

# 1<sup>ο</sup>: Κεφάλαιο - Πραγματικοί αριθμοί.

## Σύνολα - συμβολισμοί:

$$A = \{ x : \text{μια ιδιότητα του } x \}$$

$$\text{ή } A = \{ x \mid \text{μια ιδιότητα του } x \}$$

$$\text{ή } A = \{ x \in B \mid \text{μια ιδιότητα του } x \}$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $A$  είναι το σύνολο όλων των  $x$  (ή όλων των  $x$  που ανήκουν στο  $B$ ) που έχουν αυτή την ιδιότητα.

$$\text{Επίσης γράφουμε } A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \}$$

Αυτό σημαίνει ότι το  $A$  αποτελείται από τα αντικείμενα  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ .

$\emptyset$  = το κενό σύνολο  $\leadsto$  δεν περιέχει στοιχεία.

$A \subseteq B \leadsto$  το  $A$  είναι υποσύνολο του  $B$   
δηλαδή κάθε στοιχείο του  $A$   
είναι στοιχείο του  $B$

Ισχύει ότι  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$  και  $B \subseteq A$

Δηλαδή δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Ισχύει  $\emptyset \subseteq B$  για κάθε σύνολο  $B$ .

Παραδείγματα:

$$1) A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{x, y, a, z, b, c\}$$

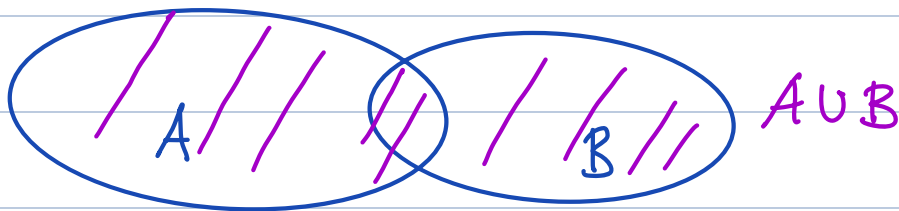
Άρα  $A \subseteq B$

$$2) A = \{x, y\} \quad B = \{x, a, b\}$$

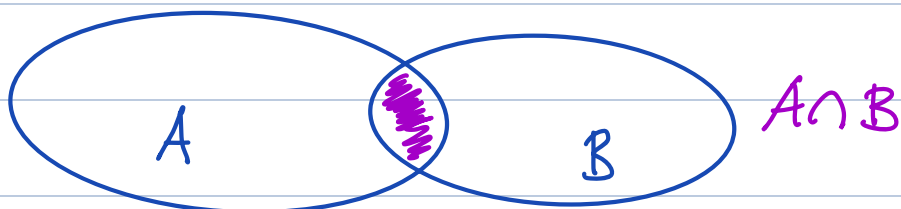
$$A \not\subseteq B \quad (\text{το } A \text{ δεν είναι υποσύνολο του } B)$$

Πράξεις με σύνολα:

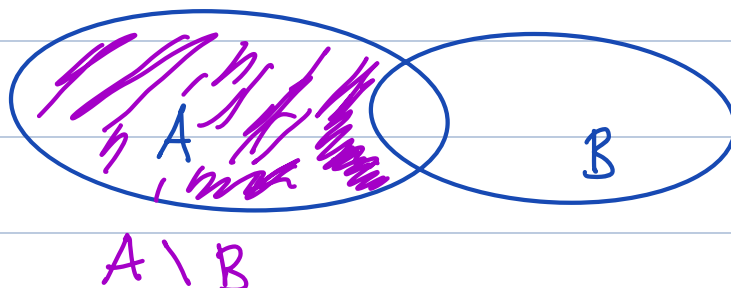
$$\text{Ένωση: } A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$$



$$\text{Τομή: } A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$$



$$\text{Διαφορά: } A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



## Παραδείγματα:

$$1) \quad A = \{x, y, a, b, c\}$$
$$B = \{x, z, a, d, e\}$$

$$A \cup B = \{x, y, z, a, b, c, d, e\}$$

$$A \cap B = \{x, a\}$$

$$A \setminus B = \{y, b, c\}$$

$$B \setminus A = \{z, d, e\}$$

$$2) \quad A = \{a, b, c\} \quad B = \{a, b, c, x\}$$

$$\text{Σημείωση} \quad A \subseteq B$$

$$A \cup B = B = \{a, b, c, x\}$$

$$A \cap B = A = \{a, b, c\}$$

$$A \setminus B = \emptyset \quad B \setminus A = \{x\}$$

## Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων:

Αν έχουμε σύνολα  $A$  και  $B$  ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο  $A \times B$  του συνόλου  $A$  με το  $B$  ως εξής:

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ και } b \in B \}.$$

Το  $(a, b)$  ονομάζεται διατεταγμένο ζεύγος και ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$(a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \text{ και } b = b'$$

Παράδειγμα:

$$A = \{ a, b, c \}, \quad B = \{ x, y, z \}$$

$$A \times B = \{ (a, x), (a, y), (a, z), \\ (b, x), (b, y), (b, z) \}.$$

Ίσχυση:  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$

# Λογικές προτάσεις:

## Μαθηματικά σύμβολα:

$\Rightarrow$  σημαίνει συνεπάγεται

$\Leftrightarrow$  σημαίνει ισοδυναμία

$\forall$  σημαίνει για κάθε

$\exists$  σημαίνει υπάρχει

Το "τέτοιον ώστε" συμβολίζεται με : .

