

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις του Ομότιμου Καθηγητή του ΕΜΠ κ. Ιωάννη Σ. Ράπτη για τις ανάγκες του μαθήματος «Φυσική – Ι (Μηχανική)» της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ

Παναγιώτης Μπούσουλας
Επίκουρος Καθηγητής
ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2026

1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)**
2. **Νόμοι του Νεύτωνα (ΒΛΕΠΕ: Chapt_02**

3. **Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς – Αδρανειακές Δυνάμεις**

Παράδειγμα 3.3.2 Άνθρωπος βρίσκεται πάνω σε οριζόντια κυκλική πλατφόρμα η οποία περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονά της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Ο άνθρωπος βαδίζει κατά μήκος μίας ακτίνας η οποία έχει χαραχτεί στην πλατφόρμα, από τον άξονα περιστροφής προς την περιφέρειά της, κινούμενος με σταθερή ταχύτητα υ΄, ως προς την πλατφόρμα. Μελετήστε το ρόλο της δύναμης της τριβής, (α) σύμφωνα με τον αδρανειακό παρατηρητή, (β) σύμφωνα με τον μη-αδρανειακό παρατηρητή, και (γ) υπολογίστε μέχρι ποιά χρονική στιγμή, ή, (ισοδύναμα) μέχρι ποια απόσταση από το κέντρο μπορεί να συνεχιστεί η κίνηση χωρίς τον κίνδυνο ολίσθησης, αν ο συντελεστής στατικής τριβής, ανάμεσα στον άνθρωπο και στην πλατφόρμα, είναι μ.

Επιλέγουμε τους άξονες $z \equiv z'$ να συμπίπτουν με τον άξονα περιστροφής της πλατφόρμας, και τον άξονα x' του μη-αδρανειακού συστήματος να συμπίπτει με την ακτίνα η οποία έχει χαραχτεί πάνω στην πλατφόρμα (και $\hat{y}' = \hat{z}' \times \hat{x}'$) . Τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{z}'$$

$$\vec{r}' = (\upsilon' t)\hat{x}' \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}' = \upsilon'\hat{x}' \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = 0$$

(α) Για τον αδρανειακό παρατηρητή, η μόνη δύναμη που ασκείται στον άνθρωπο παράλληλα στο επίπεδο κίνησης είναι η τριβή από το δάπεδο, η οποία παίζει και το ρόλο επιταχύνουσας δύναμης, αφού, για αυτόν τον παρατηρητή, χρειάζεται κεντρομόλο επιτάχυνση και, μάλιστα, όλο και μεγαλύτερη, αφού μετατοπίζεται σε όλο και μεγαλύτερες αποστάσεις από το κέντρο περιστροφής $\vec{F}_{\tau\rho\iota\beta} = m\vec{a}_F$ (1)

Η επιτάχυνση, $\vec{a}$, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι ευκολότερο να υπολογιστεί με τη βοήθεια του μη αδρανειακού

$$\vec{a}_F = \vec{a}_R + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) = 0 + 0 + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$$

Όπου: $2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R = 2(\omega\hat{z}') \times (\upsilon'\hat{x}') = 2\omega\upsilon'\hat{y}'$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) = (\omega\hat{z}') \times \left[(\omega\hat{z}') \times (\upsilon' t\hat{x}')\right] = -\omega^2\upsilon' t\hat{x}'$$

Αντικαθιστώντας στην (1), παίρνουμε $\vec{F}_{\tau\rho\iota\beta} = m\left(2\omega\upsilon'\hat{y}' - \omega^2\upsilon' t\,\hat{x}'\right) = m\omega\upsilon'\left(2\hat{y}' - \omega t\,\hat{x}'\right)$ (1)

Παρατηρούμε ότι η τριβή έχει (i) μία σταθερή συνιστώσα κάθετα στην ευθεία που συνδέει το κέντρο περιστροφής με την στιγμιαία θέση του, και (ii) μία συνιστώσα που κατευθύνεται συνεχώς προς το κέντρο και αυξάνει γραμμικά με το χρόνο.

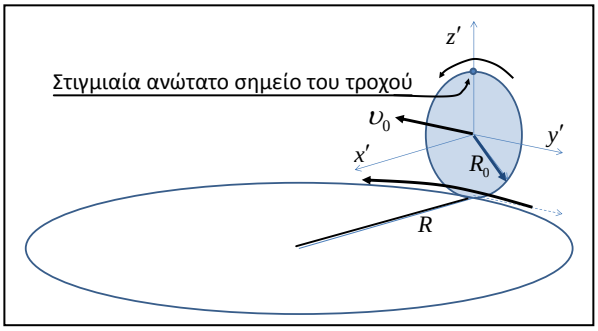
(β) Για τον μη-αδρανειακό παρατηρητή (που περιστρέφεται μαζί με το δίσκο), ο άνθρωπος κινείται ισοταχώς και επομένως το άθροισμα των πραγματικών δυνάμεων (τριβή) και των αδρανειακών «ψευδοδυνάμεων» (Corilois και φυγόκεντρος) πρέπει να έχουν άθροισμα μηδέν. Επομένως, η σχέση (1), για τον μη-αδρανειακό παρατηρητή, ισχύει με το μορφή

$$\vec{F}_{\tau\rho\iota\beta} - m2\omega\upsilon'\hat{y}' + m\omega^2\upsilon' t\,\hat{x}' = 0 \qquad (2)$$

(γ) Παρατηρούμε ότι η σχέση (1), στην οποία καταλήγει ο αδρανειακός παρατηρητής και η σχέση (2), στην οποία καταλήγει ο μη-αδρανειακός παρατηρητής, είναι αλγεβρικά ισοδύναμες, αλλά ερμηνεύονται με διαφορετικό τρόπο. Επειδή και οι δύο αφορούν την δύναμη της τριβής για την οποία ισχύει: $\left|\vec{F}_{\tau\rho\iota\beta}\right| \le \mu mg$ (3),

υπολογίζοντας το μέτρο της δύναμης της τριβής είτε από την (1), είτε από την (2) και αντικαθιστώντας στην (3), παίρνουμε

$$\sqrt{4m^2\omega^2\upsilon'^2+m^2\omega^4\upsilon'^2t^2}\le\mu mg \quad\Rightarrow\quad \boxed{x'\equiv\upsilon' t\le\frac{\sqrt{\mu^2g^2-4\omega^2\upsilon'^2}}{\omega^2}}$$



Παράδειγμα 3.3.3 Τροχός ποδηλάτου ακτίνας R_0 κυλάει με μεταφορική ταχύτητα σταθερού μέτρου (υ_0: μέτρο της ταχύτητας του κέντρου του τροχού, ως προς το έδαφος), παραμένοντας κατακόρυφος και κινούμενος αριστερόστροφα κατά μήκος οριζόντιας κυκλικής τροχιάς ακτίνας R. Πόση είναι η επιτάχυνση του ανώτατου σημείου της περιφέρειάς του (ως προ το έδαφος);

Επειδή αναζητάμε την επιτάχυνση του (εκάστοτε) ανώτατου σημείου της περιφέρειας, θα επιλέξουμε ένα μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς $O'x'y'z'$ με την αρχή του O΄ στο κέντρο του κυλιόμενου τροχού, <u>τον άξονα x΄ να είναι ο άξονας συμμετρίας του τροχού</u>, <u>τον άξονα z΄ να είναι συνέχεια κατακόρυφος</u> και τον άξονα y΄ κάθετο στους δύο άλλους, όπως στο σχήμα. Το σύστημα αυτό παρουσιάζει και μεταφορική (κυκλική) κίνηση του κέντρου του O΄, αλλά και περιστροφική κίνηση περί τον κατακόρυφο άξονα z (που συμπίπτει με τον z΄).

Το σύστημα $O'x'y'z'$ είναι τέτοιο ώστε η αρχή του O΄ παρουσιάζει "μεταφορική" επιτάχυνση, ως προς το αδρανειακό σύστημα του εδάφους, $\ddot{\vec{R}}=\frac{\upsilon_0^2}{R}\hat{x}'$, (βλ. εξ. (4) της ενότητας 3.1)

[Το "μεταφορική" είναι σε εισαγωγικά, διότι το κέντρο του τροχού "μεταφέρεται" μεν με ταχύτητα σταθερού μετρου υ_0, αλλά σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, οπότε η αντίστοιχη επιτάχυνσή του είναι τελικά κεντρομόλος επιτάχυνση]

Ταυτόχρονα, το σύστημα αυτό περιστρέφεται περί τον άξονα z΄ με $\vec{\omega}=\frac{\upsilon_0}{R}\hat{z}'$.

