

Κεφάλαιο 2 Ακολουθίες - Σειρές

Ορισμός: Ακολουθία σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$ είναι μία συνάρτηση $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$

Εδώ θα έχουμε $X = \mathbb{R}$, δηλαδή θα κλάμε για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Συμβολισμός: Αντί να γράφουμε $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$ γράφουμε $a_n = \varphi(n) = n$ τιμή του φ στο $n \in \mathbb{N}$, και συμβολίζουμε το φ με $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Επίσης μπορούμε να συμβολίσουμε μια ακολουθία με $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ κ. τ. λ.

Τέλος όταν ορίζουμε τις ακολουθίες ^{ορίζουμε} ~~γράφουμε~~ συνήθως την τιμή a_n .

Δηλαδή γράφουμε $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με σχήμα, δεν κάνουμε τη γραφική της παράσταση αλλά αναπαριστούμε κάποια a_n πάνω σε μια ευθεία γραμμή.

Π.χ. $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

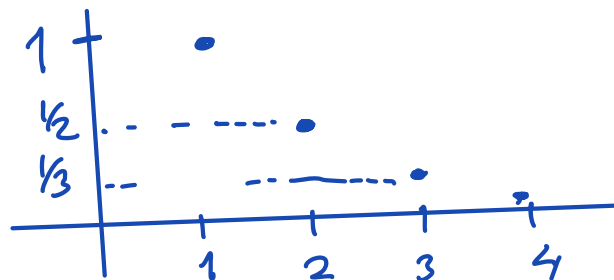
Γραφική παράσταση:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$



(Αναπαράσταση σε ευθεία γραμμή)

Συνήθως έχουμε:



Το a_n λέγεται όρος της ακολουθίας

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και ειδικότερα n -στός όρος.

Τέλος όταν έχουμε το σύμβολο " a_n " εντός αν αναφέρεται διαφορετικά θα εννοούμε φυσικό αριθμό.

Επομένως γράβουμε συνήθως $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$.

Παραδείγματα:

$$1) \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1}, \quad n \geq 1$$

$$2) \quad a_n = (-1)^n, \quad n \geq 1$$



$$3) \quad a_n = \begin{cases} n^2, & n: \text{άρτιος} \\ 0, & n: \text{περιττός} \end{cases}$$

Μονότονες ακολουθίες:

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ἔχεται:

α) αύξουσα αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$
 ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$

(που είναι ισοδύναμο με το εξής:
 για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$
 αν $n \leq m$ τότε $a_n \leq a_m$)

β) γνησίως ή γνήσια αύξουσα αν
 για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$.

γ) φθίνουσα αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$
 ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$

δ) γνησίως ή γνήσια φθίνουσα
 αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει
 $a_n > a_{n+1}$.

Συμβολισμοί: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \uparrow$: αύξουσα
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \updownarrow$: γνησίως
 αύξουσα

όμοια χρησιμοποιούμε τα $\downarrow$ και $\downarrow$ για
 τις φθίνουσες και γνησίως φθίνουσες
 ακολουθίες αντίστοιχα.

Παραδείγματα:

$$1) \quad a_n = \sqrt{n^2 + 1}, \quad n \geq 1$$

Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} n^2 &< (n+1)^2 \\ \text{άρα } n^2 + 1 &< (n+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } \sqrt{n^2 + 1} < \sqrt{(n+1)^2 + 1}$$

$$\text{Συνεπώς } a_n < a_{n+1}.$$

$$\text{Άρα } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow.$$

$$2) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 3.$$

$$\left(\text{Δηλαδή } a_n = \begin{cases} 1, & n=1,2 \\ \frac{1}{n}, & n \geq 3 \end{cases} \right)$$

$$\text{Έχουμε } a_1 \geq a_2$$

$$\text{και για } n \geq 2 \text{ έχουμε } a_n > a_{n+1}.$$

$$\text{Άρα } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow.$$

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

$$3) \quad a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείχνουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

- Δεν είναι αύξουσα: βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ με $a_n \not\leq a_{n+1}$ δηλαδή $a_n > a_{n+1}$.