## Παραδείγματα μαθηματικών προτάσεων:

$$1) \forall x \in A \Rightarrow x = a \text{ ή } x = b$$

$$2) \forall x \in A \exists y \in B : x \neq y$$

$$3) \exists x \in A : \forall y \in B \Rightarrow x \neq y .$$

## Πράξη σε σύνολο:

Δίνεται ένα σύνολο  $G \neq \emptyset$ .

Πράξη στο  $G$  είναι μια συνάρτηση  
 $f: G \times G \rightarrow G$ .

Αντί για  $f$  χρησιμοποιούμε  
συνήθως τα σύμβολα  $+$ ,  $\cdot$ ,  $*$  κ.τ.λ.

Επομένως το  $f(a,b)$  γίνεται  $+(a,b)$   
κ.ο.κ. Επίσης αντί για  $+(a,b)$   
γράφουμε  $a+b$  και έτσι έχουμε  
τον γνωστό συμβολισμό.

Παραδείγματα πράξεων είναι η  
πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός  
στο  $\mathbb{R}$  (ανφερόμαστε πιο κάτω σε  
αυτά).

Ακόμα ένα παράδειγμα:

Θέτουμε  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  και ορίζουμε  
τη συνάρτηση  $\oplus : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ :

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0 \text{ και}$$

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Με άλλα λόγια το  $a \oplus b$  είναι  
το υπόλοιπο της διαίρεσης του  
 $a+b$  με το 2.

## Διμεγείς σχέσεις:

Δίνεται ένα σύνολο  $G$ . Ένα σύνολο  $S'$  ονομάζεται διμεγής σχέση στο  $G$  αν  $S' \subseteq G \times G$ .

Πολλές φορές αντί για  $(x, y) \in S'$  γράφουμε  $x S' y$  και το αναγινώσκουμε σαν

“το  $x$   $S'$ -σχετίζεται με το  $y$ ”.

## Παράδειγμα:

$$G = \mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$$

$$S' = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}.$$

$$0 S' 1, \quad 1 S' 2, \quad 0 S' 2.$$

Αντί για  $S'$  μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε άλλα σύμβολα.

Στο πιο πάνω παράδειγμα  
μπορούμε να πάρουμε το σύμβολο  
 $<$  αντί του  $\leq$  και έτσι το

$a \leq b$  γίνεται η γνωστή  
έκφραση  $a < b$  (!).

## Τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών:

Δεχόμαστε την ύπαρξη ενός συνόλου  $\mathbb{R}$ , δύο πράξεων  $+$  και  $\cdot$  στο  $\mathbb{R}$ , τις οποίες καλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό αντίστοιχα, όπως επίσης και μιας διμερούς σχέσης  $<$  στο  $\mathbb{R}$ , για τα οποία ικανοποιούνται οι ιδιότητες (A1) – (A14), τις οποίες παραθέτουμε σταδιακά στη συνέχεια.

### (A1) – (A4) (Ιδιότητες πρόσθεσης)

$$(A1) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b = b + a$$

(αντιμεταθετική ιδιότητα)

$$(A2) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

(προσεταιριστική ιδιότητα)

$$(A3) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = 0 + a = a$$

(ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου)

(A4)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}: a+b=b+a=0$   
( ύπαρξη αντίθετου στοιχείου )

Θέτουμε

$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$$

δηλ. απαλείφουμε τις παρενθέσεις.

Πρόταση: 1) Το 0 του (A2) είναι μοναδικό.

2) Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  το  $b \in \mathbb{R}$  για το οποίο  $a+b=b+a=0$  είναι μοναδικό.

Απόδειξη: 1) Έστω  $0' \in \mathbb{R}$ :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a+0'=0'+a=a.$$

Τότε

$$0+0'=0 \quad (\text{από πάνω για } a=0)$$

$$0+0'=0' \quad (\text{ιδώματα του } 0)$$

$$\Rightarrow 0=0'$$

2) Έστω  $a, b, b' \in \mathbb{R}$  με  $a+b=a+b'=0$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } b &= 0+b = a+b'+b = b'+a+b \\ &= b'+0 = b' \end{aligned} \quad \square$$

Θέτουμε

$$-a = \text{το μοναδικό αντίθετο στοιχείο του } a$$

και ορίζουμε την πράξη της αφαίρεσης

$$b - a = b + (-a)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Άσκηση: Αν  $a + b = a + c$   
τότε  $b = c$ , όπου  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Λύση: Έστω  $a + b = a + c$ .

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad & -a + a + b = -a + a + c \\ \Rightarrow \quad & 0 + b = 0 + c \\ \Rightarrow \quad & b = c. \end{aligned}$$

(A5) — (A8) (Ιδιότητες πολλαπλασιασμού)

$$(A5) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

$$(A6) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(A7) \quad \exists 1 \in \mathbb{R}: 1 \neq 0 \text{ και}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$(A8) \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ με } a \neq 0 \exists b \in \mathbb{R}: a \cdot b = b \cdot a = 1$$

Όπως πριν μπορεί να αποδειχθεί  
ότι το  $1 \in \mathbb{R}$  της (A7) είναι  
μοναδικό και ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}$   
με  $a \neq 0$  υπάρχει μοναδικό  $b \in \mathbb{R}$   
με  $a \cdot b = b \cdot a = 1$ . Αυτό το  $b$   
ονομάζεται αντίστροφο στοιχείο του  $a$ .

Θέτουμε:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \text{το μοναδικό αντίστροφο στοιχείο του } a$$

και ορίσουμε την πράξη της διαίρεσης

$$\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1} = b \cdot \frac{1}{a}$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a \neq 0$ .

