Βελτιστοποίηση (Optimization)

Μηχανική Μάθηση

ΔΠΜΣ Επιστήμης Δεδομένων & Μηχανικής Μάθησης

Γιώργος Αλεξανδρίδης – gealexan@mail.ntua.gr

Εισαγωγικές Έννοιες

Το ζητούμενο της επιβλεπόμενης μάθησης

- Εύρεση εκείνων των *τιμών* των *παραμέτρων* θ του συστήματος μάθησης, για τις οποίες η **αντικειμενική συνάρτηση** *(objective function)* ή **συνάρτηση απώλειας** *(loss function)* $J(\theta)$ γίνεται **βέλτιστη**

- <u>Παραδείγματα</u>
  1. Γραμμική Παλινδρόμηση
  $$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \|x_i \boldsymbol{\theta} - y\|^2 \text{ και } \min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$$
  2. Εκτίμηση Μέγιστης Πιθανοφάνειας
  $$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \log p_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) \text{ και } \max_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$$
  3. Μηχανικές Διανυσμάτων Υποστήριξης
  $$J(\boldsymbol{\theta}, \xi_i) = \|\boldsymbol{\theta}\|^2 + C \sum_{i=1}^{N} \xi_i \text{ και } \min_{\theta} J(\boldsymbol{\theta})$$
  $$\text{subject to } \xi_i \leq 1 - y_i x_i^T \theta, \xi_i \geq 0$$

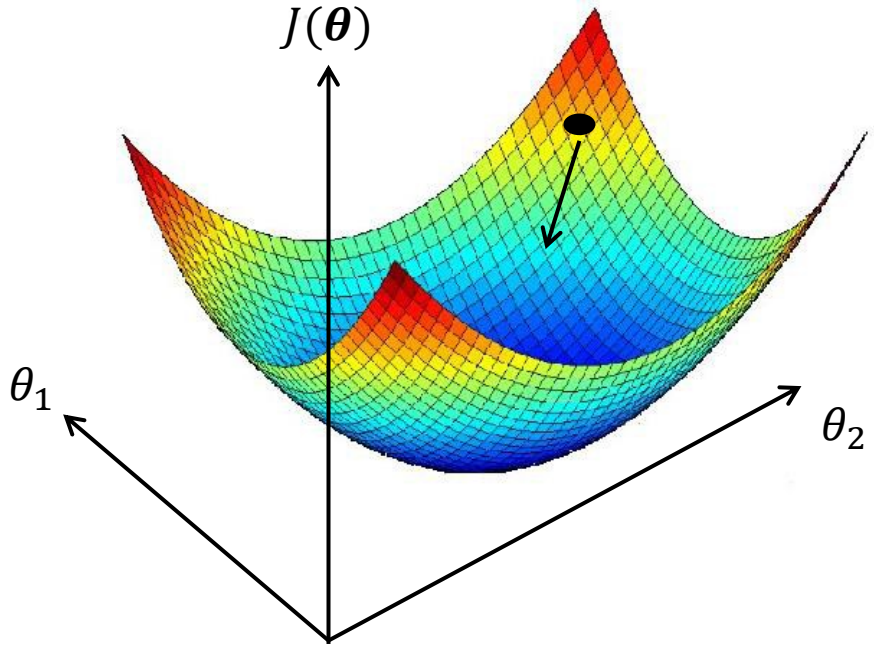
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι το ζητούμενο είναι να *ελαχιστοποιήσουμε* την *αντικειμενική συνάρτηση*

Συναρτήσεις απώλειας

- Υποθέτουμε ότι το μοντέλο μας έχει δύο παραμέτρους (δεξιά σχήμα)
- Βέλτιστη τιμή παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}^*$

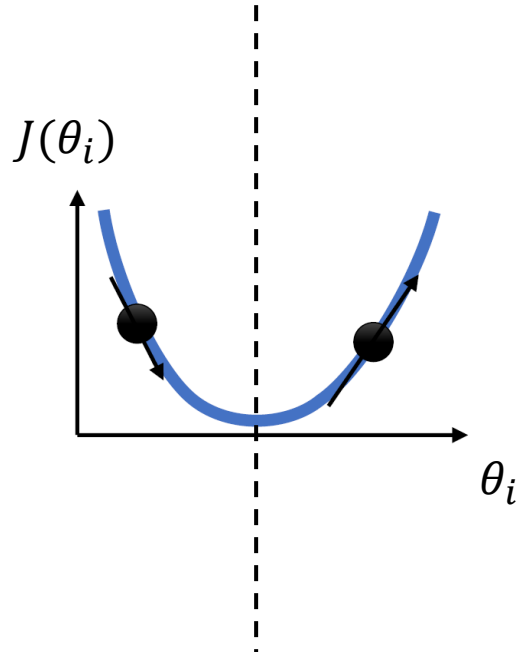
$$\boldsymbol{\theta}^* \leftarrow \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$$

- Απλός αλγόριθμος προσδιορισμού $\boldsymbol{\theta}^*$
  1. Ξεκίνα με τυχαία αρχική ανάθεση $\boldsymbol{\theta}$
  2. Βρες κατεύθυνση v όπου η $J(\boldsymbol{\theta})$ μειώνεται
  3. $\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} + \eta v$
  4. Επανέλαβε τα βήματα 2 ως 4 μέχρι τη σύγκλιση στο $\boldsymbol{\theta}^*$
- Το η είναι μια μικρή σταθερά που καλείται **ρυθμός μάθησης** (*learning rate*) ή **βήμα** (*step size*)



Κατάβαση Κλίσης (Gradient Descent)

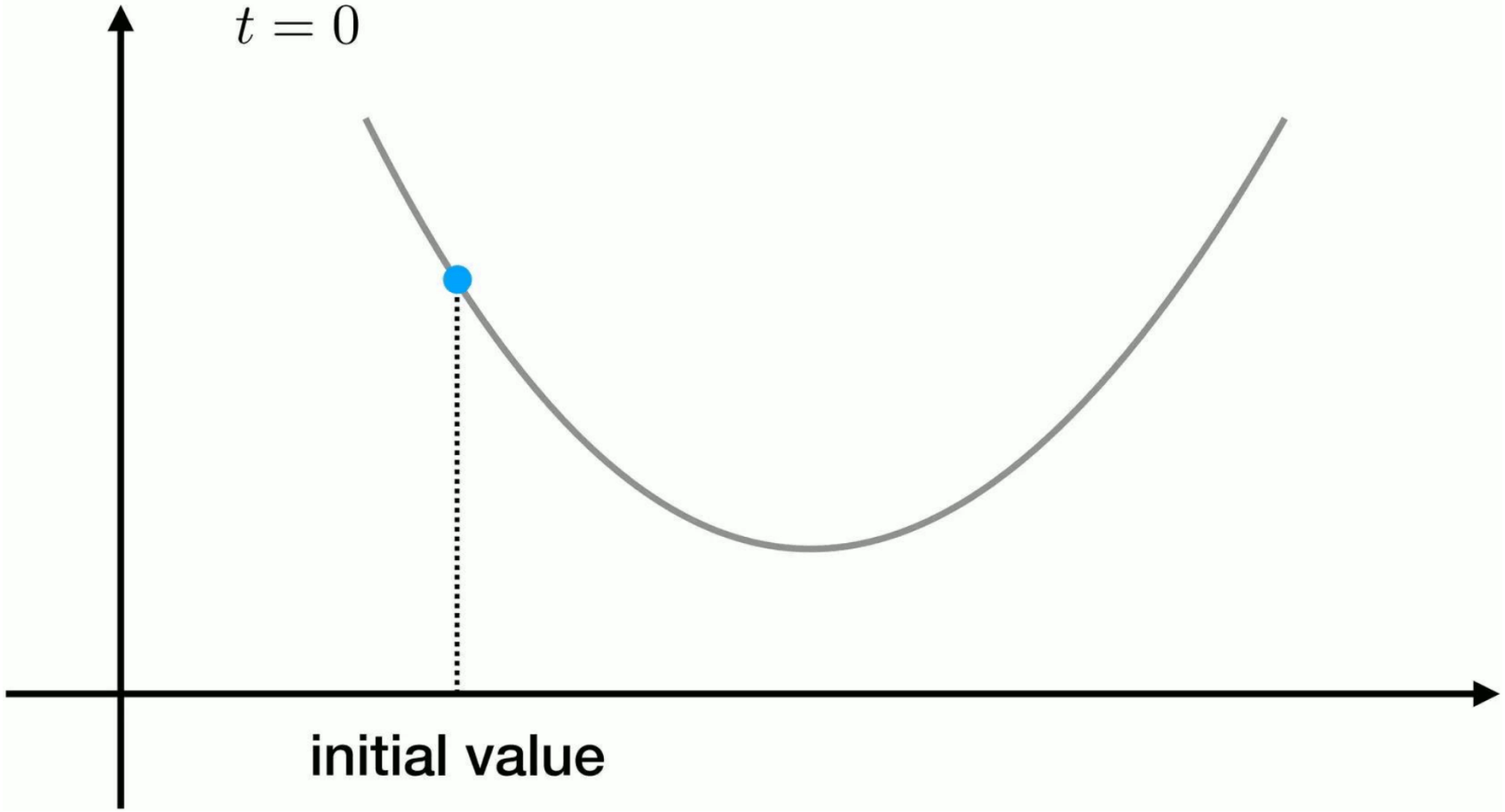
- Προς τα <u>ποια κατεύθυνση</u> *μειώνεται* η *αντικειμενική συνάρτηση*;
  - Υπολογισμός της *κλίσης* $\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$ της $J(\boldsymbol{\theta})$ ως προς παράμετρο θ_i
- **Κατεύθυνση** *μείωσης κλίσης* $J(\theta_i)$ (δεξιά σχήμα)
  a. Αν η *κλίση* της J ως προς θ_i είναι αρνητική (αριστερό υποτμήμα), θα πρέπει να *κινηθούμε* <u>προς τα δεξιά</u>
  b. Αν η *κλίση* της J ως προς θ_i είναι θετική (δεξιό υποτμήμα), θα πρέπει να *κινηθούμε* <u>προς τα αριστερά</u>
- <u>Σε κάθε περίπτωση</u> και για <u>κάθε παράμετρο</u> *κινούμαστε* σε κατεύθυνση **αντίθετη της κλίσης** της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τη συγκεκριμένη παράμετρο $v_i = -\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$



