b])$ και $\min f([a, b])$.

Για την απόδειξη του πιο πάνω αρχικά δείχνει κανείς ότι κάθε συνεχής $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **φραγμένη**, δηλαδή ότι το $f([a, b])$ είναι φραγμένο σύνολο.

Θεώρημα: (Συνεχούς Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω I διάστημα και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 1-1 συνάρτηση. Τότε

- 1 f είναι γνησίως μονότονη και
- 2 Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Όριο Συνάρτησης

Δίνεται ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Λέμε ότι το b είναι **σημείο συσσώρευσης** του A αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του A με $x_n \rightarrow b$ και $x_n \neq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα:

- 1 $A = [0, 1)$ και $b = 1$.
- 2 $A = [0, \infty)$ και $b = \infty$.
- 3 $A = [0, 1)$ και $b = 0$.
- 4 Το 2 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $A = [0, 1] \cup \{2\}$.

Παρατηρούμε ότι το σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου μπορεί να είναι ή να μην είναι στοιχείο του συνόλου. Επίσης δεν είναι απαραίτητο ότι ένα στοιχείο του συνόλου είναι σημείο συσσώρευσής του.

Ορίζεται η έννοια του **ορίου συνάρτησης** $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ όταν το x τείνει σε κάποιο b που είναι σημείο συσσώρευσης του A . Όπως με τη συνέχεια συνάρτησης δεν δίνουμε τον αυστηρό ορισμό της έννοιας του ορίου, αλλά χρησιμοποιούμε το επόμενο αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει αυτή την έννοια.

Θεώρημα: (Αρχή Μεταφοράς για τα όρια)

Θεωρούμε $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ που είναι σημείο συσσώρευσης του A . Τότε για κάθε $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$.
- 2 **Για κάθε** ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του A με την ιδιότητα $x_n \rightarrow x_0$ **και** $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $f(x_n) \rightarrow \ell$.

Η Αρχή Μεταφοράς για τα όρια μας βοηθά να υπολογίσουμε όρια συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 17, & x = 0. \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο 0 με $x_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow 0$.
Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Η Αρχή Μεταφοράς βοηθά επίσης στο να δείξουμε τη **μη-ύπαρξη του ορίου**.

Κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και υπάρχουν δύο ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με τις ιδιότητες:

- 1 $x_n \neq b$ και $y_n \neq b$ για κάθε $n \geq 1$,
- 2 $x_n \rightarrow b$ και $y_n \rightarrow b$, και
- 3 $f(x_n) \rightarrow \ell_1$, $f(y_n) \rightarrow \ell_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$ (μπορεί $\ell_1, \ell_2 = \pm\infty$),

τότε **δεν υπάρχει** το όριο $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1/x$. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Πρέπει να **βρούμε** δύο κατάλληλες ακολουθίες. Παίρνουμε $x_n = 1/n$ και $y_n = -1/n$. Τότε $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$ και $y_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 1$.

Επιπλέον $f(x_n) = n \rightarrow +\infty$ και $f(y_n) = -n \rightarrow -\infty$. Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Ιδιότητες: Στα όρια ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες:

Π.χ.

$$\lim_{x \rightarrow b} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow b} f(x) + \lim_{x \rightarrow b} g(x) \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Επίσης ισχύουν οι γνωστοί κανόνες πράξεων με το άπειρο. Για παράδειγμα αν $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow b} (f + g)(x) = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/f(x) = 0$.

Όριο και Συνέχεια: Στην περίπτωση που το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και το x_0 είναι σημείο συσώρευσής του τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Όριο και σύνθεση συναρτήσεων: Αν υπάρχει το όριο $y_0 = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ και ανήκει στο $\mathbb{R}$ και η g είναι συνεχής στο y_0 τότε

$$\lim_{x \rightarrow b} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \rightarrow b} f(x)) = g(y_0).$$

Μερικά γνωστά όρια.

① $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty.$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^k = 0.$

③ Ισχύουν τα ίδια με τα πιο πάνω αν αντικαταστήσουμε το x^k με ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού ≥ 1 .