(A9) - Η επιμεριστική ιδιότητα:

$$(A9) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

Απαλοιφή παρενθέσεων:

Δίνουμε προτεραιότητα στον πολλαπλασιασμό έναντι της πρόσθεσης στην εκτέλεση των πράξεων, έτσι που στο  $(a \cdot b) + (a \cdot c)$  μπορούμε να

απαλείψουμε τις παρενθέσεις και  
να το γράψουμε  $a \cdot c + b \cdot c$ .

### Πρόταση:

Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύουν τα εξής:

$$1) a \cdot 0 = 0$$

$$2) (-1) \cdot b = -b \text{ και πιο γενικά}$$

$$(-a) \cdot b = -a \cdot b$$

$$a \cdot (-b) = -a \cdot b$$

$$3) -(-a) = a$$

$$4) (-a)(-b) = a \cdot b$$

$$5) \text{ Αν } a \cdot b = 0 \text{ τότε } a=0 \text{ ή } b=0.$$

### Απόδειξη:

$$1) a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 \\ = a + a \cdot 0$$

$$\Rightarrow -a + a = -a + a + a \cdot 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + a \cdot 0$$

$$\Rightarrow 0 = a \cdot 0$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad a \cdot b + (-a) \cdot b &= b \cdot a + b \cdot (-a) \\
 &= b(a + (-a)) \\
 &= b \cdot 0 = 0 \quad (\text{με εφαρμογή του 1)})
 \end{aligned}$$

Άρα το  $(-a) \cdot b$  είναι ο αντίθετος του  $a \cdot b$ , δηλ.  $(-a) \cdot b = -a \cdot b$ .

Το  $a \cdot (-b) = -a \cdot b$  αποδεικνύεται όμοια.

$$\begin{aligned}
 3) \quad a + (-a) &= 0, \text{ άρα το } a \\
 &\text{είναι ο αντίθετος του } (-a), \\
 \text{δηλ. } a &= -(-a).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad (-a)(-b) &= -[a \cdot (-b)] \\
 \text{από το 2) με το } -b &\text{ στη θέση} \\
 \text{του } b.
 \end{aligned}$$

Πάμε από το 2):

$$\begin{aligned}
 -[a \cdot (-b)] &= -[-ab] \\
 &= ab \quad (\text{από το 3}).
 \end{aligned}$$

5) Έστω  $a \cdot b = 0$  και  $b \neq 0$ .  
Τότε υπάρχει το  $b^{-1} \in \mathbb{R}$ .

$$a \cdot b \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$$

$$\Rightarrow a \cdot 1 = 0 \cdot b^{-1}$$

$$\Rightarrow a = 0 \cdot b^{-1}$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad (\text{από το 1})$$

Άρα αν  $a \cdot b = 0$  έχουμε ή  $b = 0$   
ή  $b \neq 0$  και από τα πιο πάνω  
θα ισχύει  $a = 0$ .

(A10) - (A13) (ιδιώματα διατάξης)

(A10)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ισχύει ακριβώς  
ένα από τα ακόλουθα:  
 $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$   
(τριχοτομία)

(A11)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , αν  $a < b$  και  $b < c$   
τότε  $a < c$   
(μεταβατική ιδιότητα)

$$(A12) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ αν } a < b \\ \text{τότε} \quad a + c < b + c$$

$$(A13) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ αν } a < b \text{ και } 0 < c \\ \text{τότε} \quad a \cdot c < b \cdot c.$$

Συμβολισμός: Με  $b > a$  εννοούμε ότι  $a < b$ .

Επίσης ορίζουμε

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \text{ ή } a < b$$

και συμβολίζουμε

$$b \geq a \Leftrightarrow a \leq b.$$

Το  $a$  λέγεται θετικό αν  $a > 0$   
και αρνητικό αν  $a < 0$ .

Πρόταση:

Για κάθε  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ισχύουν  
τα ακόλουθα

$$1) (a < b \text{ και } c < d) \Rightarrow a + c < b + d$$

$$2) \quad c < 0 \Leftrightarrow -c > 0$$

$$3) \quad (a < b \text{ και } c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$4) \quad a \neq 0 \Rightarrow a \cdot a > 0$$

$$5) \quad a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$6) \quad \forall a, b > 0 \text{ και } a < b \\ \text{τότε} \quad b^{-1} < a^{-1}.$$

$$7) \quad \forall a \leq b \text{ τότε } a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

### Απόδειξη

$$1) \quad a + c < b + c < b + d$$

$$2) \quad \text{Έστω } c < 0. \text{ Υπάρχουν 3}$$

περιπτώσεις για το  $-c$ :

$$-c < 0, \quad -c = 0, \quad -c > 0.$$

$\forall -c < 0$  τότε από το 1):

$$0 = c + (-c) < 0 + 0 = 0,$$

Συνάδη  $0 < 0$  άτοπο από (A9).

$\forall -c = 0$  τότε

$$c + (-c) = c + 0$$

$$\Rightarrow 0 = c \text{ άτοπο από (A9),}$$

Άρα  $-c > 0$ .

Αντίστροφα, έστω  $-c > 0$ .

$\forall c = 0$  τότε

$$0 = -c + c = -c + 0 = -c \text{ άτοπο,}$$

και αν  $c > 0$  τότε

$$0 = -c + c > 0 + 0 = 0, \text{ άτοπο.}$$

3)  $\forall a < b$  και  $c < 0$  τότε  
 $-c > 0$ .

$$\text{Άρα } a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$$

$$\Rightarrow -a \cdot c < -b \cdot c$$

$$\Rightarrow 0 < -bc + ac$$

$$\Rightarrow bc < a \cdot c$$

4) Εφόσον  $a \neq 0$  έχουμε

ή  $a > 0$  ή  $a < 0$ .