[Αυτή είναι η κυκλική συχνότητα περιστροφής του κέντρου του τροχού, η οποία όμως συμπίπτει με την κυκλική συχνότητα περιστροφής του κατακόρυφου επιπέδου του τροχού, περί τον συνεχώς κατακόρυφο άξονα z΄, αφού, π.χ., ο άξονας x΄ επανέρχεται στον ίδιο προσανατολισμό (ως προς το αδρανειακό σύστημα του εδάφους) μετά από μία πλήρη περιστροφή του κέντρου του τροχού]

Τε εκάστοτε ανώτατο σημείο, ως προς $O'x'y'z'$, χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη

$$\vec{r}'=R_0\hat{z}', \qquad \vec{\upsilon}'=-\upsilon_0\hat{y}', \qquad \vec{a}'=-\frac{\upsilon_0^2}{R_0}\hat{z}'$$

Αντικαθιστούμε στην πλήρη έκφραση των μη αδρανειακών επιταχύνσεων

$$\vec{a}_F=\ddot{\vec{R}}+\vec{a}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}'+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)=$$
$$=\hat{x}'\frac{\upsilon_0^2}{R}-\hat{z}'\frac{\upsilon_0^2}{R_0}+0+2\left(\hat{z}'\frac{\upsilon_0}{R}\right)\times\left(-\hat{y}'\upsilon_0\right)+\left(\hat{z}'\frac{\upsilon_0}{R}\right)\times\left[\left(\hat{z}'\frac{\upsilon_0}{R}\right)\times\left(\hat{z}'R_0\right)\right]'$$

$$\vec{a}_F=\hat{x}'\frac{\upsilon_0^2}{R}-\hat{z}'\frac{\upsilon_0^2}{R_0}+0+2\hat{x}'\left(\frac{\upsilon_0^2}{R}\right)+\left(-\hat{z}'\frac{\upsilon_0}{R}\right)\times 0\Rightarrow\boxed{\vec{a}_F=\hat{x}'\left(3\frac{\upsilon_0^2}{R}\right)-\hat{z}'\frac{\upsilon_0^2}{R_0}}$$

Διαφορετικό μη-αδρανειακό σύστημα: Υιοθετούμε ένα μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς $O'x'y'z'$ με την αρχή του Ο΄ στο κέντρο του κυλιόμενου τροχού, τον άξονα x΄ να είναι ο άξονας συμμετρίας του τροχού, και τους άξονες y΄ και z΄ να περιστρέφονται περί τον x΄ (ωσάν να είναι σχεδιασμένοι πάνω στον τροχό). [Για οικονομία, χρησιμοποιούμε το ίδιο σχήμα,θεωρώντας επίσης ότι όλα τα μεγέθη μελετώνται κατά ένα στιγμιότυπο που ο z΄ είναι κατακόρυφος, και αναφέρουμε τα αποτελέσματα ως προς αυτό το στιγμιότυπο.]
Το σύστημα αυτό παρουσιάζει και μεταφορική (κυκλική) κίνηση του κέντρου του Ο΄, αλλά και μία σύνθετη περιστροφική κίνηση, η οποία αποτελείται από δύο περιστροφικές συνιστώσες: (i) περί τον κατακόρυφο άξονα z, ίση με $\vec{\omega}_z = \frac{\upsilon_0}{R}\hat{z}$, και (ii) περί τον εκάστοτε άξονα x', ίση με $\vec{\omega}_{x'} = \frac{\upsilon_0}{R_0}\hat{x}'(t)$, δηλαδή, συνολικά $\vec{\omega} = \frac{\upsilon_0}{R_0}\hat{x}'(t) + \frac{\upsilon_0}{R}\hat{z}$. Επομένως, η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του εκάστοτε ανώτατου σημείου του τροχού, (ως προς αυτό το μη-αδρανειακό σύστημα), θα είναι $\vec{r}' = \hat{z}R_0$ (συμφέρει να εκφραστεί στο μοναδιαίο του αδρανειακού), $\vec{\upsilon}' = 0$, και $\vec{a}' = 0$, ενώ η επιτάχυνση του Ο΄ ως προς το αδρανειακό σύστημα του εδάφους θα είναι ίση με $\vec{A} = \hat{x}'(t)\frac{\upsilon_0^2}{R}$. Έτσι, στη συνολική έκφραση απομένουν οι εξής όροι

$$\vec{a}_F = \vec{A} + \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' = \vec{A} + 0 + 0 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$$

Υπολογίσουμε τους εναπομείναντες όρους, αρχίζοντας από το τέλος.

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\upsilon_0}{R_0}\hat{x}'(t) + \frac{\upsilon_0}{R}\hat{z}\right] = \frac{\upsilon_0}{R_0}\dot{\hat{x}}'(t) + 0 = \frac{\upsilon_0}{R_0}\hat{y}'(t)\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \hat{y}'(t)\frac{\upsilon_0}{R_0}\frac{\upsilon_0}{R}$$

$$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' = \left(\hat{y}'(t)\frac{\upsilon_0^2}{R_0 R}\right)\times(\hat{z}R_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' = \hat{x}'(t)\frac{\upsilon_0^2}{R}$$

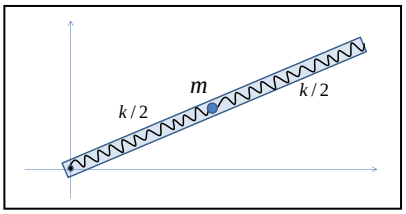
και

$$\vec{\omega}\times\vec{r}' = \left[\frac{\upsilon_0}{R_0}\hat{x}'(t) + \frac{\upsilon_0}{R}\hat{z}\right]\times(\hat{z}R_0) \Rightarrow (\vec{\omega}\times\vec{r}') = -\hat{y}'(t)\upsilon_0$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \left[\frac{\upsilon_0}{R_0}\hat{x}'(t) + \frac{\upsilon_0}{R}\hat{z}\right]\times(-\hat{y}'(t)\upsilon_0) = -\hat{z}'(t)\frac{\upsilon_0^2}{R_0} + \hat{x}'(t)\frac{\upsilon_0^2}{R}$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση $\vec{a}_F = \vec{A} + 0 + 0 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$

$\vec{a}_F = \vec{A} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' \Rightarrow\Rightarrow$ $\boxed{\vec{a}_F = \hat{x}'\left(3\frac{\upsilon_0^2}{R}\right) - \hat{z}'\frac{\upsilon_0^2}{R_0}}$, σε συνέπεια με το προηγούμενο.



Παράδειγμα 3.3.4 Κενός σωλήνας φέρει στο εσωτερικό του σφαιρίδιο μάζας, το οποίο είναι συνδεδεμένο, αμφίπλευρα, με δύο ελατήρια με σταθερά ελατηρίου k/2 το καθένα, το άλλο άκρο των οποίων είναι συνδεδεμένο στο αντίστοιχο προσκείμενο άκρο του σωλήνα. Το σφαιρίδιο μπορεί να κινείται χωρίς τριβή στο εσωτερικό του σωλήνα, ενώ ο σωλήνας περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Μελετήστε την κίνηση του σφαιριδίου, κατά τη διάρκεια περιστροφής του σωλήνα

Όταν το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, ανάλογα με τα φυσικά μήκη των ελατηρίων και το συνολικό μήκος του σωλήνα, το σφαιρίδιο θα ισορροπεί σε κάποια ακτινική απόσταση (από τον άξονα περί τον οποίον θα αρχίσει να περιστρέφεται) έστω ρ_0. Για οποιαδήποτε

μετακίνηση του σφαιριδίου σε μία νέα θέση ρ, θα ασκείται από τα δύο ελατήρια καθαρή ακτινική δύναμη ίση με $2\left[-\frac{k}{2}(\rho-\rho_0)\right]=-k(\rho-\rho_0)$

Κατ' αναλογία με το Παράδειγμα 3.1.4 και τις εξισώσεις (1 α,β) ,ή, ισοδύναμα, την εξίσωση (2) του Παραδείγματος 3.1.4, γράφοντας κατά συνιστώσες την (2) και συμπεριλαμβάνοντας την δύναμη των ελατηρίων, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}=-k\left(\rho-\rho_0\right)\hat{\rho} \\ m\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}=A\hat{\varphi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \ddot{\rho}-\rho\omega^2=-\omega_0^2\left(\rho-\rho_0\right) \\ A=2m\dot{\rho}\omega \end{array}\right\} \qquad (3\ \alpha,\beta)$$

Όπου Α: η οριζόντια αντίδραση του σωλήνα στο σωματίδιο, κάθετα στον άξονά του, και $\omega_0^2=k/m$: η φυσική συχνότητα ταλάντωσης του σφαιριδίου, αν απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας ρ_0, όταν ο σωλήνας είναι ακίνητος. Από τη διαφορική εξίσωση (3α), αν ορίσουμε μία νέα μεταβλητή, $\xi=\rho-\rho_0$, οπότε, $\dot{\xi}=\dot{\rho}\Rightarrow\ddot{\xi}=\ddot{\rho}$, έχουμε:

$$\ddot{\xi}-\left(\xi+\rho_0\right)\omega^2=-\omega_0^2\xi \quad\Rightarrow\quad \ddot{\xi}+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\xi=\rho_0\omega^2$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση, (αν εξαιρέσει κανείς, προς στιγμήν, τον «μη ομογενή όρο» $\rho_0\omega^2=\beta$), είναι της μορφής $\ddot{\xi}\pm a^2\xi=0$, ανάλογα με το πρόσημο της διαφοράς $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)$.

Για $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)>0$, οι λύσεις είναι αρμονικές συναρτήσεις.

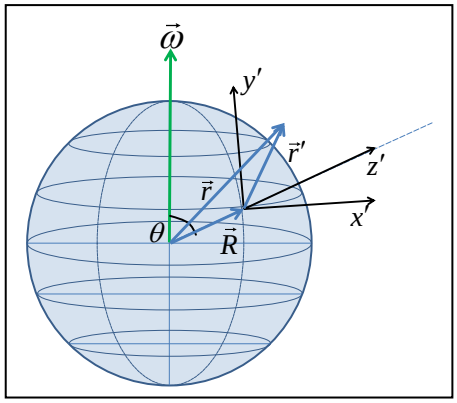
Για $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)<0$, οι λύσεις είναι εκθετικά με πραγματικό όρισμα.