$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2}, \cdots, \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_n}\right]$$

Παράδειγμα Κατάβασης Κλίσης



Κατάβαση Κλίσης

Gradient Descent

Τεχνικές Κατάβασης Κλίσης

- Διαφέρουν ως προς την ποσότητα των δεδομένων εκπαίδευσης που χρησιμοποιούνται σε κάθε ενημέρωση
  1. Κατάβαση κλίσης με **ενιαία δέσμη** δεδομένων *(batch gradient descent)*
  2. **Στοχαστική** κατάβαση κλίσης (*stochastic gradient descent* - SGD)
  3. Κατάβαση κλίσης με **μικρό-δέσμες** δεδομένων (*mini-batch gradient descent*)

Ενιαία δέσμη δεδομένων

- Υπολογίζει την *κλίση* σε όλα τα *N* στιγμιότυπα του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης

$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{N} J(\boldsymbol{\theta}; x_i, y_i)$$

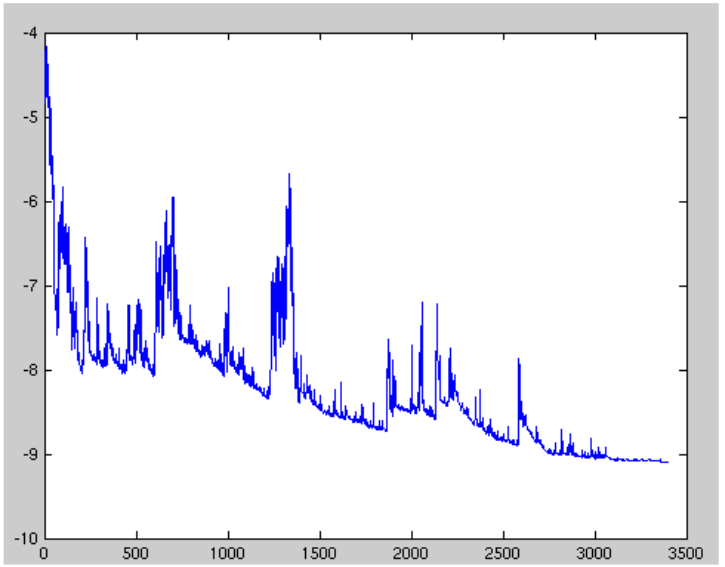
- **Πλεονεκτήματα**
  - Εγγυημένη σύγκληση στο *ολικό ελάχιστο* για **κυρτές** (*convex*) αντικειμενικές συναρτήσεις και σε *τοπικό ελάχιστο* για **μη-κυρτές** (*non-convex*)
- **Μειονεκτήματα**
  - *Πολύ αργή* σύγκλιση
  - **Μη-υπολογίσιμη** (*intractable*) για *πολύ μεγάλα* σύνολα δεδομένων
    - Που δεν χωράνε, δηλαδή, στη μνήμη του υπολογιστή
  - Δεν υποστηρίζει την *online μάθηση*

Στοχαστική κατάβαση κλίσης

- Υπολογίζει την κλίση σε κάθε στιγμιότυπο x_i του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης

$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}; x_i, y_i)$$

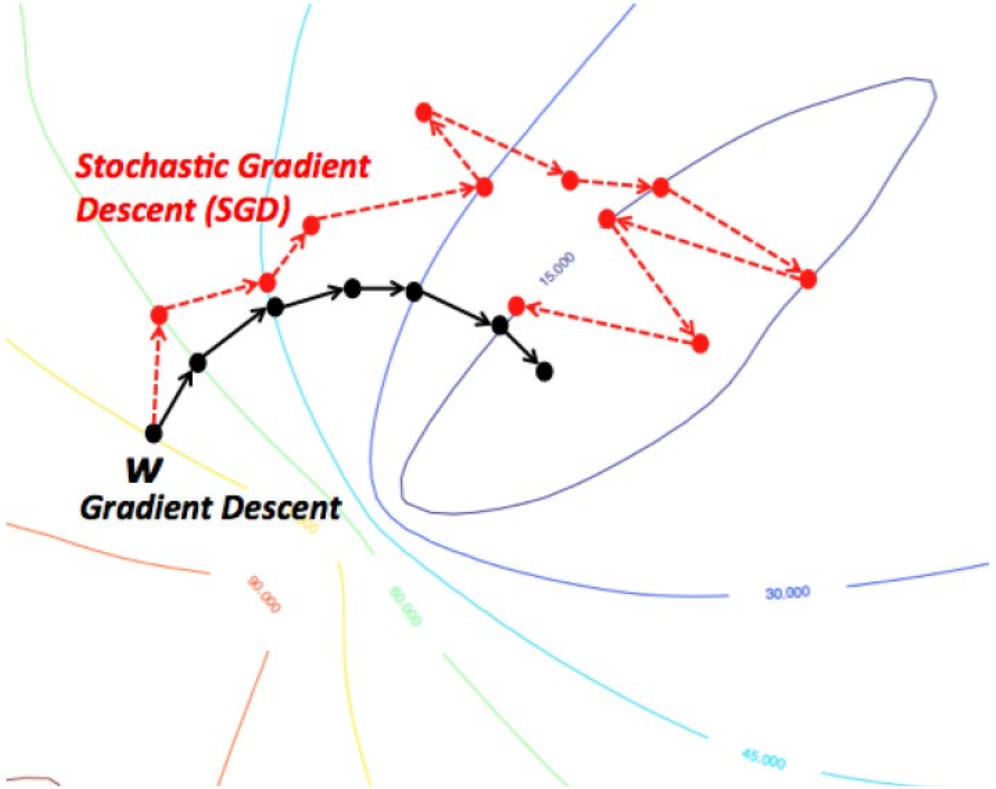
- **Πλεονεκτήματα**
  - *Πολύ πιο γρήγορη* από την κατάβαση κλίσης ενιαίας δέσμης δεδομένων (προηγούμενη περίπτωση)
  - *Υποστηρίζει* την *online μάθηση*
- **Μειονεκτήματα**
  - Μπορεί να εμφανίζεται *μεγάλη απόκλιση* στις ενημερώσεις των παραμέτρων



Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_gradient_descent#/media/File:Stogra.png

Σύγκριση των δύο μεθόδων

- Η *στοχαστική κατάβαση κλίσης* εμφανίζει <u>παρόμοια συμπεριφορά</u> σύγκλισης με τη *κατάβαση κλίσης ενιαίας δέσμης* αν ο **ρυθμός μάθησης μειώνεται σταδιακά** με το χρόνο



Κατάβαση κλίσης σε μικρό-δέσμες δεδομένων

- Υπολογίζει την κλίση σε όλα τα p $\ll N$ στιγμιότυπα του συνόλου δεδομένων εκπαίδευσης

$$\boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{p} J(\boldsymbol{\theta}; x_i, y_i)$$