Αν  $a > 0$  τότε  $a \cdot a > 0 \cdot a$

$$\Rightarrow a^2 > 0$$

Αν  $a < 0$  τότε από το 2) :

$-a > 0$  άρα  $(-a)/(-a) > 0$

$$\Rightarrow a \cdot a > 0.$$

5) Έστω  $a > 0$ . Αν είχαμε  $a^{-1} = 0$

$$\text{τότε } 1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$$

άρα  $1 = 0$  άτοπο.

Αν  $a^{-1} < 0$  τότε

$$a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a \text{ από (A13)}$$

$$\text{άρα } 1 < 0.$$

Αλλά  $1 = 1 \cdot 1 > 0$  από το (4).

Άτοπο. Άρα  $a^{-1} > 0$ .

6) Έστω  $a \cdot b > 0$  και  $a < b$ .

$$\text{Από το 5): } \frac{1}{a \cdot b} > 0.$$

$$a < b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a \cdot b} < b \cdot \frac{1}{a \cdot b}$$

(A13)

Αποδεικνύεται ότι  $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

Άρα  $a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} < b \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{b} < 1 \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

7)  $a = \frac{2}{2} \cdot a = \left( \frac{1+1}{2} \right) a$

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) a = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a$$

$$< \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot (a+b)$$

Όμοια  $b = \frac{2}{2} \cdot b = \dots = \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot b$

$$> \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b = \frac{a+b}{2}.$$

## Ορισμός: (Διαστήματα)

Για  $a \leq b$  θέτουμε:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

(κλειστό διάστημα με άκρα τα  $a, b$ )

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

(ανοικτό διάστημα με άκρα τα  $a, b$ )

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι έχουμε δύο αντικείμενα, τα  $-\infty$  και  $+\infty$  τα οποία δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

Επιπλέον επεκτείνουμε την έννοια της διάταξης  $<$  στο σύνολο  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  ως ακολούθως:

$-\infty < x$  και  $x < +\infty$   
για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Με βάση αυτά ορίζουμε

$$\begin{aligned}(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\(b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\} \\[b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}.\end{aligned}$$

Το  $+\infty$  θα το συμβολίζουμε  
πιο απλά  $\infty$ .

Ορισμός: (απόλυτη τιμή)

Για  $a \in \mathbb{R}$  ορίζουμε

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}.$$

Πρόταση:

Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύουν:

- 1)  $|a| \geq 0$  και  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- 2)  $-|a| \leq a \leq |a|$
- 3)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 4)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Τριγωνική ανισότητα)
- 5)  $||a| - |b|| \leq |a + b|$
- 6)  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$  (αν  $b \neq 0$ )

Ορισμός: (Ύψωση σε δύναμη  
με φυσικό εκθέτη)

Δίνεται  $a \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε:

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

και όμοια  $a^4, a^5, a^6, \dots$ .

(Ο αυστηρός ορισμός δίνεται  
με αναδρομή όπως θα δούμε  
αρχότερα).

Επίσης, αν  $a \neq 0$ , ορίζουμε  
 $a^0 = 1$ .

Η έκφραση  $a^n$  ονομάζεται  
δύναμη. Το  $a$  ονομάζεται  
βάση της δύναμης και το  $n$   
εκθέτης της δύναμης.

Στη συνέχεια παίρνουμε δεδομένα  
που ισχύουν όσον αφορά τις γνωστές  
αλγεβρικές ιδιότητες, ταυτοότητες  
κ.τ.λ.

## Το αξίωμα πινόυτας (A14)

Ορισμός: (Μέγιστο και ελάχιστο συνόλου)

Αν  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R}$  γέμε ότι το  $a$  είναι μέγιστο του  $A$ , συμβολικά

$$b = \max A$$

αν

i)  $b \in A$  και

ii)  $\forall x \in A \Rightarrow x \leq b$ .

Όμοια το  $b$  γέμεται ελάχιστο του  $A$ , συμβολικά

$$b = \min A$$

αν

i)  $b \in A$  και

ii)  $\forall x \in A \Rightarrow x \geq b$ .

Άσκηση: Τα  $\min A$ ,  $\max A$ , εφόσον υπάρχουν είναι μοναδικά.

Ορισμός:

Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

Ένα  $b \in \mathbb{R}$  ονομάζεται άνω  
φράγμα του  $A$  αν  
$$\forall x \in A \Rightarrow x \leq b.$$

Το  $A$  ονομάζεται άνω φραγμένο αν  
έχει άνω φράγμα.

Το  $b$  ονομάζεται ελάχιστο  
άνω φράγμα του  $A$ , συμβολικά

$$b = \sup A$$

αν είναι το ελάχιστο του συνόλου  
των άνω φραγμάτων του  $A$ .

Άσκηση: Το  $\sup A$ , εφόσον υπάρχει  
είναι μοναδικό.

## Παραδείγματα:

Θεωρούμε  $b \in \mathbb{R}$ .

1) Το  $b$  είναι άνω φράγμα των συνόλων  $(-\infty, b)$  και  $(-\infty, b]$ .

2) Το  $b$  είναι το μέγιστο του  $(-\infty, b]$ .

Το δε  $(-\infty, b)$  δεν έχει μέγιστο:  
αν  $c \in (-\infty, b)$  τότε  $c < \frac{c+b}{2} < b$ .

3) Το  $b$  είναι το supremum του  $(-\infty, b)$ .