Από τη θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, όπως η παραπάνω, προκύπτει ότι η λύση της πλήρους μη-ομογενούς εξίσωσης $\ddot{\xi}\pm a^2\xi=\beta$ είναι ίση με την λύση της ομογενούς, $\ddot{\xi}\pm a^2\xi=0$, συν ένα όρο όμοιο με τον μη-ομογενή. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, που ο μη-ομογενής όρος είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου, τότε δοκιμάζουμε κατά περίπτωση μία προσθετική σταθερά, ως εξής:

Για $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=a^2>0$, η διαφορική γράφεται $\ddot{\xi}+a^2\xi=\beta$, για την οποία δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής, $\xi=A\cos(at+\varphi)+\gamma \Rightarrow \ddot{\xi}=-a^2A\cos(at+\varphi)$, που αν αντικατασταθούν στη διαφορική, παίρνουμε $\gamma=\beta/a^2$.

Για $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)=-a^2<0$, η διαφορική γράφεται $\ddot{\xi}-a^2\xi=\beta$, για την οποία δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής, $\xi=\left(C_1e^{at}+C_2e^{-at}\right)+\gamma \Rightarrow \ddot{\xi}=a^2\left(C_1e^{at}+C_2e^{-at}\right)$, που αν αντικατασταθούν στη διαφορική, παίρνουμε $\gamma=-\beta/a^2$.

[Κατανοήστε τη φυσική σημασία των λύσεων, και μελετήστε το πρόβλημα και με το φορμαλισμό του μη-αδρανειακού συστήματος αναφοράς.



Παράδειγμα 3.3.5 Βρείτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m, σχετικά με έναν παρατηρητή στην επιφάνεια της Γης.

$Oxyz$: Αδρανειακό σύστημα (F) με αρχή O στο κέντρο της Γης, το οποίο περιφέρεται μαζί με τη Γη, περί τον Ήλιο, αλλά δεν περιστρέφεται μαζί με τη Γη περί των άξονα Νότιος- Βόρειος Πόλος

[Άρα: θεωρούμε αμελητέα την κεντρομόλο επιτάχυνση της Γης, κατά την περιφορά της γύρω από τον Ήλιο]

$Ox_1y_1z_1$: Μη αδρανειακό σύστημα (M_1) με αρχή O στο

κέντρο της Γης, το οποίο περιστρέφεται μαζί με τη Γη περί των άξονα Νότιος- Βόρειος Πόλος, με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{z}_1$, ως προς το οποίο, το (επόμενο) Τοπικό-Μη-Αδρανειακό σύστημα έχει αρχή στο $\vec{R}_{M_1} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{M_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right)_{M_1} = 0$

$O'x'y'z'$: Τοπικό-Μη-Αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Μ) με αρχή στο $\vec{R}_{M_1} = \sigma\tau\alpha\theta.$, ως προς το μη αδρανειακό σύστημα $Ox_1y_1z_1$, και με άξονες:

$\hat{x}'$: Προς την Ανατολή, παράλληλα στο έδαφος

$\hat{y}'$: Προς το Βορά, παράλληλα στο έδαφος

$\hat{z}'$: Κάθετα στο έδαφος, παράλληλα στην τοπική κατακόρυφο

άρα, περιστρεφόμενο με $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{z}_1$, περί άξονα διερχόμενο από το Ο΄, και παράλληλο προς το $z \equiv z_1$

Έχουμε $$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F = \left.\frac{d^2\left(\vec{R}+\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_F + \left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_F, \qquad (1)$$

όπου $$\left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + \left.\dot{\vec{\omega}}\times\vec{R}\right|_{M_1} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{M_1} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1}$$

άρα $$\left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + 0\times\vec{R}\Big|_{M_1} + 2\vec{\omega}\times 0 + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1} = \left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1}$$

Επίσης,

$$\left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_{M_1} = \left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_{M} + \left.\dot{\vec{\omega}}\times\vec{R}\right|_{M} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_{M} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M}$$

$$= 0 + 0\times 0 + 2\vec{\omega}\times 0 + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times 0\right) = 0$$

Επομένως, ο πρώτος όρος στο δεξιό σκέλος της (1) είναι: $$\left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_F = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1} \qquad (2)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό σκέλος της (1) είναι:

$$\left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + \left.\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'\right|_{M_1} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + 0\times\vec{r}'\Big|_{M_1} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1} \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις (2) και (3) στην (1) και πολλαπλασιάζουμε επί m, οπότε:

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F = m\left.\frac{d^2\left(\vec{R}\right)}{dt^2}\right|_F + m\left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_F \Rightarrow$$

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F = m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1} + m\left(\left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + 0\times\vec{r}'\Big|_{M_1} + 2\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1}\right) \Rightarrow$$

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F = m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1} + m\left.\frac{d^2\left(\vec{r}'\right)}{dt^2}\right|_{M_1} + 2m\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} + m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1}$$

Επομένως, η διαφορική εξίσωση κίνησης της μάζας m , ως προς το Τοπικό-Μη-Αδρανειακό σύστημα $O'x'y'z'$, γράφεται

$$m\left.\frac{d^2(\vec{r}')}{dt^2}\right|_{M_1} = m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1} - 2m\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1} \qquad (4)$$

Αλλά: $m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$, η πραγματική δύναμη της βαρύτητας, και η (4) γράφεται

$$m\left.\frac{d^2(\vec{r}')}{dt^2}\right|_{M_1} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1} - 2m\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1} \Rightarrow$$

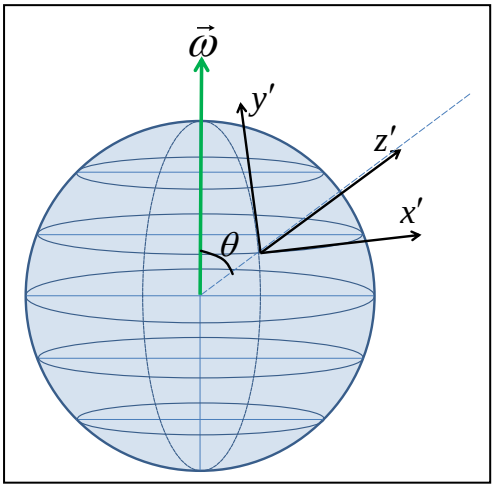
$$m\left.\frac{d^2(\vec{r}')}{dt^2}\right|_{M_1} = -m\left(G\frac{M}{r^2}\hat{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1}\right) - 2m\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1} \qquad (5)$$

Ο όρος $-\left(G\frac{M}{r^2}\hat{r} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1}\right) \approx -\left(G\frac{M}{R^2}\hat{R} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\Big|_{M_1}\right) \approx -g'\hat{R} = -g'\hat{z}'$, μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί, με καλή προσέγγιση, την «φαινόμενη επιτάχυνση» της βαρύτητας. Τελικά, η διαφορική εξίσωση κίνησης στο Τοπικό-Μη-Αδρανειακό σύστημα γράφεται

$$m\left.\frac{d^2(\vec{r}')}{dt^2}\right|_{M_1} = -mg'\hat{z}' - 2m\vec{\omega}\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{M_1} - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\Big|_{M_1}$$

Όπου $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = (\omega\sin\theta)\,\hat{y}' + (\omega\cos\theta)\,\hat{z}'$

Σημείωση: Τα δύο μη-αδρανειακά συστήματα M και M_1 είναι ισοδύναμα από δυναμική άποψη, διότι διατηρούν και τη σχετική τους απόσταση και τον σχετικό τους προσανατολισμό. Η μόνη διαφορά αφορά στο διάνυσμα θέσης (διαφορά κατά $\vec{R}$).



Παράδειγμα 3.3.6 Μελετάμε την κίνηση που κάνει ένα εκκρεμές, θεωρώντας ότι είναι αναρτημένο σε ένα γεωγραφικό πλάτος $\pi/2-\theta$, (ισοδύναμα, σε γωνία θ ως προς τον Βόρειο Πόλο, βλ. σχήμα), της περιστρεφόμενης περί τον άξονά της Γης, και ο μηχανισμός ανάρτησης δεν επιβάλει ταλάντωση σε συγκεκριμένο επίπεδο αλλά επιτρέπει την μεταβολή του επιπέδου ταλάντωση, ανάλογα με τη δυναμική του συστήματος (εκκρεμές του Foucault).
[Η κίνηση θα μελετηθεί ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα της περιστρεφόμενης Γης, θεωρώντας αμελητέα την επίδραση της περιφοράς της περί τον Ήλιο]

Πρώτα ορίζουμε ένα βολικό τοπικό σύστημα αναφοράς, $O'x'y'z'$, τέτοιο ώστε:

$\hat{x}'$: Προς την Ανατολή, παράλληλα στο έδαφος
$\hat{y}'$: Προς το Βορά, παράλληλα στο έδαφος
$\hat{z}'$: Κάθετα στην επιφάνεια της Γης,
(παράλληλα στην τοπική κατακόρυφο)