- **Πλεονεκτήματα**
  - *Μειώνει* τις *αποκλίσεις* μεταξύ των ενημερώσεων
  - Μπορεί να *υπολογιστεί γρήγορα* με πράξεις πολλαπλασιασμού πινάκων
- **Μειονεκτήματα**
  - Το *μέγεθος δέσμης* είναι **υπερ-παράμετρος** της διαδικασίας εκπαίδευσης
    - Άρα πρέπει να βρεθεί η *βέλτιστη τιμή* της
    - Συνήθως χρησιμοποιούνται δυνάμεις του 2 μεταξύ 8 και 256.
- *Συνηθέστερα* χρησιμοποιούμενη τεχνική
  - Αναφέρεται και ως *στοχαστική κατάβαση κλίσης* παρότι χρησιμοποιούνται μικροδέσμες

Σύγκριση τεχνικών

Τεχνική	Ακρίβεια	Ταχύτητα Ενημέρωσης	Χρήση Μνήμης	Online Μάθηση
Ενιαία δέσμη	Καλή	Χαμηλή	Υψηλή	Όχι
Στοχαστική	Καλή*	Υψηλή	Χαμηλή	Ναι
Μικρο-δέσμες	Καλή	Μεσαία	Μεσαία	Ναι

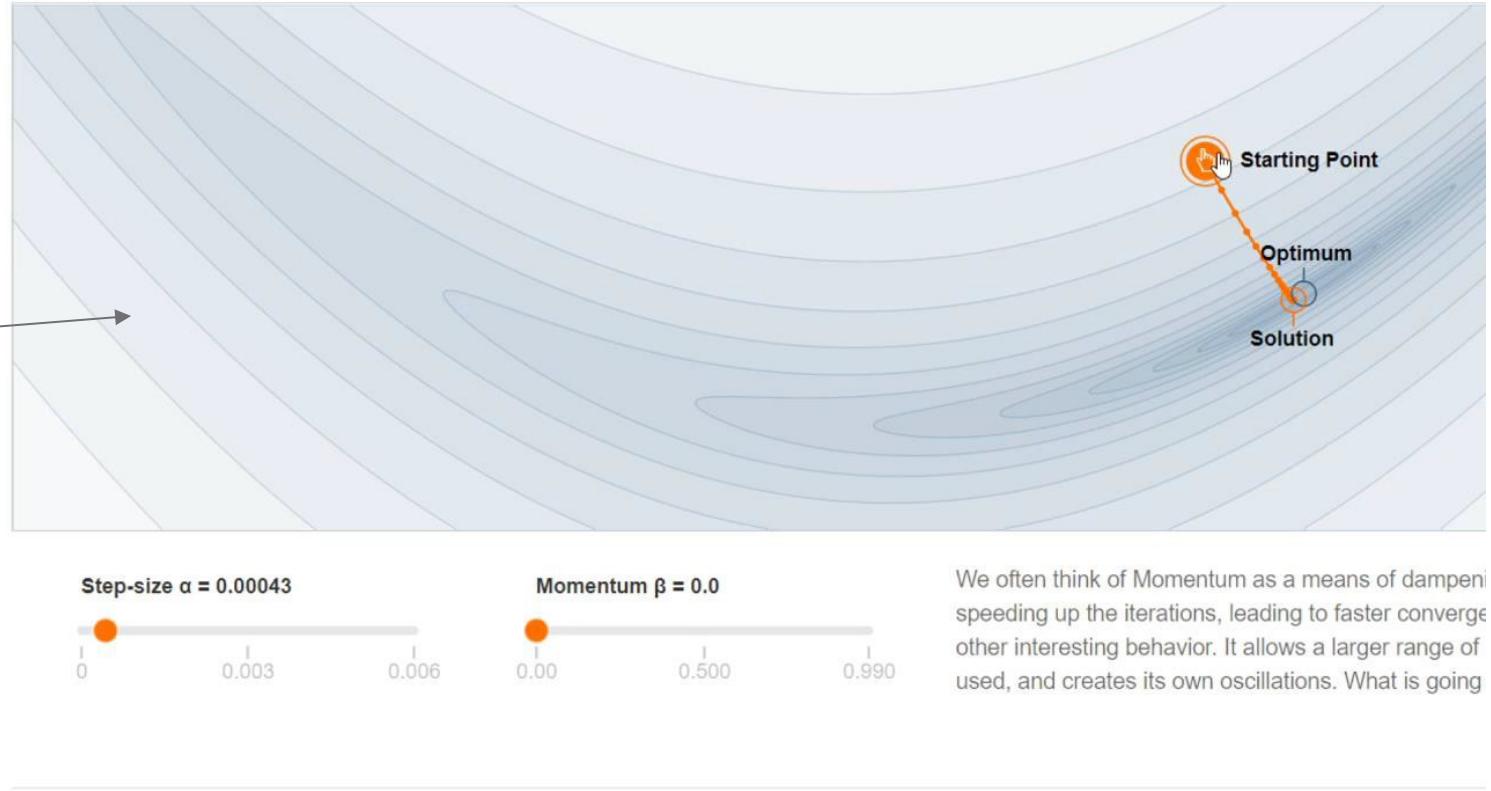
* Υπό την προϋπόθεση ότι μειώνεται σταδιακά ο ρυθμός μάθησης

Προκλήσεις

1. Αποφυγή τοπικών ελαχίστων
2. Επιλογή ρυθμού μάθησης
3. Καθορισμός διαδικασίας μεταβολής (μείωσης) του ρυθμού μάθησης

Απεικόνιση κατάβασης κλίσης

Κάθε καμπύλη ίδιου χρώματος έχει την ίδια τιμή $J(\theta)$



Πηγή: https://distill.pub/2017/momentum/

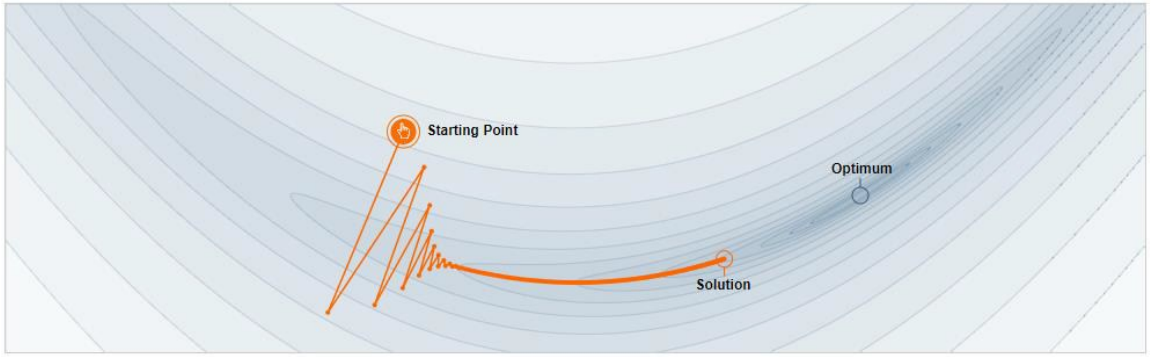
Επιφάνειες Συναρτήσεων Απώλειας

Loss surfaces

Κίνηση αντίθετα από την κλίση

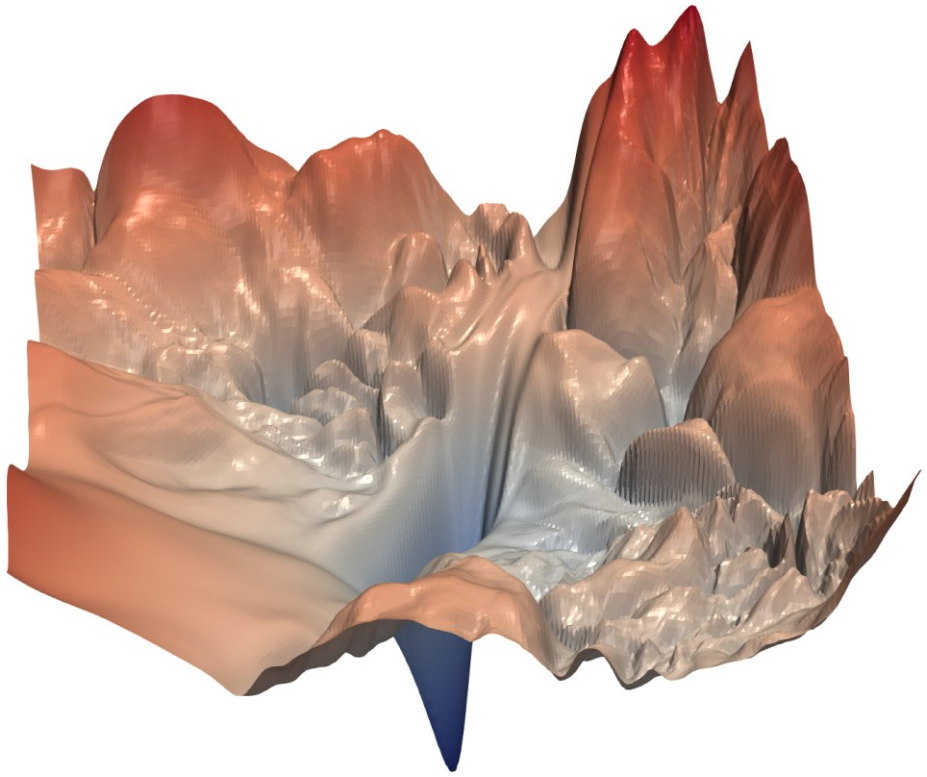
- Η *ενημέρωση* των *παραμέτρων* του μοντέλου σε κατεύθυνση *αντίθετη* από την *κλίση* της συνάρτησης απώλειας δεν εγγυάται πάντα το *καλύτερο* αποτέλεσμα
  - Ειδικά αν η συνάρτηση απώλειας είναι *μη-κυρτή*