Είδαμε ότι το  $b$  είναι άνω φράγμα του  $(-\infty, b)$ . Αν το  $c$  είναι ένα άλλο άνω φράγμα του  $(-\infty, b)$  τότε δεν γίνεται  $c < b$  γιατί  $c < \frac{c+b}{2} < b$ . Άρα  $b \leq c$ .

Άσκηση: 1) Το  $\max A$ , αν υπάρχει, είναι ίσο με το  $\sup A$ .

2) Αν  $\sup A \in A$  τότε  $\sup A = \max A$ .

Πρόταση: (Χαρακτηρισμός supremum)

Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R}$ . Τότε  $b = \sup A$  αν και μόνο αν

1) το  $b$  είναι άνω φράγμα το  $A$  και

2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : b - \varepsilon < x$ .

Απόδειξη: Άσκηση.

Υπάρχει ακόμα ένας εξαιρετικά χρήσιμος χαρακτηρισμός του  $\supremum$ , όπου γίνεται χρήση της έννοιας του ορίου ακολουθίας που θα δούμε στη συνέχεια.

**SOS** Πρόταση: ( Χαρακτηρισμός  $\supremum$  με βάση τις ακολουθίες )

Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R}$ . Τότε  $b = \sup A$  αν και μόνο αν

- 1) το  $b$  είναι άνω φράχτη του  $A$  και
- 2) το  $b$  είναι το όριο μιας ακολουθίας από στοιχεία του  $A$ .

## Το Αξίωμα Πληρότητας

(A14) Κάθε μη κενό άνω γραμμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Πρόταση: (Ύπαρξη  $\sqrt{2}$ )

Το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$  είναι μη κενό, άνω γραμμένο και το supremum του ικανοποιεί:

$$(\sup A)^2 = 2 \text{ και } \sup A > 0.$$

Συμβολίζουμε  $\sqrt{2} = \sup A$ .

### Ορισμός:

Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$ .  
Ένα  $b \in \mathbb{R}$  ονομάζεται κάτω  
φράγμα του  $A$  αν  
$$\forall x \in A \Rightarrow b \leq x.$$

Το  $A$  ονομάζεται κάτω γραμμένο αν  
έχει κάτω φράγμα.

Το  $b$  ονομάζεται μέγιστο  
κάτω φράγμα του  $A$ , συμβολικά

$$b = \inf A$$

αν είναι το μέγιστο του συνόλου  
των κάτω γραμμάτων του  $A$ .

Άσκηση: Το  $\inf A$ , εφόσον υπάρχει  
είναι μοναδικό.

## Παράδειγμα:

$$a = \inf (a, +\infty)$$

$$a = \min [a, +\infty)$$

Ισχύουν τα ανάλογα με το supremum αποτελέσματα για το infimum.

Ορισμός: (γραμμικό σύνολο)

Ένα μη κενό σύνολο  $A$  ονομάζεται γραμμικό αν είναι άνω γραμμικό και κάτω γραμμικό.

Πρόταση: (Χαρακτηρισμός infimum)

Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R}$ . Τότε  $b = \inf A$  αν και μόνο αν

- 1) το  $b$  είναι κάτω φράχτη του  $A$
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < b + \varepsilon$ .

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός του infimum με βάση την έννοια του ορίου ακολουθίας (που θα οριστεί αργότερα) είναι ο ακόλουθος.

**SOS** Πρόταση: ( Χαρακτηρισμός infimum με βάση τις ακολουθίες )

Θεωρούμε ένα μη κενό  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $b \in \mathbb{R}$ . Τότε  $b = \inf A$  αν και μόνο αν

- 1) το  $b$  είναι κάτω φράχτη του  $A$  και
- 2) το  $b$  είναι το όριο μιας ακολουθίας από στοιχεία του  $A$ .

# Μαθηματική Έπαχωση:

## Ορισμός:

Ένα  $A \subseteq \mathbb{R}$  ονομάζεται επαχωτικό σύνολο αν

i)  $1 \in A$  και

ii)  $\forall x (x \in A \Rightarrow x+1 \in A)$ .

-Παραδείγματα επαχωτικών συνόλων:

$\mathbb{R}$ ,  $[0, +\infty)$ ,  $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

$(\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{\frac{3}{2}\}$

Ορισμός: (Φυσικοί αριθμοί)

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το

$$\mathbb{N} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \forall A \subseteq \mathbb{R}, \text{ αν το } A \text{ είναι επαγωγικό τότε } x \in A \}.$$

Με άλλα λόγια είναι  $x \in \mathbb{R}$  είναι φυσικός αριθμός αν ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο.

Παραδείγματα φυσικών αριθμών:  
 $1, 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4.$

Αποδεικνύεται ότι το  $\mathbb{N}$  είναι επαγωγικό σύνολο και μάλιστα ισχύει  $\mathbb{N} \subseteq A$  για κάθε επαγωγικό σύνολο  $A$ .

Οι φυσικοί αριθμοί συμβολίζονται συνήθως με  $n, m, k$  ή  $i, j$ .

## Θεώρημα: (Αρχή Επαγωγής)

Θεωρούμε μια ιδιότητα  $P$  φυσικών αριθμών, για την οποία ισχύουν:

- 1) Το 1 έχει την  $P$ .
- 2) Αν ένα  $n \in \mathbb{N}$  έχει την  $P$  τότε και το  $n+1$  έχει την  $P$ .

Τότε κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχει την  $P$ .