$$\text{Εδώ έχουμε } a_{456} = 1 > -1 = a_{457}$$

$$(\text{πιο απλά } a_2 = 1 > -1 = a_3)$$

- Δεν είναι φθίνουσα: βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ με $a_n \not\geq a_{n+1}$, δηλαδή $a_n < a_{n+1}$.

$$\text{Εδώ έχουμε } a_{457} = -1 < 1 = a_{458}.$$

Μονόζωνη ακολουθία είναι η ακολουθία

που είναι αύξουσα ή φθίνουσα και

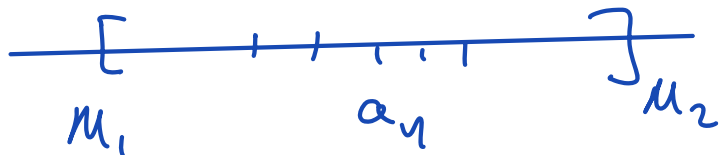
γνησίως μονότονη είναι η ακολουθία που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Φραγμένες ακολουθίες:

Ορισμός: Μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται :

α) φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|a_n| \leq M$,

ισοδύναμα : υπάρχουν $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ με $M_1 < M_2$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $a_n \in [M_1, M_2]$.



β) άνω φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $a_n \leq M$

γ) κάτω φραγμένη αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $a_n \geq m$.

Σύγκριση ακολουθιών:

Ορολογία: Λέμε ότι μια ιδιότητα P που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς ισχύει σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ή

τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν υπάρχει

$n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $P(n)$.

Παραδείγματα:

$$1) \quad A = \{5, 8, 21, 63\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1000\}$$

Τότε ισχύει $n \in A$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

$$2) \quad A = \{2, 5, 7\}$$

Αν το A περιείχε σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ θα ήταν, άπειρο, αλλά το A είναι πεπερασμένο.

$$3) \quad A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Το A δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ γιατί για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n > n_0$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή $n \notin A$.

Ένα τέτοιο n είναι το $3n_0 + 1$.

Γενικά ισχύει το εξής:

το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$
αν και μόνο αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$
είναι πεπερασμένο.

$$\downarrow \\ \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$$

Στα πιο πάνω παραδείγματα:

• αν $A = \{5, 8, 21, 63\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1000\}$

τότε $\mathbb{N} \setminus A = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, \dots, 20, 22, \dots, 62, 64, \dots, 999\}$

πιο απλά $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{0, \dots, 999\}$

άρα $\mathbb{N} \setminus A$: πεπερασμένο
άρα το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

• αν $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

τότε $\{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \setminus A$

$\uparrow$
άπειρο

άρα $\mathbb{N} \setminus A$ είναι άπειρο
άρα το A δεν περιέχει σχεδόν όλα
τα $n \in \mathbb{N}$.

Διασποδική περιγραφή
του ορίου ακολουθίας

Παίρνουμε $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα κέντρου 0
π.χ. $I_1 = (-10^{-2}, 10^{-2}) = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$.

Εξετάζουμε για ποια $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \in I_1$.

$$n = 1 \quad a_1 = 1 \notin I_1$$

$$n = 2 \quad a_2 = \frac{1}{2} \notin I_1$$

$$n = 3 \quad a_3 = \frac{1}{3} \notin I_1$$

⋮

$$n = 99 \quad a_{99} = \frac{1}{99} \notin I_1 = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$$

$$n = 100 \quad a_{100} = \frac{1}{100} \notin I_1$$

$$n = 101 \quad a_{101} = \frac{1}{101} \in (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}) = I_1$$

$$n = 102 \quad a_{102} = \frac{1}{102} \in I_1$$

$$n \geq 101 \quad a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow a_n \in I_1.$$

Άρα ισχύει $a_n \in I_1$ τελικά για
όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Αν πάρουμε $I_2 = (-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$

έχουμε $a_n \in I_2$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα για όλα τα $n \geq 1001$).

Αντιστοίχος ορισμός: (Όριο ακολουθίας)

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$.

Η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο a

ή απλά στο a είναι το όριο της ακολουθίας

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, συμβολικά $a_n \rightarrow a$

ή $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ ή $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, αν

για κάθε ανοικτό διάστημα I κέντρου a ισχύει $a_n \in I$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ορολογία: $\# (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται

συγκρίνουσα αν συγκρίνει σε κάποιον
πραγματικό αριθμό. Αρχικά λέγεται
αποκρίνουσα.