- Υπενθύμιση
  - **Κυρτές** συναρτήσεις είναι όσες είναι *διπλά-παραγωγίσιμες* στο πεδίο ορισμού τους και ταυτόχρονα η *δεύτερη παράγωγος* τους είναι παντού στο πεδίο ορισμού τους *μη-αρνητική*

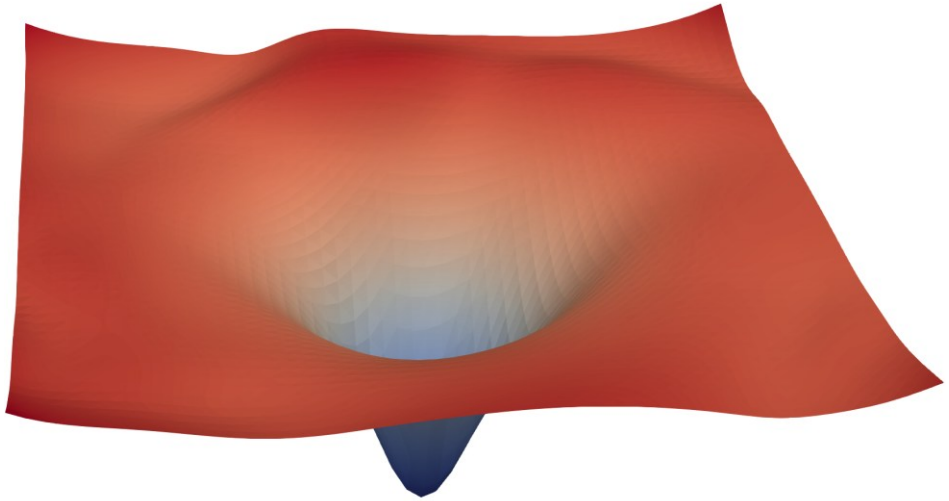


Συναρτήσεις απώλειας νευρωνικών δικτύων

ResNet-56 χωρίς skip connections

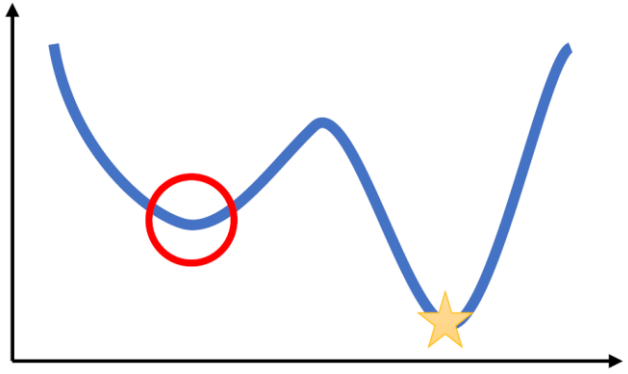


ResNet-56 με skip connections

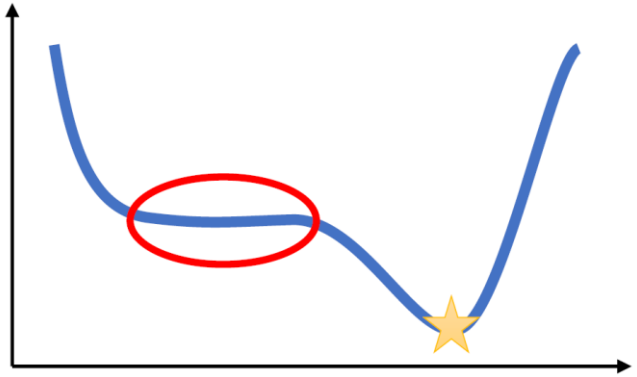


Πηγή: https://arxiv.org/abs/1712.09913

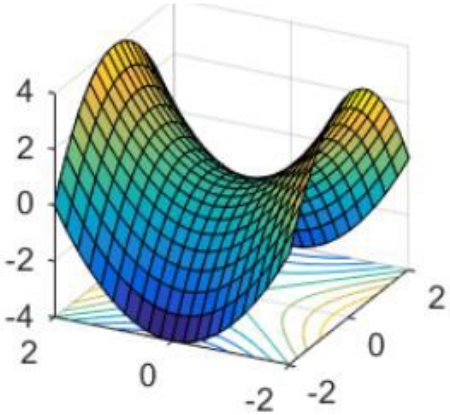
Ειδικές περιπτώσεις μη-κυρτότητας



Τοπικό ελάχιστο



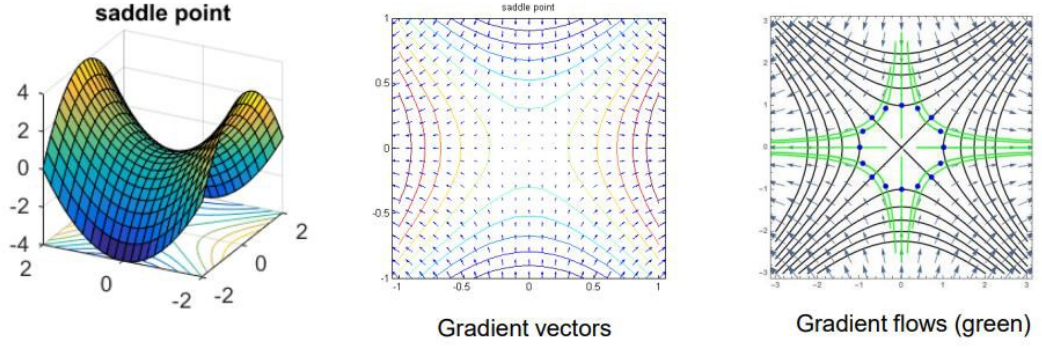
«Οροπέδιο»



Σαγματικό Σημείο

Ειδικές περιπτώσεις μη-κυρτότητας

- **Τοπικά ελάχιστα**
  - Παρότι φαίνονται να είναι σοβαρό πρόβλημα, στην πράξη η *επίδρασή* τους *μετριάζεται όσο αυξάνουν* οι *παράμετροι* του μοντέλου
  - Σε *μεγάλα μοντέλα*, παρότι υπάρχουν, *εμπειρικά* έχει φανεί πως δεν είναι πολύ χειρότερα από τα ολικά ελάχιστα
- **Οροπέδια**
  - *Δεν πρέπει* να επιλέγουμε *εξ'αρχής πολύ μικρούς ρυθμούς μάθησης* για να μην «*κολλάμε*» σε οροπέδια
- **Σαγματικά σημεία**
  - *Πολύ μικρές* κλίσεις στα σαγματικά σημεία
  - Στην πράξη έχει παρατηρηθεί ότι *τα περισσότερα «κρίσιμα» σημεία* σε συναρτήσεις σφάλματος νευρωνικών δικτύων είναι *σαγματικά σημεία*



Επιτάχυνση κλίσης

Μέθοδος Newton

- Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης απώλειας γύρω από σημείο $\boldsymbol{\theta}_0$

$$J(\boldsymbol{\theta}) \approx J(\boldsymbol{\theta}_0) + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)$$

- Αν το μοντέλο έχει n παραμέτρους τότε
  - **Κλίση** $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0) = \left[\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_2}, \cdots, \frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_n}\right]$ έχει n παραμέτρους
  - **Εσσιανός Πίνακας** $\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \theta_n \partial \theta_n} \end{bmatrix}$ έχει n^2 παραμέτρους
- *Κλίση* γύρω από το τοπικό ελάχιστο $\boldsymbol{\theta}^*$ μηδενική, οπότε

$$\boldsymbol{\theta}^* \leftarrow \boldsymbol{\theta}_0 - \left(\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0)\right)^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0)$$