## Απόδειξη:

Θεωρούμε το σύνολο  $A$  όλων των  $n \in \mathbb{N}$  τα οποία έχουν την ιδιότητα  $P$ , δηλαδή

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}.$$

Τότε  $0 \in A$  και αν  $x \in A$  τότε  $x = n \in \mathbb{N}$ . Από την υπόθεση 2) ισχύει  $x+1 = n+1 \in A$ .

Άρα το  $A$  είναι επαγωγικό σύνολο.

Τα στοιχεία του  $\mathbb{N}$  ανήκουν σε  
κάθε επαγωγικό σύνολο, άρα  
 $\mathbb{N} \subseteq A$ .

Αυτό σημαίνει ότι κάθε  $n \in \mathbb{N}$   
έχει την ιδιότητα  $P$ .

Εφαρμογή:

Να δείξει ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$   
ο αριθμός  $9^n - 1$  είναι θετικό  
ακέραιο πολλαπλάσιο του 8.

Δείχνουμε το ζητούμενο με επαγωγή.  
Εδώ έχουμε ότι το  $n \in \mathbb{N}$  έχει την  
ιδιότητα  $P$  αν το  $9^n - 1$  είναι  
θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του 8.

Βάση επαγωγής:  $n = 1$

$$9^1 - 1 = 9 - 1 = 8.$$

Άρα το 1 έχει την  $P$ .

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι  
έχουμε κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  που ικανοποιεί  
την  $P$ . (Επαγωγική Υπόθεση)  
Δείχνουμε ότι και το  $n+1$  ικανοποιεί  
την  $P$ .

Από την Ε-Υ. έχουμε  $q^n - 1 = 8k$   
για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$ , άρα  
 $q^n = 8k + 1$ .

$$\begin{aligned}\text{Τότε } q^{n+1} - 1 &= q \cdot q^n - 1 \\ &= q \cdot (8k + 1) - 1 \\ &= q \cdot 8k + q \cdot 1 - 1 \\ &= q \cdot 8k + 8 \\ &= 8(9k + 1) = 8k'\end{aligned}$$

όπου  $k' = 9k + 1 \in \mathbb{N}$ .

Άρα το  $q^{n+1} - 1$  είναι δετικό  
ακέραιο πολλαπλάσιο του 8,  
δηλαδή το  $n+1$  έχει την  $P$ .

Πολλές φορές η βάση της επαγωγής δεν είναι το 1 αλλά κάποιος μεγαλύτερος φυσικός αριθμός.  
Άλλες φορές η βάση της επαγωγής μπορεί να είναι το 0.

### Αρχή Επαγωγής (Παραγωγής):

Θεωρούμε μια ιδιότητα  $P$  και  $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Υποθέτουμε ότι:

- 1) το  $n_0$  έχει την  $P$  και
- 2)  $\forall n \geq n_0$ , αν το  $n$  έχει την  $P$  τότε το  $n+1$  έχει την  $P$ .

Τότε  $\forall n \geq n_0$  το  $n$  έχει την  $P$ .

(Νοείται ότι  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )

### Παράδειγμα:

↓ Παρατηρήστε ότι δεν ισχύει για  $n = 1, 2, 3$

Ισχύει  $2^n > 3n$  για κάθε  $n \geq 4$ .

$$n=4: \quad 2^n = 2^4 = 16 > 12 = 3 \cdot 4 = 3n$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 4$   
ισχύει  $2^n > 3n$  και δείχνουμε  
ότι  $2^{n+1} > 3(n+1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 3n && \downarrow \text{Ε.Υ.} \\ &= 3n + 3n \\ &> 3n + 3 && (n \geq 4 > 1) \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε το  
Σητούμενο για κάθε  $n \geq 4$ .

Πρόταση: (Η Αρχιμήδεια ιδιότητα του  $\mathbb{N}$ )

Το σύνολο  $\mathbb{N}$  δεν είναι άνω φραγμένο, δηλαδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  με  $n > x$ .

Απόδειξη: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το  $\mathbb{N}$  είναι άνω φραγμένο, οπότε από το Αξίωμα Πληρότητας υπάρχει το  $a = \sup \mathbb{N}$ .

Επίσης υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  με  $a - 1 < n \leq a$ .

Αφού το  $a$  είναι άνω φράγμα του  $\mathbb{N}$  έχουμε  $n+1 \leq a$ .

Άρα  $a - 1 < n < n+1 \leq a$   
άτοπο

γιατί  $|a - (a-1)| = 1$

και  $|n+1 - n| = 1$ .

Θεώρημα: (Αρχή Ελάχιστου)

Κάθε μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{N}$  έχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη: Έστω  $A \subseteq \mathbb{N}$  μη κενό.

Θέτουμε  $B = \mathbb{N} \setminus A$ .

Ορίζουμε  $P(n) \equiv \forall k \leq n (k \in B)$ .  
( $k, n \in \mathbb{N}$ )

Αν το 1 δεν έχει την  $P$  τότε

$\exists k \leq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  με  $k \notin B$ . Λογικά  $k=1$

άρα  $1 \notin B$ , δηλαδή  $1 \in A$  και  $\min A = 1$ .

Επομένως σε αυτή την περίπτωση έχουμε τελειώσει.

Αν για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  το  $n$  έχει την  $P$  αλλά το  $n+1$  δεν την έχει, τότε

$\exists k \leq n+1$  με  $k \notin B$ . Αλλά αφού το  $n$  έχει την  $P$  λογικά  $k \leq n$

άρα  $k = n+1$ .

Τότε όμως  $n+1 \notin B$ , δηλαδή  $n+1 \in A$

και  $\forall i \leq n$  λογικά  $i \in B$ , δηλαδή  $i \notin A$ .  
(επειδή ισχύει  $P(n)$ )

Αυτό σημαίνει ότι  $\min A = n+1$   
και πάλι έχουμε τερματώσει.