Το μη-αδρανειακό αυτό σύστημα δεν έχει κοινή αρχή με το (αμέσως καλύτερο) αδρανειακό σύστημα που θα ήταν ένα σύστημα με αρχή στο κέντρο της Γης και το οποίο θα περιφέρεται

μαζί με τη Γη, περί τον Ήλιο, αλλά δεν θα περιστρέφεται μαζί με τη Γη περί των άξονα Νότιος- Βόρειος Πόλος. Άρα υπάρχει μία διαφορά, σε σχέση με την ανάλυση που έχει προηγηθεί στις παραγράφους 3.2-3.3, δεδομένου ότι η αρχή O' του $O'x'y'z'$ εκτελεί μεταφορική κίνηση κατά μήκος κυκλικής τροχιάς με ακτίνα $R_0 \sin\theta$, όπου R_o η ακτίνα της Γης (την οποία υποθέτουμε σταθερή) και θ το γεωγραφικό πλάτος. Αυτή η μεταφορική κίνηση μπορεί να ληφθεί υπόψη μέσω των αποτελεσμάτων της παραγράφου 3.1 Όπως είδαμε όμως (**Παράδειγμα 2.2.16** και **Παράδειγμα 3.3.5**), αυτή η κίνηση έχει ως αποτέλεσμα έναν επανακαθορισμό της τοπικής κατακόρυφης διεύθυνσης κατά περίπου 5΄ της μοίρας και μία μείωση του φαινόμενου βάρους, κατά ~ 3 ‰ το πολύ, όπως μπορεί να υπολογιστεί με βάση την αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα. Επειδή, σε μία συνηθισμένη εγκατάσταση, το εκκρεμές του Foucault εκτελεί ταλαντώσεις με γωνιακό πλάτος από $\sim 15^o$, η διόρθωση της κατακόρυφης είναι ασήμαντη.

Ας υποθέσουμε ότι η τυπική μέγιστη απομάκρυνση της μάζας του εκκρεμούς, από την κατάσταση ισορροπίας (δηλ., από το $x' = y' = z' = 0$) είναι το πολύ $|\vec{r}'| \approx 1m$, και η τυπική μέγιστη ταχύτητά του, ως προς το $Ox'y'z'$, είναι το πολύ $|\vec{\upsilon}'| \approx 10\,cm/s$

Η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς, στο περιστρεφόμενο σύστημα, θα γράφεται

$$m\vec{a}_R = \vec{F}_{o\lambda} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R - 2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_R\right)$$

όπου: $\vec{F}_{o\lambda} = mg\hat{z}' + \vec{T}_{\nu\eta\mu}$, οι πραγματικές δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα

$-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R = 0$, επειδή έχουμε σταθερή περιστροφή $\left(\dot{\vec{\omega}} = 0\right)$

$\left|-2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R\right| \approx m \times 1.5 \times 10^{-3}\ cm/s^2$

$\left|-m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_R\right)\right| \approx m \times 5 \times 10^{-7}\ cm/s^2$

(Τα δύο τελευταία αποτελέσματα προκύπτουν χρησιμοποιώντας την περίοδο T=24h).

Άρα, αγνοούμε την φυγόκεντρο «δύναμη» και γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης, λαμβάνοντας υπόψη μόνο την «δύναμη» Coriolis, η οποία υπολογίζεται

$$F_{Coriolis} = -2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}' = -2m \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix}, \text{ όπου } \omega_{x'} = 0, \quad \omega_{y'} = \omega\sin\theta, \quad \omega_{z'} = \omega\cos\theta$$

$$F_{Coriolis} = -2m\left[\hat{x}'\left(\omega\dot{z}'\sin\theta - \omega\dot{y}'\cos\theta\right) - \hat{y}'\left(-\omega\dot{x}'\cos\theta\right) + \hat{z}'\left(-\omega\dot{x}'\sin\theta\right)\right]$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης παίρνουμε:

$$m\vec{a}_R = mg\hat{z}' + \vec{T}_{\nu\eta\mu} - 2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R \quad \Rightarrow$$

$$m\vec{a}_R = mg\hat{z}' + \vec{T}_{\nu\eta\mu} - 2m\left[\hat{x}'\left(\omega\dot{z}'\sin\theta - \omega\dot{y}'\cos\theta\right) - \hat{y}'\left(-\omega\dot{x}'\cos\theta\right) + \hat{z}'\left(-\omega\dot{x}'\sin\theta\right)\right]$$

και κατά συνιστώσες:

$$m\ddot{x}' = T_{x'} - 2m\left(\omega\dot{z}'\sin\theta - \omega\dot{y}'\cos\theta\right) = -mg\frac{x'}{l} - 2m\left(\omega\dot{z}'\sin\theta - \omega\dot{y}'\cos\theta\right)$$

$$m\ddot{y}' = T_{y'} - 2m\omega\dot{x}'\cos\theta = -mg\frac{y'}{l} - 2m\omega\dot{x}'\cos\theta$$

$$m\ddot{z}' = T_{z'} + mg + 2m\omega\dot{x}'\sin\theta$$

Επειδή, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών ταλάντωσης, έχουμε αμελητέα μετατόπιση κατά τον z΄, τότε και $\dot{z}' \approx 0, \quad \ddot{z}' \approx 0$. Οπότε, για τον κατακόρυφο άξονα-z' έχουμε

$T_{z'} + mg + 2m\omega\dot{x}'\sin\theta = m\ddot{z}' \approx 0 \Rightarrow T_{z'} \approx -mg - 2m\omega\dot{x}'\sin\theta$ ("διόρθωση"΄βαρύτητας)

Ενώ, για τις δύο κινήσεις, παράλληλα στην επιφάνεια της Γης, έχουμε:

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x' + (2\omega\cos\theta)\dot{y}', \qquad \ddot{y}' = -\frac{g}{l}y' - (2\omega\cos\theta)\dot{x}' \qquad (1\alpha,\beta)$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (1 α,β) δεν επιλύεται με τετριμμένο τρόπο, αλλά παρατηρούμε ότι, τμηματικά, έχουν σχέση με γνωστές περιπτώσεις, δηλαδή:
Αν έλειπε ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους θα είχαμε

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x', \qquad \ddot{y}' = -\frac{g}{l}y' \qquad (2\alpha,\beta), \qquad \text{δηλαδή, ταλάντωση με } \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

Αν έλειπε ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους θα είχαμε

$$\ddot{x}' = (2\omega\cos\theta)\dot{y}', \qquad \ddot{y}' = -(2\omega\cos\theta)\dot{x}' \qquad (3\alpha,\beta)$$

που έχει την ίδια δομή με το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της κυκλοτρονικής κίνησης. Επομένως, αντιστοιχεί σε περιστροφή με $\omega_1 = 2\omega\cos\theta$

Αναζητούμε, λοιπόν, λύσεις της μορφής

$$x' = A\cos\alpha t\cos\beta t \qquad (4\alpha)$$

$$y' = A\cos\alpha t\sin\beta t \qquad (4\beta)$$

Ο πρώτος κοινός όρος ($\cos\alpha t$) αντιστοιχεί σε ταλάντωση κατά τους δύο άξονες, με διαφορά φάσης $\Delta\varphi=0$

Ο δεύτερος όρος ($\cos\beta t$ και $\sin\beta t$, αντίστοιχα) περιγράφει ταλάντωση στους δύο άξονες με διαφορά φάσης $\Delta\varphi=\pi/2$, που είναι ισοδύναμη με περιστροφή.

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις (1 α,β) τις δοκιμαστικές λύσεις (4 α,β), καθώς και την πρώτη και δεύτερη χρονική τους παράγωγο, οπότε παίρνουμε την ίδια έκφραση και από τις δύο:

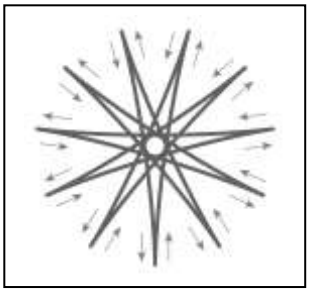
$$-(\alpha^2+\beta^2)\cos\alpha t\cos\beta t + 2\alpha\beta\sin\alpha t\sin\beta t =$$

$$-\frac{g}{l}\cos\alpha t\cos\beta t - (2\omega\cos\theta)(\alpha\sin\alpha t\sin\beta t - \beta\cos\alpha t\cos\beta t)$$

Προκειμένου να ικανοποιείται η σχέση αυτή για κάθε χρονική στιγμή t, θα πρέπει οι συντελεστές των ομοίων όρων, στο κάθε σκέλος, να είναι ίσοι, επομένως:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha^2+\beta^2 = \frac{g}{l} - (2\omega\cos\theta)\beta \\ 2\alpha\beta = -(2\omega\cos\theta)a\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\boxed{\beta = -\omega\cos\theta} & (5\alpha) \\ \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{g}{l} + (\omega\cos\theta)^2}} & (5\beta)\end{array}\right\}$$

Τελικά, αποδείχθηκε ότι οι (4 α,β) είναι λύσεις των (1 α,β) με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι σχέσεις (5 α,β) , η φυσική σημασία των οποίων είναι ότι:



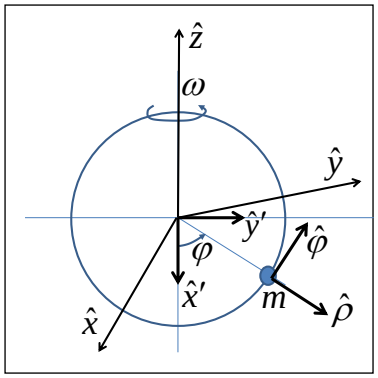
(α) Η ταλάντωση γίνεται με μία νέα συχνότητα, αυξημένη κατά τι ως προς την φυσική συχνότητα ταλάντωσης $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ του ίδιο εκκρεμούς σε αδρανειακό σύστημα, η νέα αυτή συχνότητα είναι $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 + (\omega\cos\theta)^2}$.