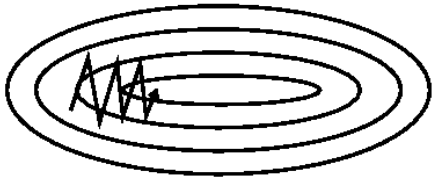
- Όρος $\left(\nabla^2_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0)\right)^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}_0)$ έχει *πολυπλοκότητα* $\mathcal{O}(n^3)$ που τον καθιστά απαγορευτικό για μεγάλα μοντέλα
  - Για αυτό το λόγο αποφεύγουμε μεθόδους που απαιτούν τον υπολογισμό δευτέρων παραγώγων και προσπαθούμε να «επιταχύνουμε» την κατάβαση κλίσης

Ορμή (Momentum)

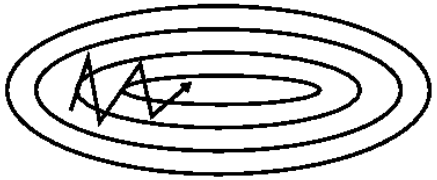
- **Κεντρική Ιδέα**
  - Αν *διαδοχικές κλίσεις «δείχνουν»* προς την *ίδια κατεύθυνση*, θα πρέπει να κινηθούμε προς τα εκεί *πιο γρήγορα*
- **Όρος ορμής**
  - Προσθήκη ενός *κλάσματος* γ (συνήθως 0,9) του διανύσματος του *προηγούμενου* βήματος στο *τωρινό*

$$v_t \leftarrow \gamma v_{t-1} + \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) \text{ και } \boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - v_t$$

  - Μειώνει το *εύρος* της ενημέρωσης για τις *παραμέτρους* εκείνες που αλλάζουν κατεύθυνση στην κλίση
  - Αυξάνει το *εύρος* της ενημέρωσης για τις *παραμέτρους* εκείνες που δεν αλλάζουν κατεύθυνση στην κλίση



SGD χωρίς ορμή

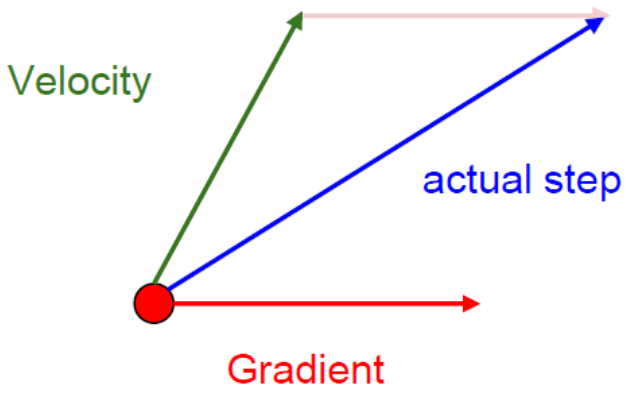


SGD με ορμή

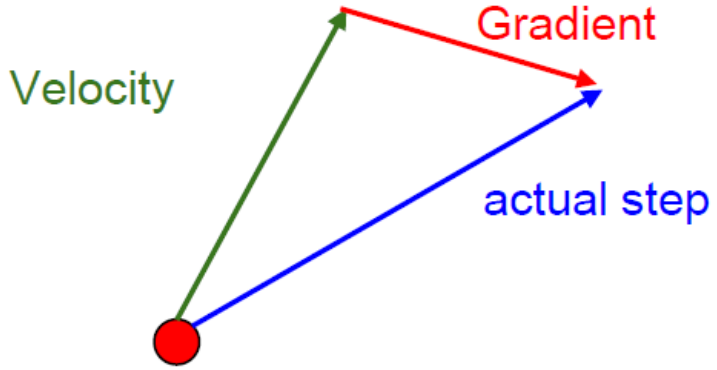
Επιταχυνόμενη Κλίση Nesterov

- Η προσθήκη *όρου ορμής* επιταχύνει την *κατάβαση* στα *τυφλά*
  - Πρώτα υπολογίζει την *κλίση* και στη συνέχεια πραγματοποιεί *ένα μεγάλο άλμα*
- Η **επιταχυνόμενη κλίση Nesterov** (*Nesterov Accelerated Gradient – NAG*)
  - Πρώτα πραγματοποιεί το *άλμα* στην κατεύθυνση της προηγούμενης κλίσης $\boldsymbol{\theta} - \gamma v_{t-1}$
  - Κατόπιν «μετρά» που έχει καταλήξει και κάνει *διόρθωση* των *παραμέτρων*

$$v_t \leftarrow \gamma v_{t-1} + \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta} - \gamma v_{t-1}) \text{ και } \boldsymbol{\theta} \leftarrow \boldsymbol{\theta} - v_t$$