Απομένει η περίπτωση όπου το  
1 έχει την  $P$  και

$\forall n \in \mathbb{N}$  αν το  $n$  έχει την  $P$   
τότε το  $n+1$  έχει την  $P$ .

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι  
κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχει την  $P$ , δηλαδή

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n \quad (k \in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in B)$$

$$\Leftrightarrow B = \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow A = \emptyset. \quad \text{Άτοπο γιατί } A \neq \emptyset.$$

Επομένως η τελευταία περίπτωση  
είναι αδύνατη. Αυτό ολοκληρώνει την  
απόδειξη.

Σχόλιο: αποδεικνύεται ότι η Αρχή Επαγωγής  
είναι ισοδύναμη με την Αρχή Ελάχιστου.

Στη συνέχεια θα παίρνουμε δεδομένες  
όλες τις βασικές αρχές την αριθμη-  
τικής ( $\mathbb{N}$ ). τις ιδιότητες του  $\mathbb{N}$ ).

Αναφέρουμε μερικές από αυτές:

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1$
- 2) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  δεν υπάρχει  
γυροκόπος αριθμός  $m$  ανάμεσα στο  
 $n$  και στο  $n+1$ .
- 3) Για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  έχουμε  
 $m+n \in \mathbb{N}$  και  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ .
- 4) Για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}$  υπάρχουν  
μοναδικοί  $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  με  
 $m = q \cdot n + r$  και  $r < n$ .  
(Ευκλείδεια Διαίρεση)

Οι ακέραιοι και οι ρητοί αριθμοί:

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x : -x \in \mathbb{N}\}.$$

Συμβολίζουμε επίσης

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι το

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0 \right\}.$$

Ισχύει  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Παραδείγματα:

$$3 \in \mathbb{N}, \quad 3 \in \mathbb{Z}, \quad 3 \in \mathbb{Q} \quad (3 = \frac{3}{1})$$

$$0 \notin \mathbb{N}, \quad 0 \in \mathbb{Z}, \quad 0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$$

$$-5 \notin \mathbb{N}, \quad -5 \in \mathbb{Z}, \quad -5 = \frac{-5}{1} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

Ένας πραγματικός αριθμός ονομάζεται άρρητος αν δεν είναι ρητός.

Δηλαδή το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι το  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Πρόταση: Ο αριθμός  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος.

Απόδειξη: Έστω προς άτοπο ότι  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , δηλαδή

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \text{ όπου } m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $m, n \in \mathbb{N}$  (γιατί  $\sqrt{2} > 0$ ) και ότι  $\text{ΜΚΔ}(m, n) = 1$ .

Έχουμε  $2 = \frac{m^2}{n^2}$  άρα  $m^2 = 2n^2$ .  
Επομένως ο  $m^2$  είναι άρτιος.

Αν ο  $m$  ήταν περιττός τότε  $m = 2k+1$  και  $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow m^2 = \text{περιττός άρτιος}$ . Άρα ο  $m$  είναι περιττός.

Δηλαδή  $m = 2k$  όπου  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Επομένως } m^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow n^2 = \text{άρτιος}$$

Όπως πριν έχουμε ότι ο  $n$  είναι άρτιος. Άρα οι  $m, n$  είναι άρτιοι, το οποίο είναι άτοπο γιατί  $\text{ΜΚΔ}(m, n) = 1$ .

Παρατήρηση: Προκύπτει από το πιο πάνω ότι η ακόλουθη εκδοχή του Αξιώματος Πληρότητας για τους ρητούς αριθμούς δεν αληθεύει:

" $\forall A \subseteq \mathbb{Q}$  μη κενό άνω γραμμένο υπάρχει  $b \in \mathbb{Q}$  το οποίο είναι το ελάχιστο άνω γράμμα του  $A$ ".

Από το Αξίωμα Πληρότητας υπάρχει  $b \in \mathbb{R}$  που είναι το ελάχιστο άνω γράμμα του  $A$  (και μέγιστο για  $A \subseteq \mathbb{R}$ ) αλλά μπορεί  $b \notin \mathbb{Q}$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι το  $\mathbb{Q}$  με τις πράξεις  $+$  και  $\cdot$  και με τη διάταξη  $<$  ικανοποιεί τις ιδιότητες (A1) – (A13).

Επομένως η ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στο  $\mathbb{Q}$  και στο  $\mathbb{R}$  είναι η ιδιότητα (A14).

Θεώρημα: (Πυκνότητα ρητών αριθμών)

Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$  υπάρχει  $q \in \mathbb{Q}$  με  $a < q < b$ .

Για την απόδειξη βλ. Φυλλάδια Ασκήσεων.

Θεώρημα: (Πυκνότητα άρρητων αριθμών)

Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a < b$  υπάρχει  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  με  $a < x < b$ .

## Πρόταση: (Ανισότητα Bernoulli)

Για κάθε  $a > -1$  και κάθε  $n \in \mathbb{N}$   
ισχύει  $(1+a)^n \geq 1+na$ .

### Απόδειξη:

Έστω  $a > -1$ . Αποδεικνύουμε το  
ζητούμενο με επαγωγή στο  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}\text{Για } n=1: (1+a)^1 &= (1+a)^1 = 1+a \\ &= 1+1 \cdot a = 1+na.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο  $n \geq 1$  ισχύει  
 $(1+a)^n \geq 1+na$ . (Ε.Υ.)

Δείχνουμε ότι  $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot a$ .