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$

⑤ $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty.$

⑥ $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} f(x) = -\infty$, όπου $f = \tan |(-\pi/2, \pi/2).$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

Πλευρικά όρια. Ορίζονται οι έννοιες του ορίου όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά και του ορίου όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά (πλευρικά όρια).

Ισχύουν τα ανάλογα με πριν. Απλώς όπου έχουμε ακολουθίες πρέπει αυτές να βρίσκονται στην αντίστοιχη πλευρά του x_0 .
Π.χ. Για να ορίζεται η έννοια του ορίου της f όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο πεδίο ορισμού της f με $x_0 < x_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Παράγωγος συνάρτησης

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το I είναι διάστημα και $x \in I$. Τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $I \setminus \{x_0\}$ και επομένως ορίζεται η έννοια του ορίου της συνάρτησης $x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Λέμε ότι η **συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0** ή αλλιώς **διαφορίσιμη στο x_0** αν υπάρχει το όριο της τελευταίας συνάρτησης όταν το x τείνει στο x_0 και είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Με άλλα λόγια υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $I \setminus \{x_0\}$ με $x_n \rightarrow x_0$ να ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \ell$.

Σε αυτή την περίπτωση το πιο πάνω όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ ή $\frac{df}{dx}(x_0)$ και ονομάζεται *παράγωγος της f στο x_0* .

Η f λέγεται *παραγωγίσιμη* ή αλλιώς *διαφορίσιμη* αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ *σε κάθε* $x \in A$.

Η παράγωγος της f στο x_0 είναι η κλίση της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Βασικές ιδιότητες:

- 1 Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 .
- 2 Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, π.χ. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- 3 Μάλιστα γνωρίζουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχείς σε **κάθε** $x \in [0, 1]$ αλλά δεν παραγωγίζονται σε **κανένα** $x \in [0, 1]$.
- 4 Ισχύουν όλοι οι γνωστοί κανόνες παραγωγίσης, π.χ. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ κ.τ.λ.
- 5 Επομένως σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο με βάση τους γνωστούς κανόνες. Σε κάποιες όμως *εξαιρετικές περιπτώσεις* η παράγωγος υπολογίζεται με βάση τον ορισμό.

Οι παράγωγοι μερικών γνωστών συναρτήσεων

Συνάρτηση f

① Σταθερή

② x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)

③ x^q ($q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$)

④ $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

⑤ $\sin x$

⑥ $\cos x$

⑦ $\tan x$

⑧ e^x

⑨ a^x ($a > 0$)

⑩ $\ln x$ ($x > 0$)

Παράγωγος f'

0

nx^{n-1}

qx^{q-1} ($q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$)

$na_n x^{n-1} + \dots + a_1$

$\cos x$

$-\sin x$

$1/\cos^2(x)$

e^x

$a^x \cdot \ln(a)$ ($a > 0$)

$1/x$ ($x > 0$)

Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα: (Αντίστροφης Συνάρτησης για Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις)

Έστω $a < b$ και $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, 1-1 και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$.

Αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε η $f^{-1}: f((a, b)) \rightarrow (a, b)$ είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και η παράγωγός της δίνεται από τη σχέση

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ιδέα απόδειξης. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής η εικόνα $f((a, b))$ είναι διάστημα. Επίσης

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \right)^{-1} = \left(\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \right)^{-1}.$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση
 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : f(x) = x^2$. Η f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη
με $f'(x) = 2x$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η
 $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
Από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$$

όπου $y = f(x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$.

(Παρατηρούμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.)

Άρα $x = \sqrt{y}$ και επομένως

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2}.$$

Υπολογισμός παραγώγου της συνάρτησης $\arcsin$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1] : f(x) = \sin(x)$.

Είναι συνεχής, 1-1 και παραγωγίσιμη. Έστω $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, εξετάζουμε που έχουμε $f'(x) = 0$.

Ισχύει $f'(x) = \cos x$ άρα $f'(x) = 0$ ακριβώς όταν $x = \pm\pi/2$.

Επομένως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Θεωρούμε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και $y = \sin x \in (-1, 1)$. Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης η $\arcsin$ είναι παραγωγίσιμη στο y και

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}.$$

Τέλος εκφράζουμε το $\cos x$ ως συνάρτηση του y . Από τη σχέση $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ βρίσκουμε $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}$.