Παράδειγμα:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

Δοχυρίσώμαστε ότι $a_n \rightarrow 0$,

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$.

[Στο πρόχειρο: δείχνει $|a_n - 0| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Αν $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$

θα έχουμε $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\square$

Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει
 $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\text{και άρα } |a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|$$

$$= \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Θεμελιώδεις ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

1) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι γραμμική

2) Μοναδικότητα ορίου:

$$\text{αν } a_n \rightarrow a \text{ και } a_n \rightarrow b$$

$$\text{τότε } \boxed{a = b}.$$

3) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι σταθερή ακολουθία
 $a_n = c \in \mathbb{R}, n \geq 1$ τότε $a_n \rightarrow c$.

4) Απόλυτη τιμή.

$$\text{Αν } a_n \rightarrow a \text{ τότε } \boxed{|a_n| \rightarrow |a|}.$$

$$\text{Ισχύει } a_n \rightarrow 0 \iff |a_n| \rightarrow 0$$

Γενικά όμως δεν ισχύει ότι
αν $|a_n| \rightarrow |a|$ τότε $a_n \rightarrow a$.

5) Ίσχυροσκα - Γενόμένο

Αν $a_n \rightarrow a$ και $b_n \rightarrow b$

τότε

$$a_n + b_n \rightarrow a + b$$

$c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

Ειδικότερα $-a_n \rightarrow -a$

και άρα

$$a_n - b_n \rightarrow a - b$$

Επιπλέον

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

και αν $b \neq 0$ τότε ισχύει
 $b_n \neq 0$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$

και

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

6) k -οση ρίζα, $k = 2, 3, \dots$

Αν $a_n \rightarrow a$ και $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$
τότε $a \geq 0$ και

$$\boxed{\sqrt[k]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

(Για περιζω k δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$)

7) Αν $x \leq a_n \leq y$ για κάθε $n \geq 1$
(ή ισοδύναμα για όλα τα $n \in \mathbb{N}$)
και αν $a_n \rightarrow a$, τότε

$$\boxed{x \leq a \leq y}.$$

8) Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $a_n \leq c_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq 1$
(ή ισοδύναμα για όλα τα $n \in \mathbb{N}$)

και αν $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$,

τότε $\boxed{c_n \rightarrow a}.$

Παραδείγματα

$$1) \quad a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 1, \quad n \geq 1$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{άρα} \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{όμοια} \quad \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Άρα} \quad a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 1 \rightarrow 0 + 0 + 1 = 1$$

$$2) \quad a_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{6n^2 - 4n + 8}, \quad n \geq 1.$$

$$a_n = \frac{n^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(6 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}}$$

$$\rightarrow \frac{1 + 3 \cdot 0 + 0}{6 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0} = \frac{1}{6}.$$

$$3) \quad a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad n \geq 1.$$

$$\text{Έχουμε} \quad -1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\text{άρα} \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad -\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

$$4) \quad a_n = \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}}$$

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} + 1 \rightarrow 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} \rightarrow \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Άρα} \quad \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} \rightarrow \frac{4}{1} = 4$$

Όριο και Suprema - infima

Θεώρημα: Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο supremum του συνόλου των όρων της.

Απόδειξη:

Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ↑ και άνω φραγμένη.

Θέτουμε $a = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ και δείχνουμε $a_n \rightarrow a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Το $a - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_{n_0}$.

Τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

$$\downarrow$$
$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow$$

Άσκηση: Κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ΣΟΣ Πρόταση (Χαρακτηρισμός supremum - infimum)

Έστω A μη κενό $\subseteq \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$.

Τότε $b = \sup A \Leftrightarrow$ το b είναι άνω
φράγμα του A και $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A
με $a_n \rightarrow b$.

Όμοια $b = \inf A \Leftrightarrow$ το b είναι κάτω
φράγμα του A και $\exists (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A
με $b_n \rightarrow b$.

Απόδειξη: (Για το $b = \sup A$)

($\Rightarrow$) $\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in A$ με $b - \frac{1}{n} < a_n \leq b$.
Άρα $|a_n - b| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ το
 $b - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A .

Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$, αφού
 $a_n \rightarrow b \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $b - \varepsilon < a_{n_0} < b + \varepsilon$.

Αφού $a_{n_0} \in A$ προκύπτει ότι το $b - \varepsilon$
δεν είναι άνω φράγμα του A .

Εφαρμογή: Να υπολογιστούν τα

$\inf A$ και $\sup A$ όπου

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Προφανώς $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. Άρα $1 = \sup A$.

Ακόμα η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα γιατί:

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow$$

$$n(n+2) \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$$

που ισχύει.

$$\text{Άρα } \inf A = \min A = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Υπακοουδία:

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Επιλέγουμε άπειρους όρους της ακολουθίας
δηλαδή επιλέγουμε άπειρα $n \in \mathbb{N}$ και
κάνουμε αυτή την επιλογή με αύξοντα
τρόπο στο n .

Π.χ. $2, 5, 10, 17, \dots, n^2+1, \dots$

Τότε σχηματίζεται μια καινούρια
ακολουθία, η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου

$$b_1 = a_2, b_2 = a_5, b_3 = a_{10}, b_4 = a_{17} \dots$$

$$\dots b_n = a_{n^2+1}, \dots$$

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

και φυσικοί αριθμοί :

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$$

Θέτουμε $b_n = a_{k_n}$, $n \geq 1$.

Τότε η ακολουθία $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται

υπακολουθία της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και συμβολίζεται

πιο απλά με $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$k_n = n^2 + 1, \quad n \geq 1$$

Άλλα παραδείγματα υποκολουθιών:

$$(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad k_n = 2n$$

$$(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, \quad k_n = n+1$$

$$(a_{3n+5})_{n \in \mathbb{N}}, \quad k_n = 3n+5$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad k_n = n$$

Για $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ έχουμε.

$$a_{3n+5} = \frac{1}{3n+5}, \quad n \geq 1$$

Πρόταση:

Μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει

στο $a \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει επίσης στο a .

1^ο Κριτήριο μη σύγκλισης:

Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Αν υπάρχουν δύο υποακολουθίες $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$
και $(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ με:

$$a_{k_n} \rightarrow l \in \mathbb{R}, \quad a_{m_n} \rightarrow l' \in \mathbb{R}$$

και $l \neq l'$ τότε η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

είναι αποκλίνουσα.

Παράδειγμα:

$$a_n = (-1)^n, \quad n \geq 1.$$



Παίρνουμε τις υποακολουθίες $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$
και $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1$$

Αφού $1 \neq -1$ έχουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
δεν συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

Προσοχή: $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ γιατί

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Έχουμε $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Από το κριτήριο Παρεμβλής προκύπτει
ότι

$$\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0.$$

Παραζήτηση: Μια ακολουθία είναι
φραγμένη αν και μόνο αν κάθε
υπακολουθία της είναι φραγμένη.

2^ο Κριτήριο μη σύγκλισης

Αν μια ακολουθία έχει μια μη
φραγμένη υπακολουθία, τότε είναι
αποκλίνουσα.

Π.χ.

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n = 3k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι η $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι
φραγμένη.

Θεωρούμε $M \in \mathbb{R}$. Από την
Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$
με $n > M$.

Τότε $|a_{3n}| = 2^{3n} \geq 3n > M$.

Άρα η $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι
φραγμένη και συνεπώς η ακολουθία
είναι αποκλίνουσα.

Αξιοσημείωτα όρια:

1) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$
ισχύει $a^n \rightarrow 0$.

π.χ. $\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

Απόδειξη: Θέτουμε $x_n = |a|^n$, $n \geq 1$.

Τότε $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$.

Διαδοχή $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και
 κάτω φραγμένη, επομένως συγκλίνει σε
 κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } x &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^{n+1} \\ &= |a| \lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^n = |a| \cdot x \end{aligned}$$

Άρα $x = |a| \cdot x$, δηλ. $x(|a| - 1) = 0$.

Επειδή $|a| < 1$ προκύπτει ότι $x = 0$.

Άρα $|a|^n = |a^n| \rightarrow 0$ και $a^n \rightarrow 0$.

2) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$

γενικότερα αν p είναι πολυώνυμο
 με $p(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 1$

τότε $\sqrt[n]{p(n)} \rightarrow 1$.