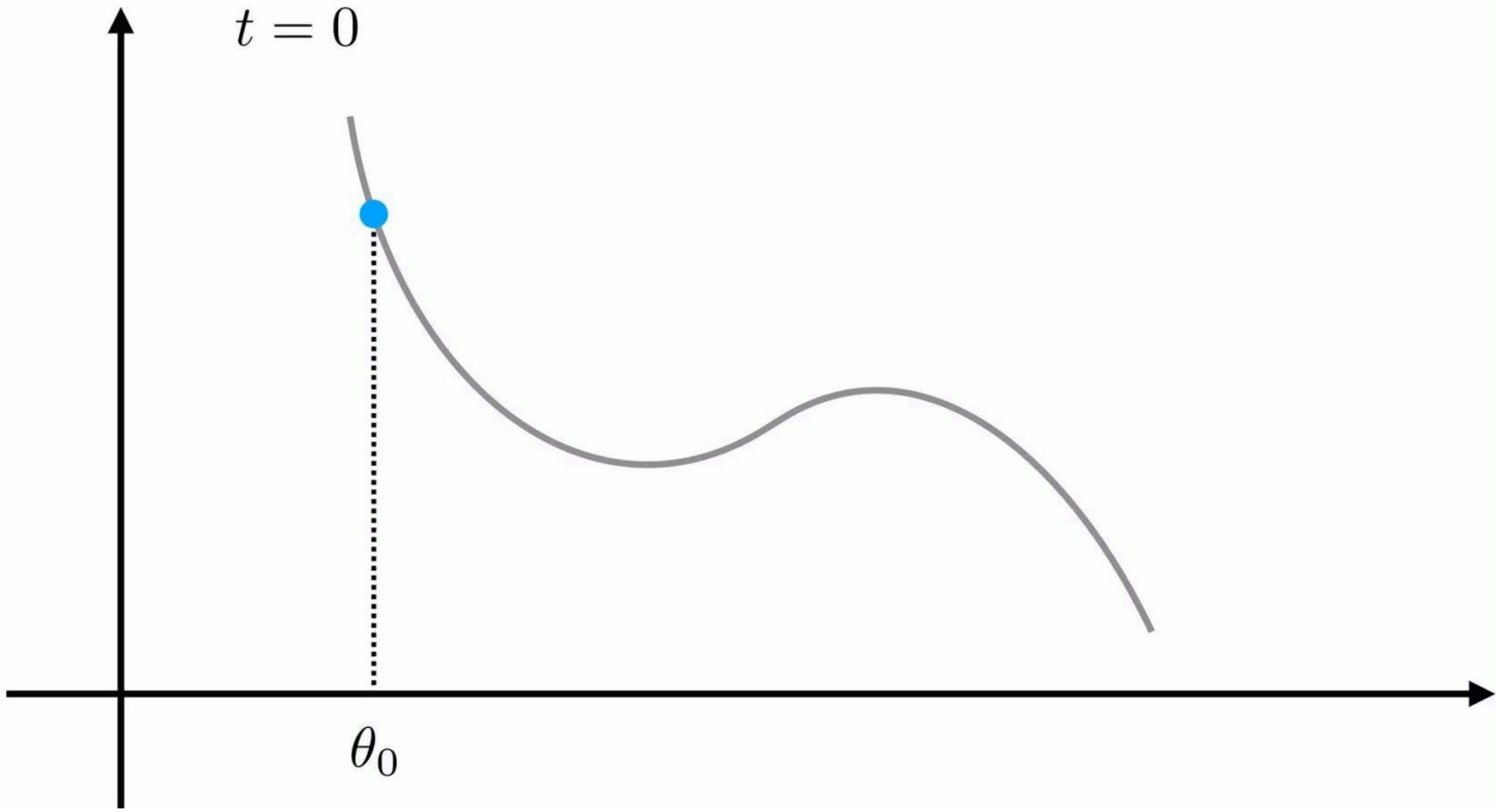


Όρος ορμής



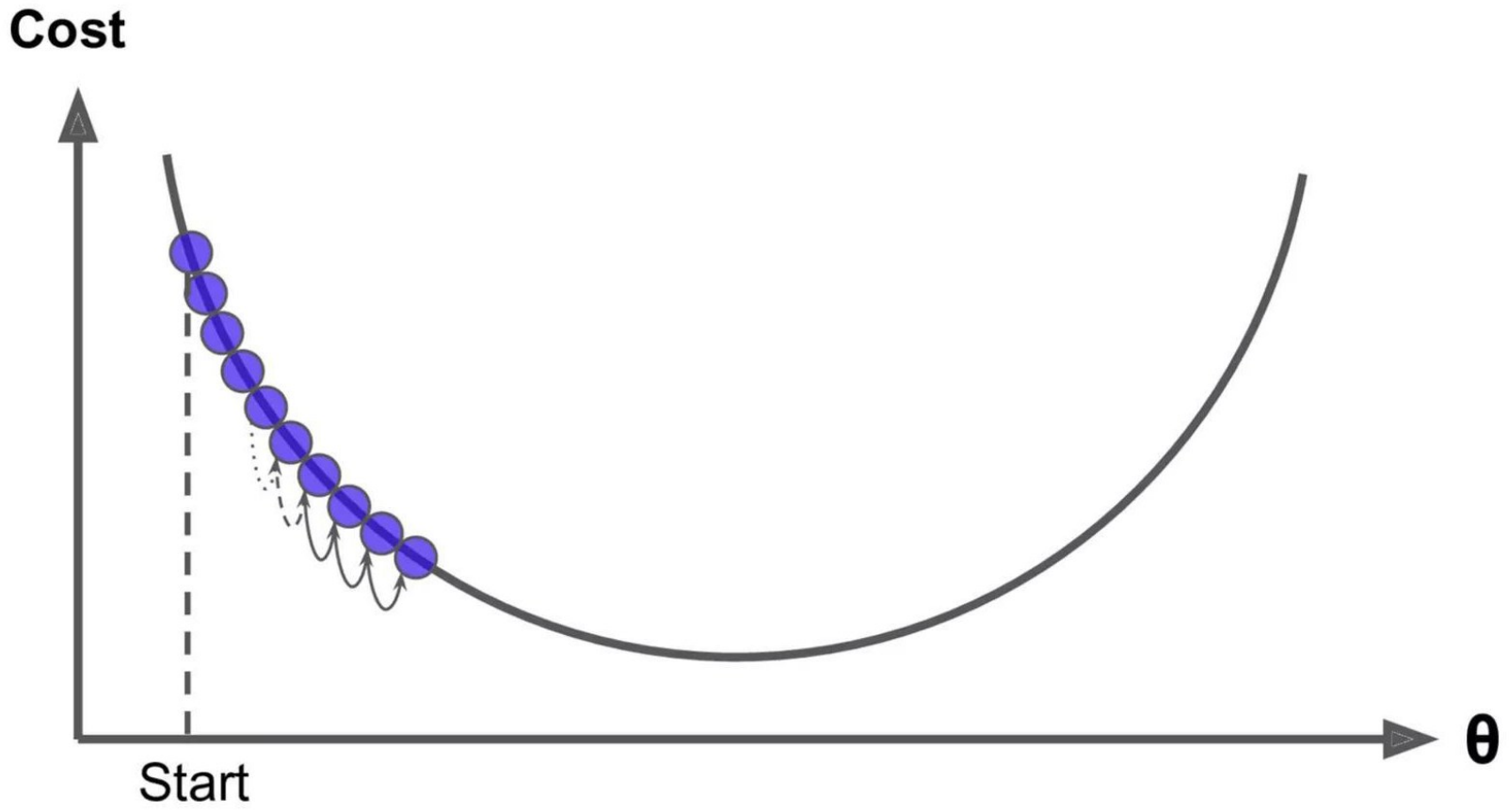
NAG

Κατάβαση κλίσης με ορμή

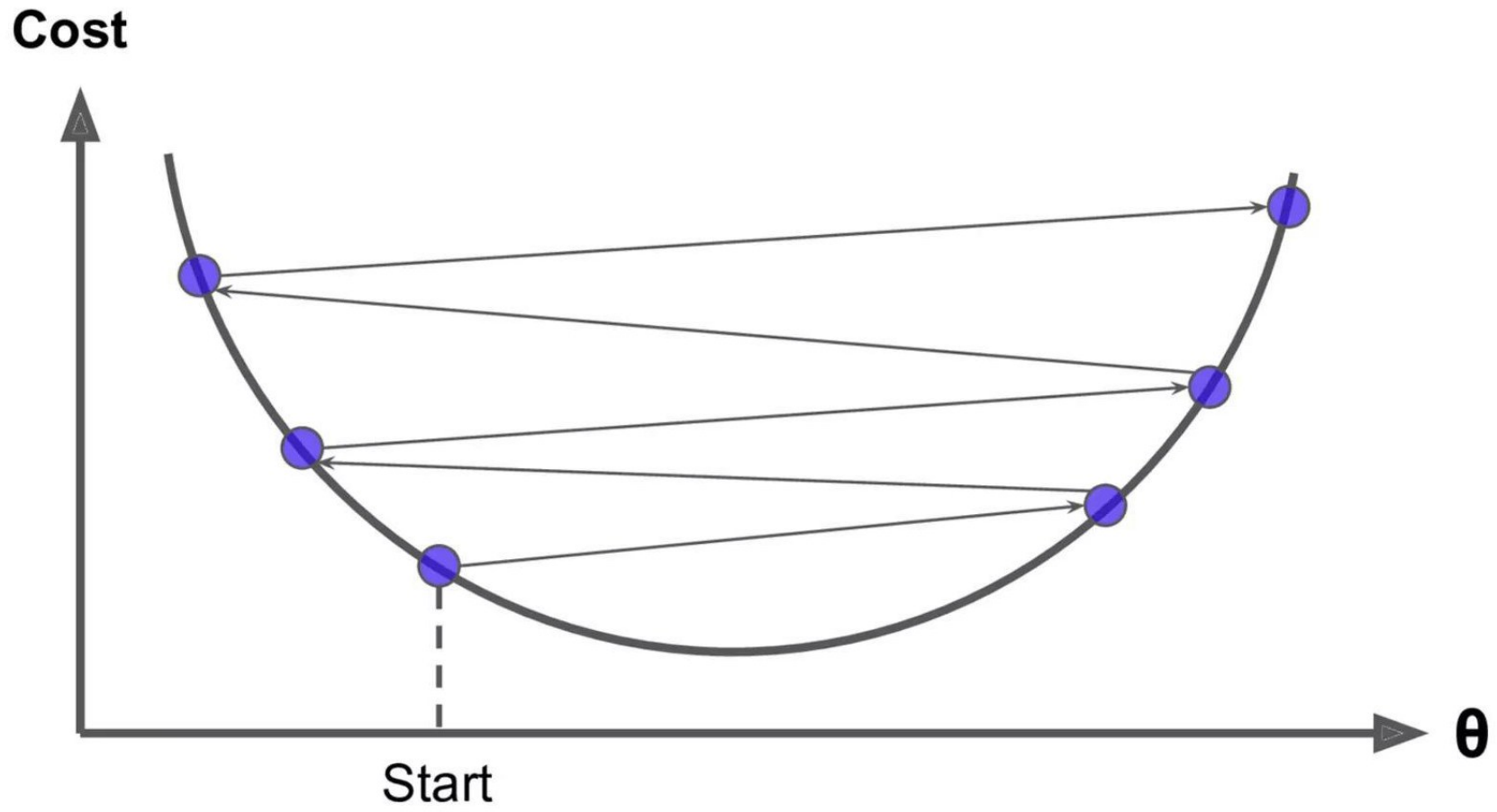


Επίδραση Ρυθμού Μάθησης

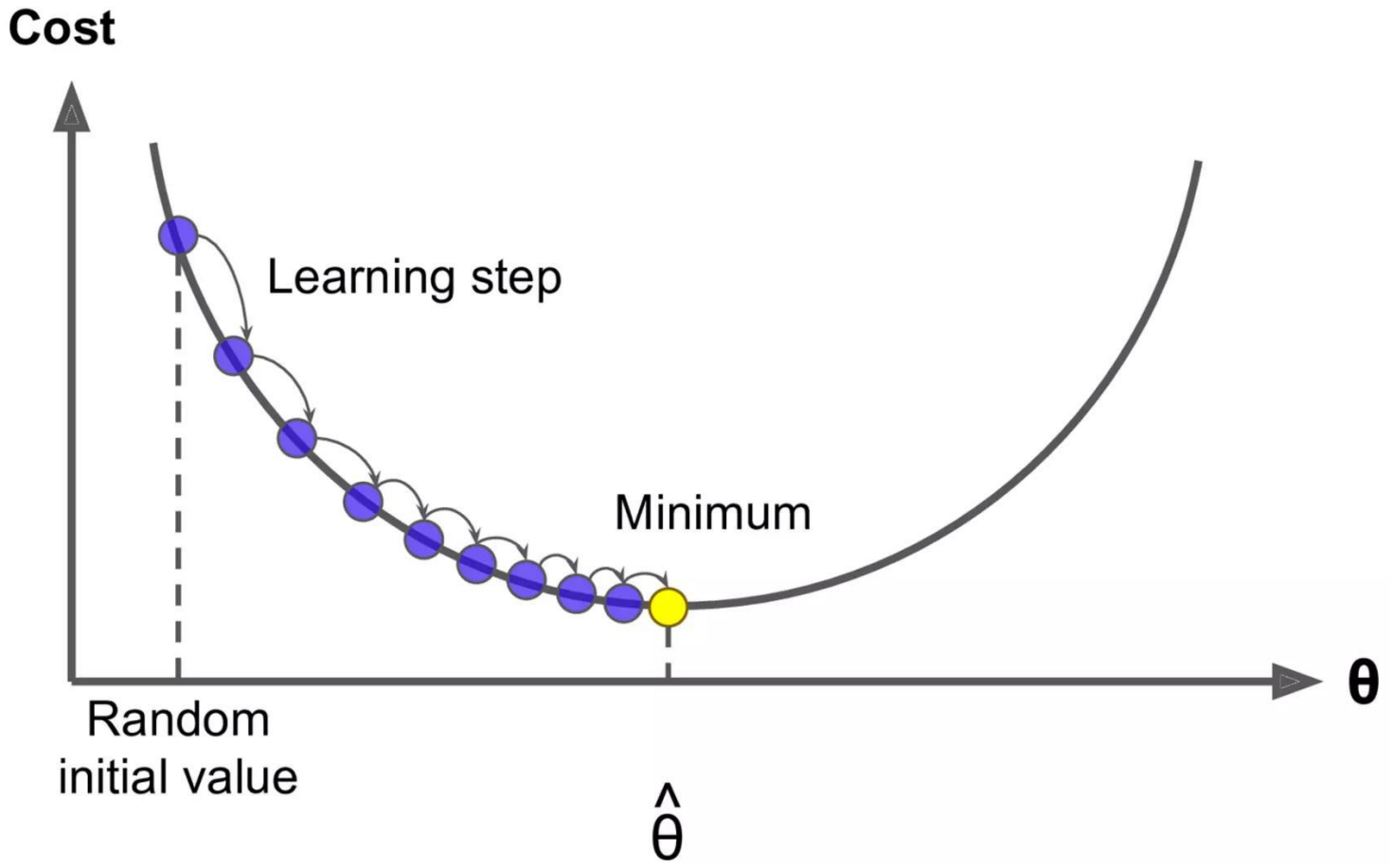
Χαμηλός ρυθμός μάθησης



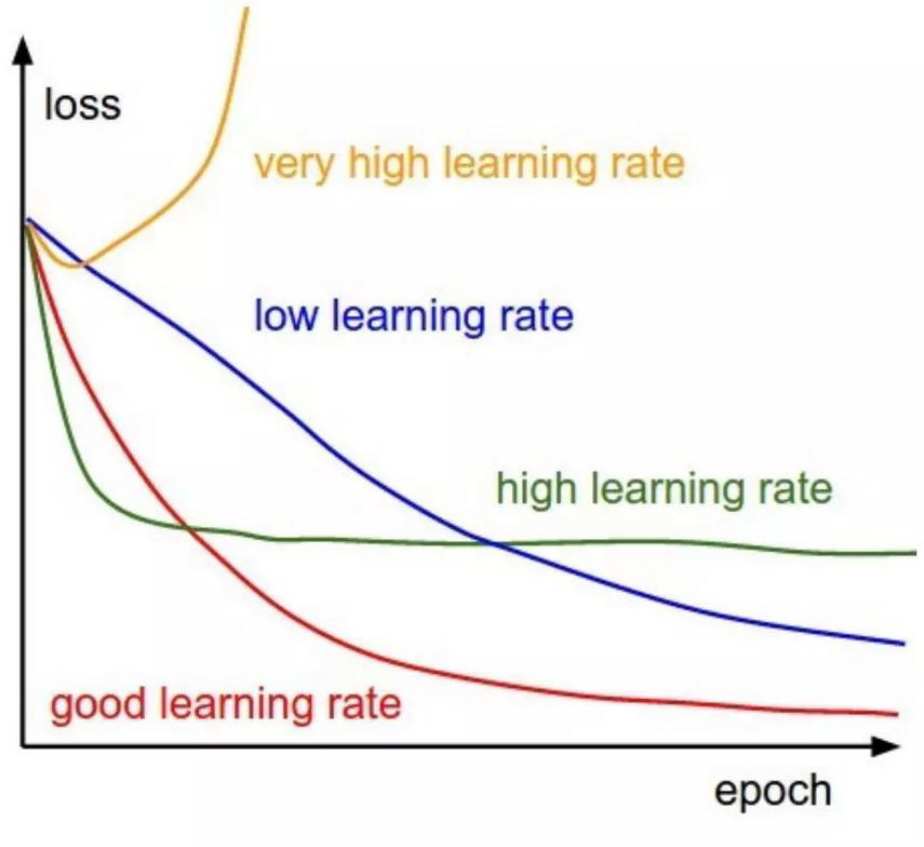
Υψηλός ρυθμός μάθησης



Κανονικός ρυθμός μάθησης



Επίδραση ρυθμού μάθησης



Adagrad

- *Προσαρμόζει* το *ρυθμό μάθησης* στις *παραμέτρους* του μοντέλου
  - *Μεγάλες* ενημερώσεις για μη-συχνές παραμέτρους, *μικρές* ενημερώσεις για συχνές παραμέτρους
- *Κανόνας ενημέρωσης* SGD: $\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \eta \cdot g_t$ και $g_t = \nabla_{\boldsymbol{\theta}_t} J(\boldsymbol{\theta}_t)$
- Ο *Adagrad διαιρεί* το *ρυθμό μάθησης* με την *τετραγωνική ρίζα* του *αθροίσματος* των τετραγώνων των *προηγούμενων* κλίσεων

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \frac{\eta}{\sqrt{G_t + \epsilon}} \odot g_t$$