(β) Η περιστροφή του επιπέδου ταλάντωση γίνεται με κυκλική συχνότητα αντίθετη από την προβολή της συχνότητας περιστροφής της Γης στην τοπική κατακόρυφο (σχήμα).

Παρατήρηση: Οι σχέσεις (4 α,β), που προτείνονται ως δοκιμαστικές λύσεις, δεν διαθέτουν τον απαραίτητο αριθμό σταθερών ολοκλήρωσης. Δεδομένου ότι έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, για δύο συναρτήσεις, $x' = x'(t)$, $y' = y'(t)$, οι απαραίτητες σταθερές ολοκλήρωσης θα είναι τέσσερις (4) τον αριθμό και θα προσδιορίζονται

μέσω των αρχικών συνθηκών αρχικής απομάκρυνσης και ταχύτητας για κάθε μία από τις δύο κατευθύνσεις x', y'.

Στις προτεινόμενες λύσεις οι σταθερές ολοκλήρωσης θα εμφανιστούν με τη μορφή πλατών και φάσεων $x' = A\cos(\alpha t + \phi_1)\cos(\beta t + \varphi_2)$, $y' = B\cos(\alpha t + \phi_1)\sin(\beta t + \varphi_2)$, είναι δε συνολικά τέσσερις, όπως χρειάζεται, A, B, φ_1, φ_2.



Παράδειγμα 3.3.7. Στεφάνη με ακτίνα R έχει το επίπεδό της κατακόρυφο. Στην περιφέρεια της στεφάνης μπορεί να γλυστράει, (χωρίς τριβές), ένα σφαιρίδιο μάζας m. Η στεφάνη περιστρέφεται, περί την κατακόρυφη διάμετρό της, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. (α) Να δείξετε ότι υπάρχει γωνιακή θέση φ_0, για την οποία το σφαιρίδιο μπορεί να ακινητεί, ως προς την περιστρεφόμενη στεφάνη, και να προσδιοριστεί αυτή η γωνία. (β) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του σφαιριδίου, ως προς σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται μαζί με τη στεφάνη, για $\varphi \neq \varphi_0$. Για την περίπτωση που $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, (\delta\varphi << \varphi_0)$, (τέτοια ώστε $\sin(\delta\varphi) \simeq \delta\varphi$ και $\cos(\delta\varphi) \simeq 1$), δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη χρονική μεταβολή της $\varphi = \varphi(t)$ είναι διαφορική εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης και μελετήστε την κίνηση του σφαιριδίου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ορίζω ένα Αδρανειακό (F-Fixed) και ένα Μη-Αδρανειακό (R=Rotated) Σύστημα Αναφοράς, ως εξής:
$F(Oxyz)$, τέτοιο ώστε, Oz: κατακόρυφος προς τα πάνω (αντίθετη του βάρους), και (Oxy): οριζόντιο επίπεδο (κάθετο ως προς το βάρος)
$R(O'x'y'z')$, τέτοιο ώστε, $O' \equiv O$, $(Oz) \equiv -(O'x')$, όπου $O'x'$ ο άξονας που συμπίπτει με την κατακόρυφη διάμετρο της Στεφάνης, περί την οποία αυτή περιστρέφεται. $O'y'$ είναι ο άξονας που συμπίπτει με την οριζόντια διάμετρο της Στεφάνης και $O'z'$ είναι ο (επίσης οριζόντιος) αξονας συμμετρίας της Στεφάνης.

(α) Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε σταθερή γωνιακή θέση φ_0, ως προς την περιστρεφόμενη στεφάνη, τότε, <u>ως προς το αδρανειακό σύστημα (*Oxyz*)</u>, το σφαιρίδιο διαγράφει μία οριζόντια κυκλική τροχιά, ακτίνας $r = R\sin\varphi$, ενώ ακινητεί κατά τον κατακόρυφο άξονα.
Επομένως, <u>ως προς το αδρανειακό σύστημα (*Oxyz*)</u>, η συνισταμένη των δυνάμεων θα πρέπει να αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη της οριζόντιας κυκλικής κίνησης, (στον κατακόρυφο άξονα η συνισταμένη θα πρέπει να είναι μηδέν). Επομένως, αν $\vec{A} = -\hat{x}'A\cos\varphi - \hat{y}'A\sin\varphi$ είναι η (ακτινική) αντίδραση της στεφάνης, και $\vec{B} = \hat{x}'mg$ είναι το βάρος του σφαιριδίου, τότε, σύμφωνα μα τα παραπάνω, θα πρέπει να ικανοποιούνται δύο σχέσεις

$$mg = A\cos\varphi, \qquad A\sin\varphi = m\frac{\upsilon^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\varphi \Rightarrow A = m\omega^2 R$$

Συνδυάζοντας την πρώτη και την τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$\frac{mg}{\cos\varphi} = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \boxed{\cos\varphi_0 = \frac{g}{R\omega^2}} \qquad (1)$$

Διερεύνηση: $\cos\varphi_0 = \frac{g}{R\omega^2} \le 1 \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g}{R}}$. Επομένως, για το διάστημα τιμών κυκλικής συχνότητας, $0 < \omega \le \omega_0 = \sqrt{g/R}$, το σφαιρίδιο παραμένει στο κατώτερο σημείο, (σημείο ευσταθούς δυναμικής ισορροπίας), της στεφάνης, (στο οποίο επιστρέφει, ακόμη και σε περίπτωση μικρής διαταραχής, με τη μορφή ταλαντώσεων μικρού πλάτους). Για $\omega > \sqrt{g/R}$, το σφαιρίδιο μετατοπίζεται στην αντίστοιχη γωνία. Η επιλογή του ημικυκλίου (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη γωνιακή απόκλιση) εξαρτάται από το πρόσημο της μικρής διαταραχής, η οποία θα απομακρύνει το σφαιρίδιο από από το κατώτατο σημείο, (το οποίο πλέον είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας)

Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχε μπορούσε να είχε παραχθεί ως συνθήκη «ισορροπίας» ως προς το Μη-Αδρανειακό σύστημα που περιστρέφεται με τη στεφάνη

$$m\vec{a}_R = m\vec{a}_F - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) \Rightarrow$$

$$0 = m\vec{a}_F - 0 - 0 - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$$

Αλλά

$$m\vec{a}_F = \vec{F}_{ολ,\,πραγμ.} = \hat{x}'mg - A_\rho\hat{\rho} = \hat{x}'mg - A_\rho\left(\hat{x}'\cos\varphi + \hat{y}'\sin\varphi\right)$$

$$m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = m\begin{vmatrix}\hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}'\\ -\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\omega R\sin\varphi\end{vmatrix} = -\hat{y}'m\left(\omega^2 R\sin\varphi\right)$$

Άρα: $m\vec{a}_F = m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) \Rightarrow \hat{x}'mg - A_\rho\left(\hat{x}'\cos\varphi + \hat{y}'\sin\varphi\right) = -\hat{y}'m\left(\omega^2 R\sin\varphi\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} mg = A_\rho\cos\varphi \\ A_\rho\sin\varphi = m\omega^2 R\sin\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 R}}$$

(β) Υπενθυμίζουμε τη σχέση των μοναδιαίων διανυσμάτων ανάμεσα στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων του Μη-Αδρανειακού συστήματος αναφοράς:

$$\left.\begin{matrix}\hat{x}' = \left(\hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi\right)\\ \hat{y}' = \left(\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi\right)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\hat{\rho} = \left(\hat{x}'\cos\varphi + \hat{y}'\sin\varphi\right)\\ \hat{\varphi} = \left(-\hat{x}'\sin\varphi + \hat{y}'\cos\varphi\right)\end{matrix}\right\}$$

Για την περίπτωση απομάκρυνσης από την οριακή γωνία φ_0 σε μία νέα γωνία $\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi(t)$, έχουμε:

$$\vec{r}_R = R\hat{\rho} = R\left(\hat{x}'\cos\varphi + \hat{y}'\sin\varphi\right), \qquad \vec{\upsilon}_R = R\dot{\varphi}\hat{\varphi} = R\dot{\varphi}\left(-\hat{x}'\sin\varphi + \hat{y}'\cos\varphi\right), \qquad \vec{\omega} = \omega\hat{z} = -\omega\hat{x}'$$

$$\rho = R = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0. \qquad \text{Προσοχή:} \qquad \omega = \sigma\tau\alpha\vartheta. \neq \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$$

[Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα εξωτερικά γινόμενα με τη συνήθη μορφή, (του αναπτύγματος ορίζουσας με στοιχεία σειράς τις συντεταγμένες του κάθε διανύσμτος), τότε πρέπει να φροντίσουμε να γράψουμε τα διανύσματα σε καρτεσιανές συντεταγμένες $Ox'y'z'$. Όπου δεν χρειάζεται να υπολογιστούν εξωτερικά γινόμενα μέσω οριζουσών, (ή θα υπολογιστούν με το γινόμενο των μέτρων επί το ημίτονο της μεταξύ τους γωνίας) τότε τα διανύσματα τα περιγράφουμε σε πολικές συντεταγμένες.]