π.χ. $\sqrt[n]{n^7 + n^6 + n^2} \rightarrow 1$

Απόδειξη:

Θέτουμε $\partial_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$

Τότε $\sqrt[n]{n} = \partial_n + 1$, άρα

$$n = (\partial_n + 1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \partial_n^k \cdot 1^{n-k}$$

$$\geq \binom{n}{2} \partial_n^2$$

(γιατί $\partial_n \geq 0$)

$$= \frac{n(n-1)}{2} \partial_n^2$$

για κάθε $n \geq 2$.

Επομένως

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} \partial_n^2$$

και $0 \leq \vartheta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2.$

Από το κριτήριο Παρεμβολής έχουμε
 $\vartheta_n \rightarrow 0$, άρα $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$

3) Αν $a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1.$

π.χ. $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \rightarrow 1$

$\sqrt[n]{42} \rightarrow 1.$

4) Ρητῆς συναρτήσεις $\frac{p(n)}{q(n)}$

Διαρρέμε με τον μεγαλύτερο βαθμό
 όρο αριθμητή και παρονομαστή

π.χ.
$$\frac{n^3 - n^2 + 5}{6n^4 + n^3 + 1} = \frac{\frac{n^3}{n^4} - \frac{n^2}{n^4} + \frac{5}{n^4}}{\frac{6n^4}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} + \frac{1}{n^4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{6 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} \rightarrow \frac{0 - 0 + 5 \cdot 0}{6 + 0 + 0}$$

$$= \frac{0}{6} = 0$$

$$5) \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Χρήσιμα
μόνο
αυτών
των
έχουμε
πια
μέχρι
τώρα

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{0} = 0$$

Άρα $0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$

Συνεπώς $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0$

Κάνουμε διαιρετική πολλαπλασιαστές και
διαίρεση με τη συζυγή παράσταση.

6) Αν $a, b > 0$ τότε

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \rightarrow \max \{a, b\}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $b \geq a$.

Οπότε $\max \{a, b\} = b$

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \geq \sqrt[n]{b^n} = b$$

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{b^n + b^n} = \sqrt[n]{2 \cdot b^n} = b \sqrt[n]{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Άρα} & b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq b \sqrt[n]{2} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & b & b \cdot 1 = b \end{array}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \longrightarrow b$$

7) Όρια με μεταβλητό πλῆθος όρων

Εδώ χρησιμοποιούμε συνήθως το Κριτήριο Παρεμβολής.

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}, \quad n \geq 1$$

$$\begin{aligned} 1^n + \dots + n^n &\leq n^n + \dots + n^n \\ &= n \cdot n^n \end{aligned}$$

$$1^n + \dots + n^n \geq n^n$$

$$\text{Άρα} \quad n^n \leq 1^n + \dots + n^n \leq n \cdot n^n$$

$$n \leq \sqrt[n]{1^n + \dots + n^n} \leq \sqrt[n]{n} \cdot n$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \leq \frac{1}{n} \sqrt[n]{1^n + \dots + n^n} \leq \sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε
 $a_n \rightarrow 1$.

Η ακολουθία $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \geq 1$

Αποδεικνύεται ότι:

α) η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\uparrow$ και

β) η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ένα φραγμένο

Άρα η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε
κάποιον πραγματικό αριθμό.

Ορίζουμε

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Αποδεικνύεται ότι $e \simeq 2,71$

$\uparrow$
περίπου ίσο

Ειδικότερα έχουμε:

$$2 < e < 3.$$

Παραδείγματα:

Θεωρούμε την $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \geq 1$.

$$\text{Τότε } \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = a_{2n}$$

Αφού $a_n \rightarrow e$, τότε $a_{2n} \rightarrow e$

$$\text{Επίσης } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \\ \rightarrow e^2$$

Ακολουθίες ορισμένες αναδρομικά

Μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με αναδρομή ως εξής:

Αρχικά ορίζουμε τον όρο a_1 .

Έπειτα ορίζουμε τον όρο a_{n+1} με τη βοήθεια του a_n ή γενικότερα με τη βοήθεια των $a_1, \dots, a_n$.

