

Σειρές:

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ορίζουμε την ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

;

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Δηλαδή $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο αριθμό $s \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $s_n \rightarrow s$.

Σκεφτόμαστε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σαν ένα

“άπειρο άθροισμα” $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Η ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Επίσης ταντίζουμε μια σειρά με το όριό της (εφόσον αυτό υπάρχει) δηλαδή με το s που πάνω.

Με αυτή την ταύτιση έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Παραδείγματα:

1) Γεωμετρική σειρά.

Δίνεται $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$.

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Γνωρίζουμε ότι $\underbrace{x + x^2 + \dots + x^n}_{S_n} = x \frac{(1-x^n)}{1-x}$

(αποδεικνύμε με επαγωγή)

Επειδή $|x| < 1$ έχουμε $x^n \rightarrow 0$

$$\text{Άρα } \frac{x(1-x^n)}{1-x} \rightarrow \frac{x \cdot (1-0)}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

2) Τηλεσκοπικές σειρές

(αυτή είναι κατηγορία παραδειγμάτων)

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Τότε $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Με επαγωγή
αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

3) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Θεωρούμε $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = -1 + 1 + - + (-1)^n$,
 $n \geq 1$.

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0$$

$$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad s_4 = s_3 + 1 = 0$$

$$\text{Γενικά ισχύει} \quad s_{2n+1} = -1$$

$$s_{2n} = 0$$

Η ακολουθία $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει δύο υποακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς.
Επομένως δεν συγκλίνει.

Διηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Προσοχή: Στις σειρές δεν μπορούμε να κάνουμε αναδιατάξεις ή ομαδοποιήσεις.

4) Η αρμονική σειρά.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται αρμονική σειρά και αποκλίνει. (!)

Απόδειξη: Θετουμε $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Αν η σειρά συγκλίνει θα υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ με $s_n \rightarrow s$.

Άρα $s_{2n} \rightarrow s$ και

$$s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0$$

Από την άλλη:

$$s_{2n} - s_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} - (1 + \dots + \frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\xleftarrow{\hspace{1.5cm}} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ n \text{ - όροι}$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq 1$.

Άρα γιατί είπαμε $s_{2n} - s_n \rightarrow 0$.

Πρόταση:

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \rightarrow 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.
(π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$)

Πρόταση:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$,

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(Για $p=1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά που αποκλίνει).

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση:

Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

συγκλίνουν τότε και οι σειρές

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$, όπου $c \in \mathbb{R}$,

συγκλίνουν και ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

συγκλίνει απόλυτως αν συγκλίνει

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Πρόταση: Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτως τότε συγκλίνει (κανονικά).

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

2) δέα απόδειξης: $t_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$\begin{matrix} n > m \\ |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = t_n - t_m \end{matrix}$$

Η $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy (δεν το ορίσαμε)

άρα και η $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy,

άρα συγκλίνουσα (δεν το αποδείξαμε).

ΣΟΣ Κριζήρια Σύγκλισης Σειρών ΣΟΣ

1) κριτήριο σύγκλισης

Αν $|a_n| \leq b_n$, $n \geq 1$ και αν
η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε
η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτως.

Π.χ. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(n^2)}{2^n}$

συγκλίνει απόλυτως.

Γιατί: $\left| \frac{(-1)^n \sin n^2}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ και

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει.

Ιδέα απόδειξης: $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$, $s_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$

$n > m$

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = t_n - t_m$$

$$\swarrow = |t_n - t_m|$$
$$b_n \geq 0$$

So ^S2) Το κριτήριο λόγου (D'Alembert)

Θεωρούμε ότι υπάρχει το όριο

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

α) Αν $l < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει απόλυτως.

β) Αν $l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Επίσης αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ τότε πάλι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $l = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα

π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγχλίνει

$$\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \right)$$

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \quad \text{άρα η}$$

σειρά συγχλίνει.

Ιδία απόδειξη:

α) Επιλέχουμε $\varepsilon > 0$ με $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 + \varepsilon =: \rho < 1$

τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ απ' όπου

προκύπτει επαγωγικά ότι

$$|a_n| < \rho^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Εφαρμόζουμε το Κριτήριο Σύγκρισης.

$$\beta) \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 + \varepsilon =: \rho > 1$$

τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

3) Κριτήριο ρίδας (Cauchy)

- 1) Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτως.
- 2) Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ με $\ell > 1$ ή $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow +\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

π.χ. 1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ συγκλίνει απόλυτως.

$$\text{Έχουμε } \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0$$

$0 < 1$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο των ρίδας.

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right)^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1.$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο των ρίδας.

Ιδέα απόδειξης:

Όπως στο κριτήριο λόγου.

4) Κριτήριο Leibniz

Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γθίνουσα
και $a_n \rightarrow 0$ τότε η σειρά
 $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \cdot a_n)$ συγχλίνει.

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Έχουμε $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με
 $a_n = \frac{1}{n}$ είναι γθίνουσα .

Από το κριτήριο το Leibniz η σειρά
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγχλίνει.

Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
δεν συγχλίνει απόλυτα. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right)$

Δεία απόδειξης:

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$$

$$s_{2(m+1)} = s_{2m+2} = s_{2m} - a_{2m+1} + a_{2m+2} \\ \leq s_{2m}$$

γιατί $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$

$$s_{2(m+1)-1} = s_{2m+1} = s_{2m-1} + a_{2m} - a_{2m+1} \\ \geq s_{2m-1}$$

γιατί $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow$

Επιπλέον $s_{2m} - s_{2m-1} = a_{2m} \geq 0$

Άρα $s_1 \leq s_{2n-1} \leq s_{2n} \leq s_2$

$(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\uparrow$ και άνω γραμμική

$(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι $\downarrow$ και κάτω γραμμική

και $|s_{2n} - s_{2n-1}| = |a_{2n}| \rightarrow 0$.

Προκύπτει ότι $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

5) Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Θεωρούμε $a_n, b_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$.

A) Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \text{ με } l > 0$

τότε είτε και οι δύο σειρές
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, είτε
και οι δύο αποκλίνουν.

B) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ και αν

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Γ) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ και αν

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει τότε και

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{4n^4 - 2n^2 + 5}$$

$$\Theta \text{ έχουμε } a_n = \frac{n^2 + 5n - 1}{4n^4 - 2n^2 + 5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{Τότε} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 5n - 1}{4n^4 - 2n^2 + 5} \cdot n^2$$

$$= \frac{n^4 + 5n^3 - n^2}{4n^4 - 2n^2 + 5} = \frac{1 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^4}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} > 0$$

Άρα είμαστε στην Περίπτωση Α)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

άρα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$$

Θέτουμε $a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ και $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$
 $n = 1, 2, \dots$

Τότε $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{n^2+2} \cdot n = \frac{n^2+n}{n^2+2}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} \rightarrow 1 > 0$$

Άρα είναι πάλι στην Περίπτωση
 Α).

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}$$

α' τρόπο: $\frac{4^n}{2^n} - \frac{5}{2^n} \rightarrow +\infty - 0 = +\infty$

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n = \frac{4^n - 5}{2^n}$ δεν

συγκλίνει στο 0, άρα η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Β' τρόπο: Με το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

$$b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Τότε} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n - 5}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 - \frac{5}{4^n} \rightarrow 1 > 0$$

Άρα είμαστε στην περίπτωση 4) του κριτηρίου.

$$\text{Η} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \quad \text{αποκλίνει}$$

$$\text{άρα και η} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{αποκλίνει.}$$