Γράφουμε την εξίσωση κίνησης ως προς το Μη-Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς $Ox'y'z'$.

$$m\vec{a}_R = m\vec{a}_F - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) \qquad (2)$$

και υπολογίζουμε τον κάθε όρο σε πολικές συντεταγμένες του $Ox'y'z'$ [με αυτό τον τρόπο εκμεταλλευόμαστε την κυκλική κίνηση του σφαιριδίου, ως προ το $Ox'y'z'$, και επομένως την μείωση των βαθμών ελευθερίας από δύο (x', y') σε ένα $\left(\rho = R = \sigma\tau\alpha\theta., \varphi = \varphi(t)\right)$],

Με βάση τη σχέση των μοναδιαίων διανυσμάτων ανάμεσα στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων του Μη-Αδρανειακού συστήματος αναφοράς (βλ. ανωτέρω) έχουμε:

$$m\vec{a}_R = m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + m\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi} = -m\left(R\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + m\left(R\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$$

$$m\vec{a}_F = \vec{F}_{ολ,\,πραγμ.} = \hat{x}'mg - A_\rho\hat{\rho} + A_{z'}\hat{z}' = mg\left(\hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi\right) - A_\rho\hat{\rho} + A_{z'}\hat{z}'$$

$$m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R = 0$$

$$2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R = 2m\begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ -\omega & 0 & 0 \\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi & R\dot{\varphi}\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = 2m\hat{z}'\left(-\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r}_R = \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ -\omega & 0 & 0 \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}'\left(-\omega R\sin\varphi\right)$$

$$m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = m\begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{z}' \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega R\sin\varphi \end{vmatrix} = -\hat{y}'m\left(\omega^2 R\sin\varphi\right) = \left(-m\omega^2 R\sin\varphi\right)\left(\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi\right)$$

Αντικαθιστώντας όλους τους ανωτέρω όρους στην εξίσωση κίνησης (2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} -m\left(R\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + m\left(R\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi} = {} & mg\left(\hat{\rho}\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi\right) - A_\rho\hat{\rho} + A_{z'}\hat{z}' - 0 \\ & + \hat{z}'\left(2m\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \left(m\omega^2 R\sin\varphi\right)\left(\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

Ομαδοποιούμε τους όρους:

$$-m\left(R\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + m\left(R\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi} =$$

$$\left(mg\cos\varphi - A_\rho + m\omega^2 R\sin^2\varphi\right)\hat{\rho} + \left(-mg\sin\varphi + m\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi\right)\hat{\varphi} + A_{z'}\hat{z}' + \left(2m\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\hat{z}'$$

και αναλύουμε κατά συνιστώσες:

$$z': \quad A_{z'} = -2m\omega R\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (4\alpha)$$

$$\rho: \quad A_\rho = m\left(g\cos\varphi + \omega^2 R\sin^2\varphi + R\dot{\varphi}^2\right) \qquad (4\beta)$$

$$\varphi: \quad \ddot{\varphi} = -\left(g/R\right)\sin\varphi + \omega^2\sin\varphi\cos\varphi \qquad (4\gamma)$$

Αν υπολογίσουμε την $\varphi = \varphi(t)$, επιλύοντας τη διαφορική (4γ), μπορούμε να υπολογίσουμε τις δύο συνιστώσες της αντίδρασης, $\left(A_{z'}, A_\rho\right)$, από την Στεφάνη, αντικαθιστώντας στις σχέσεις (4α), (4β) τις $\varphi = \varphi(t)$ και $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$.

Επιλύουμε την (4γ) κανοντας χρήση της προσέγγισης $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad \delta\varphi << \varphi_0$, έτσι ώστε $\sin\delta\varphi \simeq \delta\varphi, \quad \cos\delta\varphi \simeq 1$, (επίσης $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \dfrac{d^2\left(\delta\varphi\right)}{dt^2}$) οπότε, η (4γ) γίνεται:

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin\varphi\left[\frac{g}{\omega^2 R} - \cos\varphi\right] = -\omega^2 \sin\varphi\left[\frac{g}{\omega^2 R} - \cos\left(\varphi_0 + \delta\varphi\right)\right] =$$

$$= -\omega^2 \sin\varphi\left[\frac{g}{\omega^2 R} - \cos\varphi_0\cos\delta\varphi + \sin\varphi_0\sin\delta\varphi\right] \simeq -\omega^2 \sin\varphi\left[\frac{g}{\omega^2 R} - \cos\varphi_0 + \delta\varphi\sin\varphi_0\right]$$

Με βάση τη σχέση «ισορροπίας» (1): $\frac{g}{R\omega^2} - \cos\varphi_0 = 0$, οπότε έχουμε:

$$\ddot{\varphi} \simeq -\omega^2\delta\varphi\sin\varphi_0\sin\varphi = -\omega^2\delta\varphi\sin\varphi_0\left(\sin\varphi_0\cos\delta\varphi + \cos\varphi_0\sin\delta\varphi\right) \simeq$$

$$\simeq -\omega^2\delta\varphi\sin\varphi_0\left(\sin\varphi_0 + \delta\varphi\cos\varphi_0\right) = -\omega^2\delta\varphi\sin^2\varphi_0 - \omega^2\left(\delta\varphi\right)^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \Rightarrow$$

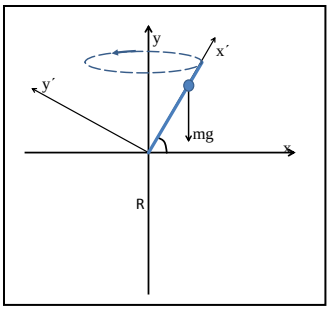
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\left(\omega\sin\varphi_0\right)^2\delta\varphi$$

Τελικά: $\frac{d^2\left(\delta\varphi\right)}{dt^2} + \left(\omega\sin\varphi_0\right)^2\delta\varphi = 0$, άρα, για μικρές διακυμάνσεις, $\delta\varphi$, γύρω από τη γωνία «ισορροπίας» φ_0, η χρονική εξέλιξη του $\delta\varphi$ είναι αρμονική ταλάντωση με φυσική συχνότητα ταλάντωσης την $\omega\sin\varphi_0$.

Παράδειγμα 3.3.8. Σωλήνας μήκους L σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται περί κατακόρυφο άξονα που περνά από το κάτω άκρο του. Στο εσωτερικό του σωλήνα μπορεί να κινείται, χωρίς τριβές, σφαιρίδιο με μάζα m. Ενώ ο σωλήνας περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, το σφαιρίδιο αφήνεται ελεύθερο, μέσα στο σωλήνα, και σε απόσταση $x_0 < L$, από το κάτω άκρο του σωλήνα. (α) Δείξτε ότι η απόσταση x του σφαιριδίου από το κάτω άκρο εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $x(t) = \left(x_0 + C_0\right)\cosh\left(\omega t\cos\theta\right) + C_1$. (β) Μελετήστε την κίνηση του σφαιριδίου όταν ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σφαιρίδιο και στον κύλινδρο είναι $\mu_{στ} = \mu_{κιν} = \mu$. (γ) Υποθέστε ότι $\tan\theta < 1/\mu$ και δείξτε ότι το σφαιρίδιο βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία για

$$\frac{g}{\omega^2\cos\theta}\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta} \le x' \le \frac{g}{\omega^2\cos\theta}\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Αν το αδρανειακό σύστημα είναι το $(Oxyz)$ έτσι ώστε το (Oxy) να είναι το κατακόρυφο επίπεδο, με $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$, και (Oxz) να είναι το οριζόντιο επίπεδο, επιλέγουμε ως μη-αδρανειακό σύστημα το $(O'x'y'z')$, έτσι ώστε $O \equiv O'$, και το $(O'x'y')$ να είναι το κατακόρυφο επίπεδο, ο $(O'z')$ να είναι ο οριζόντιος άξονας και, επομένως:

$$\vec{\omega} = \left(\omega\sin\theta\right)\hat{x}' + \left(\omega\cos\theta\right)\hat{y}'$$

Θα υπολογίσουμε τους όρους της εξίσωσης κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα:

$$m\vec{a}_R = \vec{F}_{ολ} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$$

$\vec{r}_R = x'(t)\hat{x}', \qquad \vec{\upsilon}_R = \dot{x}'(t)\hat{x}'$

$\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R = \left[(\omega\sin\theta)\hat{x}' + (\omega\cos\theta)\hat{y}'\right]\times\left[\dot{x}'(t)\hat{x}'\right] \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R = -(\omega\cos\theta)\dot{x}'\hat{z}'}$

$(\vec{\omega}\times\vec{r}_R) = \left[(\omega\sin\theta)\hat{x}' + (\omega\cos\theta)\hat{y}'\right]\times\left[x'(t)\hat{x}'\right] = -(\omega\cos\theta)x'\hat{z}'$

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_R) = \left[(\omega\sin\theta)\hat{x}' + (\omega\cos\theta)\hat{y}'\right]\times\left[-(\omega\cos\theta)x'\hat{z}'\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_R) = \omega^2 x'\sin\theta\cos\theta\hat{y}' - \omega^2 x'\cos^2\theta\hat{x}'}$