  - $G_t \in \mathbb{R}^{d \times d}$ *διαγώνιος πίνακας* με το i-οστό του στοιχείο να είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των κλίσεων του θ_i μέχρι τη χρονική στιγμή t
  - ϵ όρος *ομαλοποίησης* για να αποφευχθεί η διαίρεση με το μηδέν
  - $\odot$ πολλαπλασιασμός Hadamard

Adagrad

- **Πλεονεκτήματα**
  - *Κατάλληλος* για χρήση όταν τα *δεδομένα* είναι *αραιά*
  - *Βελτιώνει σημαντικά* την *ευρωστία* του *SGD*
  - Δεν απαιτεί τη «*χειροκίνητη*» ρύθμιση του ρυθμού μάθησης
- **Μειονεκτήματα**
  - *Συσσωρεύει τετραγωνικές* κλίσεις στον παρονομαστή και έτσι *προκαλεί μεγάλη μείωση* του ρυθμού μάθησης

Adadelta

- Αντιμετωπίζει το *μειονέκτημα* του *Adagrad* μέσω του *περιορισμού* του *πλήθους* των *παρελθοντικών κλίσεων* που λαμβάνονται υπόψη, σε παράθυρο σταθερού μεγέθους
- **Ενημέρωση SGD**

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t + \Delta\boldsymbol{\theta}_t \text{και } \Delta\boldsymbol{\theta}_t = -\eta \cdot g_t$$