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε } (1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\ &\geq (1+a)(1+na) \\ (1+a > 0) \text{ Ε.Υ. } &\Leftarrow\end{aligned}$$

$$= 1 + na + a + na^2$$

$$\geq 1 + na + a = 1 + (n+1)a$$

Από την Αρχή Επαγωγής έχουμε  
ότι  $(1+a)^n \geq 1+na$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Εφαρμογή: Για  $a = \frac{1}{2}$  παίρνουμε

από την ανίσωση Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3^n \geq 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3^n \geq 2^n + n \cdot 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## Το Διάνημο το Νεύωνα

Για κάθε  $n \geq 1$  ορίζουμε

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Επίσης ορίζουμε  $0! = 1$

Το  $n!$  διαβάζεται " $n$  παραγοντικό".  
" $n$  factorial".

Παραδείγματα:

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4!} \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Ορισμός: (Δωνομεκός Συντελεστής)

Δίνονται  $n, k \in \mathbb{Z}$  με  $0 \leq k \leq n$ .

Ορίζουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Το  $\binom{n}{k}$  διαβάσεται “ $n$  ανά  $k$ ”  
“ $n$  chooses  $k$ ”,

Σχόλιο: 0  $\binom{n}{k}$  είναι το πηλίκο

των διαφορετικών τρόπων για να  
επιλέξουμε  $k$  διαφορετικά αντικείμενα  
από μια συλλογή  $n$  διαφορετικών  
αντικειμένων.

## Παραδείγματα:

$$1) \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \\ = \frac{\cancel{3!} \cdot 4 \cdot 5}{2! \cdot \cancel{3!}} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Γενικά ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$2) \quad \binom{17}{1} = \frac{17!}{1! \cdot 16!} = \frac{\cancel{16!} \cdot 17}{1 \cdot \cancel{16!}} = 17$$

Γενικά ισχύει  $\binom{n}{1} = n$

$$3) \quad \binom{17}{0} = \frac{\cancel{17!}}{0! \cdot \cancel{17!}} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$\binom{17}{17} = \frac{\cancel{17!}}{\cancel{17!} \cdot (17-17)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Γενικά ισχύει  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

0 συμβολισμός  $\Sigma$ :

Δίνονται  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  όπου  $n \geq 1$ .

Το άθροισμα  $a_0 + \dots + a_n$  συμβολίζεται με  $\sum_{k=0}^n a_k$  ή  $\sum_{j=0}^n a_j$  κ.τ.λ.

Παραδεί

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n$$

Μπορεί επίσης να έχουμε  $\sum_{k=1}^n a_k$ .

Αυτό σημαίνει το άθροισμα  $a_1 + \dots + a_n$ .

Άλλο παράδειγμα:  $\sum_{k=2}^{n-1} a_k = a_2 + \dots + a_{n-1}$   
( $n \geq 3$ )

Γενικά αν  $0 \leq i \leq j \leq n$

$$\sum_{k=i}^j a_k = a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$$

$$\text{Προσοχή: } \sum_{k=0}^0 a_k = a_0$$

$$\text{ή } \sum_{k=17}^{17} a_k = a_{17}$$

Τα  $a_k$  μπορεί να είναι επίσης αριθμητικές ή αλγεβρικές παραστάσεις.

Π.χ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 (1+x)^k &= (1+x)^0 + (1+x)^1 + \dots + (1+x)^5 \\ &= 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^5 \end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητής: Μπορούμε να "μετατοπίσουμε" τον μετρητή (δηλ. το πιο πάνω  $k$ ) στο  $\Sigma$  με ανάστροφη μετατροπή των δεικτών των προσδεταίων όρων.

Π.χ. αν θέσουμε  $j = k + 1$   
 τότε το  $\sum_{k=0}^n a_k$  είναι ίσο

$$\mu\epsilon \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} \quad \left( \begin{array}{l} k=0 \leadsto j=1 \\ k=n \leadsto j=n+1 \\ k=j-1 \end{array} \right)$$

Διώξεις:

$$1) \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)$$

γιατί

$$a_0 + \dots + a_n + b_0 + \dots + b_n = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$2) \lambda \cdot \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \lambda \cdot a_k$$

γιατί

$$\lambda \cdot (a_0 + \dots + a_n) = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_n$$

όπου  $\lambda, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

## Θεώρημα: (Διωνύμιο Νεύτωνα)

Για κάθε φυσικό  $n \geq 1$  και κάθε  
 $a, b \in \mathbb{R}$  με  $a, b \neq 0$  ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

## Εφαρμογές:

1) Για  $a = b = 1$  τότε για κάθε  $n \geq 1$  έχουμε:

$$(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n$$

$$a^k \cdot b^{n-k} = 1^k \cdot 1^{n-k} = 1$$

για κάθε  $k = 0, 1, \dots, n$ .

$$\text{Άρα } 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

2) Βρίξτε ποιος αριθμός είναι 0

$$A = \binom{45}{0} - \binom{45}{1} + \binom{45}{2} - \dots - \binom{45}{45}$$

Λύση:

$$A = \binom{45}{0} 1^{45} \cdot (-1)^0 + \binom{45}{1} 1^{44} \cdot (-1)^1$$

$$+ \binom{45}{2} \cdot 1^{43} \cdot (-1)^2 + \dots + \binom{45}{45} 1^0 \cdot (-1)^{45}$$

$$= (1 + (-1))^{45}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Διωνύμιο Νεύτωνα} \\ a=1, b=-1 \\ n=45 \end{array} \right)$$

$$= 0^{45} = 0.$$