Άρα, η εξίσωση κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα, γράφεται:

$$m\ddot{x}'\hat{x}' = -mg\sin\theta\hat{x}' - mg\cos\theta\hat{y}' + 2m(\omega\cos\theta)\dot{x}'\hat{z}' - m\omega^2 x'\sin\theta\cos\theta\hat{y}' + m\omega^2 x'\cos^2\theta\hat{x}' + A_{y'}\hat{y}' + A_{z'}\hat{z}'$$

Επιλύουμε κατά συνιστώσες

x΄ - συνιστώσα :

$m\ddot{x}'\hat{x}' = -mg\sin\theta\hat{x}' + m\omega^2 x'\cos^2\theta\hat{x}' \Rightarrow \ddot{x}' = (\omega\cos\theta)^2 x' - g\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{x}' = k^2 x' - g\sin\theta, \qquad k = \omega\cos\theta$

Γραμμική διαφορική $2^{ης}$ τάξης με μη-ομογενή όρο, άρα αναζητούμε ως

(Γενική Λύση Πλήρους) = (Γενική Λύση Ομογενούς) + (Ειδική λύση της Πλήρους)

$x' = Ae^{kt} + Be^{-kt} + C, \qquad (k = \omega\cos\theta)$

[Η Ειδική Λύση της Πλήρους έχει τη μορφή του Μη-Ομογενούς όρου = Σταθερά]

Αντικαθιστώντας στη διαφορική, υπολογίζουμε τον σταθερό όρο: $C = \dfrac{g\sin\theta}{k^2}$

Από αρχικές συνθήκες:

$\upsilon_R(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$

$x'(t=0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{2}\left(x_0 - \dfrac{g\sin\theta}{k^2}\right)$

οπότε, τελικά έχουμε:

$$\boxed{x'(t) = \left(x_0 - \frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta}\right)\cosh(\omega t\cos\theta) + \frac{g\sin\theta}{\omega^2\cos^2\theta}}$$

Από τις y΄ και z΄ συνιστώσες υπολογίζονται οι αντιδράσεις του σωλήνα

$A_{y'} = mg\cos\theta + m\omega^2 x'\sin\theta\cos\theta$

$A_{z'} = -2m(\omega\cos\theta)\dot{x}'$

Στην περίπτωση που υπάρχει και τριβή, αυτή θα είναι παράλληλη στον άξονα x΄ κι θα έχει θετική ή αρνητική φορά, ανάλογα με την τάση του σωματιδίου να κινηθεί προς το μικρά x΄ $(\omega\to 0)$, ή προς τα μεγάλα x΄ $(\omega\to\infty)$. Στις δύο περιπτώσεις, αν $F_{\tau\rho}$ είναι το μέτρο της τριβής, θα έχουμε αντίστοιχα, $m\ddot{x}' = -mg\sin\theta + m\omega^2 x'\cos^2\theta \pm F_{\tau\rho}$

Επίσης, αν έχουμε ισορροπία: $\dot{x}' = 0 \Rightarrow \ddot{x}' = 0$ και, επομένως, ισχύει και $A_{z'} = 0$

Από την προηγούμενη σχέση, για το θετικό πρόσημο της $F_{\tau\rho}$

$$F_{\tau\rho} = mg\sin\theta - m\omega^2 x'\cos^2\theta$$

Αλλά $\quad F_{\tau\rho} \le \mu F_\perp = \mu A_{y'} = \mu\left(mg\cos\theta + m\omega^2 x'\sin\theta\cos\theta\right)$

$$mg\sin\theta - m\omega^2 x'\cos^2\theta \le \mu\left(mg\cos\theta + m\omega^2 x'\sin\theta\cos\theta\right)$$

Συνδυάζοντας

$$\Rightarrow x' \ge \frac{g}{\omega^2\cos\theta}\frac{\tan\theta - \mu}{1 + \mu\tan\theta}$$

Από την προηγούμενη σχέση, για το αρνητικό πρόσημο της $F_{\tau\rho}$

$$F_{\tau\rho} = -mg\sin\theta + m\omega^2 x'\cos^2\theta$$

Αλλά $$F_{\tau\rho} \le \mu F_{\perp} = \mu A_{y'} = \mu\left(mg\cos\theta + m\omega^2 x'\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$-mg\sin\theta + m\omega^2 x'\cos^2\theta \le \mu\left(mg\cos\theta + m\omega^2 x'\sin\theta\cos\theta\right)$$

Συνδυάζοντας

$$\Rightarrow x' \le \frac{g}{\omega^2\cos\theta}\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}$$

Παράδειγμα 3.3.9 Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας M και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Άνθρωπος μάζας m, βρίσκεται πάνω στην πλατφόρμα σε απόσταση $r_0\left(<R\right)$. (α) Κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κύκλο ομόκεντρο με την πλατφόρμα, με ακτίνα $r_0(<R)$. Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα περιστρέφεται, προσδιορίστε την φορά περιστροφής, σε σχέση με τη φορά κίνησης του ανθρώπου, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα περιστροφής ω της πλατφόρμας, αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του ανθρώπου, ως προς την πλατφόρμα, είναι υ_R. (β) Ως προς το, μη-αδρανειακό, σύστημα αναφοράς της πλατφόρμας, υπολογίστε τις ψευδοδυνάμεις που αισθάνεται ο άνθρωπος, παράλληλα προς την επιφάνεια της πλατφόρμας,. (γ) Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα της πλατφόρμας, και ως προς το αδρανειακό σύστημα του δαπέδου. (ε) Αν ο συντελεστής τριβής πλατφόρμας-κινητού είναι μ, υπολογίστε την μέγιστη ταχύτητα υ, που μπορεί να αναπτύξει ο άνθρωπος, χωρίς να αρχίσει να γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Διατήρηση στροφορμής

$$I\omega + mr\left(\omega r_0 - \upsilon\right) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{r_0 + \left(I/mr_0\right)}$$

(β) Υπολογισμός Ψευδοδυνάμεων

$$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = -m\vec{\omega}\times\left[\left(-\omega\hat{z}'\right)\times\left(r_0\hat{r}_R\right)\right] = m\vec{\omega}\times\left[\left(\omega\hat{z}'\right)\times\left(r_0\hat{r}_R\right)\right] =$$

$$m\left(-\omega\hat{z}'\right)\times\left(\omega r_0\hat{\upsilon}_R\right) = -m\omega^2 r_0\left(\hat{z}'\right)\times\left(\hat{\upsilon}_R\right) = -m\omega^2 r_0\left(-\hat{r}_R\right) = m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right)$$

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R = -2m\left(-\omega\hat{z}'\right)\times\left(\upsilon_R\hat{\upsilon}_R\right) = -2m\omega\upsilon_R\hat{r}_R$$

(γ) Εξισώσεις κίνησης

Ως προς αδρανειακό σύστημα (το έδαφος)

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\tau\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\tau\rho} = \vec{F}_{\ \kappa\varepsilon\nu\tau\rho\mu\lambda} = m\frac{\upsilon^2_{Fixed}}{r_0} = m\frac{\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\tau\rho} = m\frac{\upsilon_R^2}{r_0} - 2m\omega\upsilon_R + m\omega^2 r_0}$$

Ως προς περιστρεφόμενο σύστημα (την πλατφόρμα)

$$m\vec{a}_R = \vec{F}_{\tau\rho} - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) \;\Rightarrow\; m\frac{\upsilon_R^2}{r_0}\left(-\hat{r}_R\right) = \vec{F}_{\tau\rho} - 2m\omega\upsilon_R\hat{r}_R + m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right) \;\Rightarrow$$

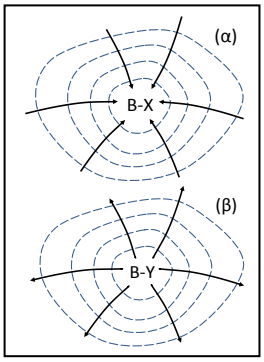
$$m\frac{\upsilon_R^2}{r_0}\left(-\hat{r}_R\right) + 2m\omega\upsilon_R\hat{r}_R - m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right) = \vec{F}_{\tau\rho} = F_{\tau\rho}\left(-\hat{r}_R\right) \;\Rightarrow$$

$$-m\frac{\upsilon_R^2}{r_0}\left(\hat{r}_R\right) + 2m\omega\upsilon_R\left(\hat{r}_R\right) - m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right) = -F_{\tau\rho}\left(\hat{r}_R\right) \;\Rightarrow\; \boxed{m\frac{\upsilon_R^2}{r_0} - 2m\omega\upsilon_R + m\omega^2 r_0 = F_{\tau\rho}}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις κίνησης έχουν την ίδια αναλυτική μορφή, αλλά οι διάφοροι όροι έχουν διαφορετική φυσική ερμηνεία