Επειδή $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos x > 0$ άρα παίρνουμε το $\sqrt{1 - y^2}$.

Καταλήγουμε:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad y \in (-1, 1).$$

Η παράγωγος της $\arcsin$ δεν υπάρχει στα $y = \pm 1$.

Τύποι παραγώγων αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θεμελιώδη Θεωρήματα σχετικά με την παράγωγο

Λέμε ότι η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο $x_0 \in A$ ή ότι το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f αν υπάρχει ανοικτό διάστημα I κέντρου x_0 έτσι ώστε το $f(x_0) = \min f(A \cap I)$, με άλλα λόγια να ισχύει $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Όμοια ορίζεται η έννοια του **τοπικού μεγίστου**. Με τον όρο **τοπικό ακρότατο** εννοούμε σημείο τοπικού ελαχίστου ή τοπικού μεγίστου.

Θεώρημα: (Αρχή Fermat)

Έστω $x \in (a, b)$ και $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x . Αν το x είναι σημείο τοπικού ακρότατου της f τότε $f'(x) = 0$.

Ιδέα απόδειξης. Αν $f'(x) > 0$ τότε για οποιοδήποτε $0 < a < f'(x)$ υπάρχει ένα διάστημα I κέντρου x με την ιδιότητα $f(y) - f(x) > a \cdot (y - x) > 0$ για κάθε $y > x$ στο I καθώς και $f(y) - f(x) < a \cdot (y - x) < 0$ για κάθε $y < x$ στο I .

Θεώρημα: (Θεώρημα Rolle)

Αν $a < b$, η $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $f'(\xi) = 0$.

Ιδέα απόδειξης. Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αν είναι σταθερή το συμπέρασμα είναι σαφές. Αν δεν είναι σταθερή τότε η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή διαφέρουν, οπότε μία από αυτές λαμβάνεται σε κάποιο $\xi \in (a, b)$. Εφαρμόζουμε την Αρχή Fermat.

Θεώρημα: (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Έστω $a < b$ και συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ιδέα απόδειξης. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle στη συνάρτηση

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Θεώρημα: (Παραγώγος και Μονοτονία)

Έστω $a < b$ και συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b)$.

- 1 Αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f'(x) > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, και αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f'(x) \geq 0$ τότε η f είναι αύξουσα.
- 2 Αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f'(x) < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα, και αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f'(x) \leq 0$ τότε η f είναι φθίνουσα.
- 3 Αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή.

Ιδέα απόδειξης του 3): Έστω $c, d \in [a, b]$ με $c < d$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (c, d)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$
 Αφού $f'(\xi) = 0$ έχουμε $f(c) = f(d)$. Τα άλλα αποδεικνύονται όμοια.

Θεώρημα: (Κριτήριο ύπαρξης τοπικού ακρότατου)

Έστω $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in (a, b)$ με $f'(x_0)$ και για το οποίο υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $f''(x_0)$ της f στο x_0 .

- 1 Αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .
- 2 Αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Ιδέα απόδειξης για το 1). Επειδή $f''(x_0) = g'(x_0) > 0$, όπου $g = f'$, προκύπτει όπως στην απόδειξη της Αρχής του Fermat ότι για τα y, z σε ένα ανοικτό διάστημα I κέντρου x_0 με $y < x_0 < z$ ισχύει $g(y) < g(x_0) < g(z)$, δηλαδή $f'(y) < 0 < f'(z)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα αριστερότερα του x_0 στο I και γνησίως αύξουσα δεξιότερα του x_0 στο I . Το 2) αποδεικνύεται όμοια.

Θεώρημα: (Κανόνας de L' Hospital)

Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα I , ένα σημείο x_0 που ανήκει στο I ή είναι άκρο του I και συναρτήσεις $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. (Μπορεί να έχουμε $I = (-\infty, 0)$ και $x_0 = -\infty$.) Υποθέτουμε ότι έχουμε τα εξής:

- 1 οι f, g είναι παραγωγίσιμες σε όλο το I εκτός ίσως από το x_0 ,
- 2 $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$,
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$,
- 4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σχόλιο για την απόδειξη. Στηρίζεται σε μια γενικευμένη μορφή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.