- Ορίζει έναν *τρέχοντα μέσο όρο* του τετραγώνου των κλίσεων $\mathbb{E}[g^2]_t$ τη χρονική στιγμή t

$$\mathbb{E}[g^2]_t = \gamma\mathbb{E}[g^2]_{t-1} + (1-\gamma)g_t^2$$

  - γ: όρος αντίστοιχου του παράγοντα ορμής, συνήθως λαμβάνει την τιμή 0,9

- **Ενημέρωση Adadelta**

RMSProp

- *Προτάθηκε* από τον *Geoff Hinton* την *ίδια περίοδο* με τον *Adadelta* και έχει *παρόμοια* φιλοσοφία
- Επίσης *διαιρεί* το *ρυθμό μάθησης* με τον *τρέχοντα μέσο όρο* του τετραγώνου των κλίσεων

$$\mathbb{E}[g^2]_t = \gamma \mathbb{E}[g^2]_{t-1} + (1-\gamma) g_t^2$$

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \frac{\eta}{\sqrt{\mathbb{E}[g^2]_t + \epsilon}} g_t$$

- Ο *όρος φθοράς* γ συνήθως τίθεται στο 0,9 ενώ ο *ρυθμός μάθησης* η στο 0,001

Επίδραση Ρυθμού Μάθησης και Ορμής

Adaptive Moment Estimation (Adam)

- Όπως οι *Adadelta* και *RMSprop*, ο **Adam** υπολογίζει *τον κινούμενο μέσο όρο* των *προηγούμενων τετραγωνικών* κλίσεων v_t
- Όπως οι βελτιστοποιητές με παράγοντα ορμής, υπολογίζει τον κινούμενο μέσο όρο των *προηγούμενων κλίσεων* m_t
- **Ενημέρωση Adam**

$$\boldsymbol{m}_t = \beta_1 \boldsymbol{m}_{t-1} + (1-\beta_1)\boldsymbol{g}_t$$
$$\boldsymbol{v}_t = \beta_2 \boldsymbol{v}_{t-1} + (1-\beta_2)\boldsymbol{g}_t^2$$

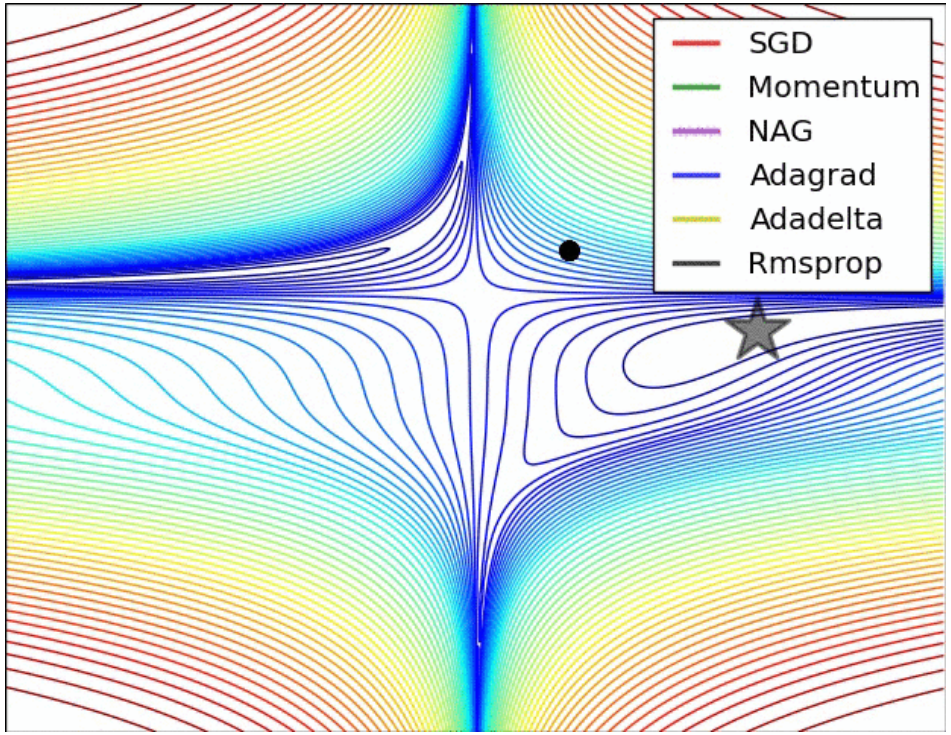
  - $\boldsymbol{m}_t$: *μέση τιμή* κλίσεων (διάνυσμα που αρχικοποιείται στο 0)
  - $\boldsymbol{v}_t$: (μη-κεντραρισμένη) *διασπορά* κλίσεων (διάνυσμα που αρχικοποιείται στο 0)
  - β_1, β_2: ρυθμός *φθοράς*
- Αφαίρεση **μεροληψίας** (*bias*) προς το 0 από m_t, v_t

$$\widehat{\boldsymbol{m}_t} = \frac{\boldsymbol{m}_t}{1-\beta_1^t} \text{ και } \widehat{\boldsymbol{v}_t} = \frac{\boldsymbol{v}_t}{1-\beta_2^t}$$

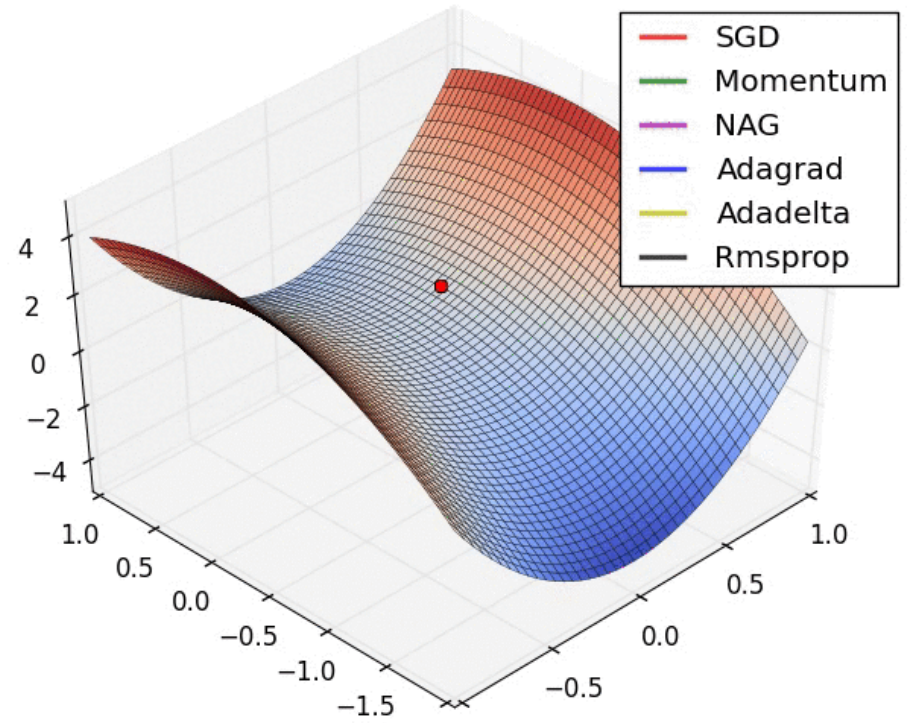
- Κανόνας Ενημέρωσης Adam: $\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t - \frac{\eta}{\sqrt{\widehat{v_t}}+\epsilon}\widehat{m_t}$

Οπτικοποίηση των αλγορίθμων

Επιφάνειες συναρτήσεων απώλειας



Σαγματικό σημείο



Πηγή: https://imgur.com/a/visualizing-optimization-algos-Hqolp

Καταλληλότητα

- Μέθοδοι του *προσαρμοστικού* ρυθμού μάθησης (Adagrad, Adadelta, RMSProp, Adam) είναι *καταλληλότεροι* για *προβλήματα* με *αραιά χαρακτηριστικά*
- *Adagrad*, *Adadelta*, *RMSProp*, Adam έχουν *ικανοποιητική* απόδοση σε *παρόμοιες* συνθήκες
- Οι *δημιουργοί* του *Adam* ισχυρίζονται ότι το *βήμα διόρθωσης* της *μεροληψίας* τον *καθιστά ελαφρώς καλύτερο* από τον *RMSProp*

Βιβλιογραφία

- *Quian, N.* (1999) - "On the momentum term in gradient descent learning algorithms" – *Neural networks : the official journal of the International Neural Network Society*, 12(1):145-151
- *Nesterov, Y.* (1983) – "A method for unconstrained convex minimization problem with the rate of convergence o(1/k2)" - *Doklady ANSSSR (translated as Soviet.Math.Docl.)*, 269:543-547
- *Duchi, J.* (2011) – "Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization" - *Journal of Machine Learning Research*, 12:2121-2159.
- *Zeiler, M. D.* (2012) – "ADADELTA: An Adaptive Learning Rate Method" *arXiv preprint* arXiv:1212.5701.
- *Kingma, D. P.* (2015) – "Adam: a Method for Stochastic Optimization." *International Conference on Learning Representations,* pages 1-13.