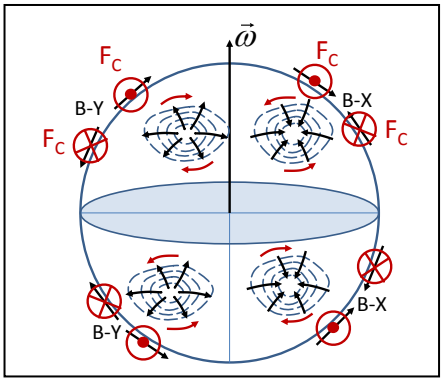
$$\left.\begin{aligned} &F_{\tau\rho} \le \mu mg \\ &F_{\tau\rho} = F_{\;\kappa\varepsilon\nu\tau\rho\mu\lambda} = m\frac{\upsilon_{Fixed}^2}{r_0} = m\frac{\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2}{r_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\frac{\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2}{r_0} \le \mu mg$$

$$(\delta)\quad \left.\begin{aligned} &\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2 \le \mu g r_0 \\ &\omega = \frac{\upsilon_R}{r_0 + \left(I/mr_0\right)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\upsilon_R}{r_0 + \left(I/mr_0\right)}r_0 - \upsilon_R\right)^2 \le \mu g r_0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_R^2 \le \left(\frac{mr_0^2 + I}{I}\right)^2 \mu g r_0}$$



Παράδειγμα 3.3.10 Θεωρήστε μία περιοχή βαρομετρικού χαμηλού (B-X) στο βόρειο ημισφαίριο της Γης (π.χ., σε γεωγραφικό πλάτος θ=45^o), όπως στο σχήμα-α. Οι διακεκομένες γραμμές παριστάνουν τις ισοβαρείς καμπύλες (καμπύλες ίσης πίεσης), άρα οι αέριες μάζες τείνουν να κινηθούν λόγω διαφοράς πίεσης όπως τα βέλη του ίδιου σχήματος. (i) Δείξτε ότι, σε αυτή την περίπτωση, οι αέριες μάζες του βαρομετρικού χαμηλού τίθενται σε ταυτόχρονη αριστερόστροφη κίνηση, ενώ στην περίπτωση ενός βαρομετρικού υψηλού (B-Y, σχήμα-β) συμβαίνει το αντίστροφο. (ii) Δείξτε ότι στο νότιο ημισφαίριο παρατηρείται το αντίστροφο φαινόμενο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



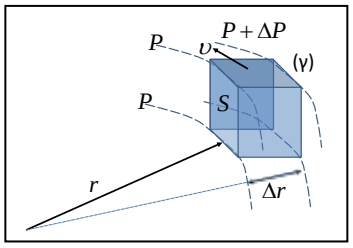
(i)-(ii) Υπεύθυνες για την αλλαγή της αρχικής πορείας των αέριων μαζών (δηλ., αυτής που επιβάλλεται λόγω βαρομετρικών διαφορών) είναι οι αντίστοιχες δυνάμεις Coriolis.

Προκειμένου να υπολογιστεί η κατεύθυνση της εκτροπής, κατά περίπτωση, πρέπει να υπολογιστεί η Coriolis ως $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R$, όπου $\vec{\upsilon}_R$: η (αρχική) ταχύτητα των αέριων μαζών ως προς τη Γη (R: rotated system)

Στο ανωτέρω σχήμα, (υποθέτοντας ότι βλέπουμε την «προς εμάς» επιφάνεια της αδιαφανούς Γης) με μαύρα βέλη αποδίδονται οι (αρχικές) ταχύτητες και με κόκκινα βέλη οι (αρχικές) δυνάμεις Coriolis. Το αποτέλεσμα είναι μία ελικοειδής κίνηση προς το κέντρο του Βαρομετρικού Χαμηλού, και από το κέντρο του βαρομετρικού Υψηλού. Η «κυκλική» συνιστώσα αυτής της κίνησης δημιουργεί τη δική της Coriolis η οποία συνεισφέρει στην

κεντρομόλο δύναμη της κίνησης των μαζών (όπως αυτή φαίνεται ως κυκλική στο Μη-Αδρανειακό σύστημα αναφοράς της Γης, βλ. συνέχεια στο (iii)).

Τα συνήθη βαρομετρικά χαμηλά που διέρχονται από τον Ελληνικό χώρο γίνονται αισθητά πρώτα στις δυτικές περιοχές, ενώ οι ανατολικές περιοχές τα αντιλαμβάνονται αργότερα (δηλ., έχουν κατεύθυνση Δύση-Ανατολή). Επομένως, με βάση τα σχήματα, σε κάποια τοποθεσία επικρατούν πρώτα νότιοι άνεμοι και αργότερα βόρειοι άνεμοι κατά τη διέλευση ενός βαρομετρικού χαμηλού από την τοποθεσία αυτή. Επίσης, στα βαρομετρικά χαμηλά που ακολουθούν την αντίθετη πορεία, (δηλ., Ανατολή-Δύση, όπως συμβαίνει σπανιότερα και κυρίως κατά τη χειμερινή περίοδο) η αλληλουχία των ανέμων είναι αντίστροφη (δηλ., προηγούνται οι βόρειοι άνεμοι και ακολουθούν οι νότιοι)



Παράδειγμα 3.3.11. Θεωρήστε τμήμα της αέρια μάζας ενός βαρομετρικού χαμηλού, που βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο του χαμηλού, έχει κατακόρυφη επιφάνεια S επί της ισοβαρούς καμπύλης (κάθετα στην ακτίνα r) και πάχος Δr που αντιστοιχεί στην απόσταση μεταξύ δύο ισοβαρών με πιέσεις P και $P+\Delta P$. Έστω ότι η περιστροφική ταχύτητα της αέριας μάζας είναι υ. Αν η πυκνότητα του αέρα είναι ρ=1.3 kg/m^3, και η βαθμίδα πίεσης είναι dP/dr=1.5×10^{-3} N/m^3, για περιοχές μακριά από το κέντρο του χαμηλού, και 30×10^{-3} N/m^3, για περιοχές κοντά στο κέντρο του χαμηλού, να υπολογίσετε τις αντίστοιχες τυπικές τιμές της ταχύτητας υ, θεωρώντας ότι η κεντρομόλος δύναμη για το τμήμα της αέριας μάζας προκύπτει από τον συνδυασμό της δύναμης λόγω διαφοράς πίεσης και της δύναμης Coriolis λόγω της υ. [Στην προσεγγιστική ανάλυση, που προτείνεται παραπάνω, θεωρούμε ότι η αρχική κίνηση, προς το κέντρο του χαμηλού, προκαλεί δύναμη Coriolis κάθετα στην ακτίνα, η οποία είναι υπεύθυνη για την πρόκληση της κυκλικής κίνησης. Στη συνέχεια αναλύουμε ένα στιγμιότυπο της κυκλικής κίνησης όπου η εγκάρσια ταχύτητα προκαλεί δύναμη Coriolis κατά μήκος της ακτίνας. Η πλήρης διαφορική εξίσωση του προβλήματος είναι: $m\dfrac{d^2\vec{r}_R}{dt^2}=\vec{F}_{ολ,πραγμ.}-2m\vec{\omega}\times\dfrac{d\vec{r}_R}{dt}+m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$,

όπου $\vec{F}_{ολ,πραγμ.}=\vec{F}_{\text{Βαρ.}}+\vec{F}_{\Delta P}$

(iii) Στο πλαίσιο των προσεγγίσεων που δίνονται στην άσκηση, η κεντρομόλος δύναμη για την περιστροφική κίνηση της αέριας μάζας είναι

$$m\frac{\upsilon^2}{r}=S\Delta P-2m\omega\upsilon\sin\theta,$$

όπου $m=\rho S\Delta r$. Οπότε στο όριο $\Delta r\to 0$ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\frac{\upsilon^2}{r}=\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}-2\omega\upsilon\sin\theta$$

Στην περίπτωση ενός σχετικά συμπαγούς ισχυρού βαρομετρικού χαμηλού (τυφώνας), και για τις περιοχές όχι πολύ μακριά από το κεντρο του βαρομετρικού χαμηλού, $\left(r\approx 50\text{km}\right)$ όπου υπάρχει μεγάλη βαθμίδα πίεσης, dP/dr= 30×10^{-3} N/m^3 , όλοι οι όροι της παραπάνω εξίσωσης είναι σημαντικοί και άρα πρέπει να επιλυθεί η 2/βάθμια εξίσωση:

$$\upsilon^2+\left(2\omega r\sin\theta\right)\upsilon-\frac{r}{\rho}\frac{dP}{dr}=0$$

της οποίας η θετική ρίζα είναι : $\upsilon=-\omega r\sin\theta+\sqrt{\left(\omega r\sin\theta\right)^2+\dfrac{r}{\rho}\dfrac{dP}{dr}}$

Αντικαθιστώντας: $\omega = \dfrac{2\pi}{24h}$, $r = 50\text{km}$ και $dP/dr = 30\times10^{-3}\,\text{N/m}^3$ και $\theta = 45^0$,

Υπολογίζουμε $\upsilon \approx 100\ \text{km/h}$.

Για πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις r από το κέντρο ενός όχι τόσο ισχυρού βαρομετρικού χαμηλού, όπου και οι ταχύτητες υ είναι χαμηλότερες, ο αριστερός όρος τις εξίσωσης $\dfrac{\upsilon^2}{r} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP}{dr} - 2\omega\upsilon\sin\theta$ μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος, οπότε το αποτέλεσμα για την ταχύτητ είναι ανεξάρτητο από την ακτίνα και προκύπτει :

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - 2\omega\upsilon\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \left(\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\right)\Big/ 2\omega\sin\theta$$

Αντικαθιστώντας $dP/dr \approx 1.5\times10^{-3}\ \text{N/m}^3$ παίρνουμε $\upsilon \approx 50\ \text{km/h}$