Αναδρομή = επαγωγή για ορισμούς

Παράδειγμα: (Η συνάρτηση του
Παραγοντικού)

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$$

Μερικοί όροι:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 \cdot a_1 & (n=1) \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 3 a_2 & (n=2) \\ &= 3 \cdot 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 4 \cdot a_3 & (n=3) \\ &= 4 \cdot 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε $a_n = n!$, $n=1, 2, \dots$

Αυτός είναι ο αντιστρεπτός ορισμός του $n!$

Παράδειγμα: (Η συνάρτηση της ύψωσης σε δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό)

Δίνεται $a \in \mathbb{R}$. Ορίσουμε αναδρομικά:

$$a_1 = a$$

$$a_{n+1} = a \cdot a_n, \quad n \geq 1.$$

Π.χ. $a_2 = a \cdot a = a^2$

$$a_3 = a \cdot a_2 = a \cdot a^2 = a^3$$

Με άλλα λόγια: $a_n = a^n, \quad n \geq 1.$

(Αυτός είναι ο αυστηρός ορισμός του a^n , $n \in \mathbb{N}$).

Ο αναδρομικός ορισμός συνδέεται άρρηκτα με την επαγωγική απόδειξη.

ΣοΣ

Παράδειγμα:

Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1} \quad n \geq 1$$

i) Δείξτε με επαγωγή ότι

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

ii) Δείξτε ότι $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \uparrow$.

iii) Εξηγήστε γιατί η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ συχνώνει και υπολογίστε το όριό της.

Λύση:

i) $n=1$ προφανώς $\frac{1}{2} \leq a_1 \leq 1$
 $a_1 = \frac{1}{2}$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

ισχύει $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ και δείχνουμε

$$\text{ότι } \frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1.$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1} \geq \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}$$

↑
Ε.Υ.

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3/2} > \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{1}{2} \sqrt{5x-1} \right) \uparrow$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1} \leq \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 1 - 1}$$

↑
Ε.Υ.

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

ii) α' τρόπο

Με επαγωγή δείχνουμε $a_n \leq a_{n+1}$.

$$n=1: \quad a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{3/2} > \frac{1}{2} = a_1$$

Θεωρούμε ότι και $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
 δείχνουμε ότι

$$a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

$$a_n \leq a_{n+1}$$

$$\Rightarrow 5a_n \leq 5a_{n+1}$$

$$\Rightarrow 5a_n - 1 \leq 5a_{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{5a_n - 1} \leq \sqrt{5a_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1} \leq \frac{1}{2} \sqrt{5a_{n+1} - 1}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

β' πρόταση: $a_n \leq a_{n+1}$

$$\Leftrightarrow a_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow 2a_n \leq \sqrt{5a_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow 4a_n^2 \leq 5a_n - 1 \quad (a_n \geq 0)$$

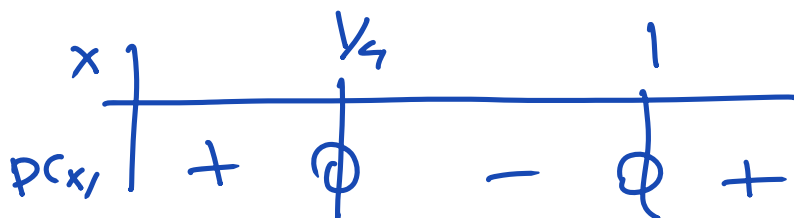
$$\Leftrightarrow 4a_n^2 - 5a_n + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow p(a_n) \leq 0$$

όπου $p(x) = 4x^2 - 5x + 1$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$



Από το i) $a_n \in [\frac{1}{2}, 1] \subseteq [\frac{1}{5}, 1]$

άρα $p(a_n) \leq 0$.

iii) Η ακολουθία συγκλίνει γιατί είναι φραγμένη και μονότονη.

Θέτουμε $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Τότε $a_{n+1} \rightarrow a$

Παίρνουμε την σχέση

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1}$$

και παίρνουμε όριο $n \rightarrow \infty$ στα δύο μέλη της.

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{5a - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a = \sqrt{5a - 1}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 5a - 1$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 5a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow p(a) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{όπου } p \\ \text{πω} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{όπως} \\ \text{πάνω} \end{array}$$

Προκύπτουν δύο περιπτώσεις $a = \frac{1}{4}$

και $a = 1$.

Από το ii) έχουμε $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$

Εφα $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Εφα η $a = \frac{1}{2}$ απορρίπτεται.

Εφα $a = 1$.

Σύγκριση ακολουθιών στα $\pm\infty$:

Ορισμός:

Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$.

Λέμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει

στο $+\infty$, συμβολικά $a_n \rightarrow +\infty$

ή $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ αν

για κάθε $M > 0$ ισχύει $a_n > M$

σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

ισοδύναμα για κάθε $M > 0$ υπάρχει
 $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$
να ισχύει $a_n > M$.

Όμοια γέμει ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συσχετίζεται
στο $-\infty$, συμβολικά $a_n \rightarrow -\infty$
ή $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ αν

για κάθε $M > 0$ ισχύει $a_n < -M$
σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

ισοδύναμα για κάθε $M > 0$ υπάρχει
 $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$
να ισχύει $a_n < -M$.

Το $+\infty$ συμβολίζεται πιο απλά
και με ∞ .

Πρόταση:

(I) $\forall a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow +\infty$
και $c_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$ τότε :

a) $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

και $a_n + c_n \rightarrow +\infty$

b) $c_n \cdot a_n \rightarrow +\infty$ αν $c > 0$

και $c_n \cdot a_n \rightarrow -\infty$ αν $c < 0$

γ) $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$

δ) $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

Όμοια:

(II)

$\forall a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow -\infty$
και $c_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$ τότε :

ε) $a_n + b_n \rightarrow -\infty$
και $a_n + c_n \rightarrow -\infty$

στ) $c_n \cdot a_n \rightarrow -\infty$ αν $c > 0$

και $c_n \cdot a_n \rightarrow +\infty$ αν $c < 0$

ζ) $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$

η) $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$

Επιπλέον :

(III) θ) Αν $a_n \rightarrow 0$ και $a_n > 0$
για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τότε
 $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$

ι) Αν $a_n \rightarrow 0$ και $a_n < 0$ για κάθε
 $n \in \mathbb{N}^*$ τότε $\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$.

ια) Αν $a_n \rightarrow +\infty$ ή $a_n \rightarrow -\infty$
τότε $|a_n| \rightarrow +\infty$

ιβ) Αν $a_n \rightarrow +\infty$ και $b_n \rightarrow -\infty$
τότε $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$

Η πιο πάνω πρόταση συνοψίζεται
στον ακόλουθο πίνακα,

ο οποίος έχει την έννοια

μνημονικού κανόνα παρά επέκτασης

των γνωστών πράξεων από το

$\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

"Πράξεις" με το άπειρο:

$\infty + \infty = \infty$ $c + \infty = \infty + c = \infty \quad (c \in \mathbb{R})$ $c \cdot \infty = \infty \quad (c > 0)$ $c \cdot \infty = -\infty \quad (c < 0)$ $\infty \cdot \infty = \infty$ $\frac{1}{\infty} = 0$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$ $-\infty + c = c - \infty = -\infty \quad (c \in \mathbb{R})$ $c \cdot (-\infty) = -\infty \quad (c > 0)$ $c \cdot (-\infty) = \infty \quad (c < 0)$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ $\frac{1}{-\infty} = 0$
$\frac{1}{0^+} = \infty \quad \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \pm \infty = \infty$ $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$	

Παραδείγματα:

Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$
(γιατί $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq n$ για κάθε $n \geq 1$).

Επομένως:

$$-\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad -n \rightarrow -\infty \quad \left(\frac{1}{0^-} = -\infty \right)$$

$$2^n \rightarrow +\infty \quad \left(\frac{1}{0^+} = +\infty \right)$$

$$2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \rightarrow +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \infty \cdot c = \infty \\ c > 0 \end{array} \right)$$

$$n \cdot \left(-1 + \frac{1}{2^n} \right) \rightarrow -\infty \quad \left(\begin{array}{l} \infty \cdot c = -\infty \\ c < 0 \end{array} \right)$$

$$n \cdot 2^n \rightarrow +\infty \quad n \cdot (-2^n) \rightarrow -\infty$$

$(\infty \cdot \infty = \infty \quad \text{και} \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty)$