

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις του Ομότιμου Καθηγητή του ΕΜΠ κ. Ιωάννη Σ. Ράπτη για τις ανάγκες του μαθήματος «Φυσική – Ι (Μηχανική)» της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ

Παναγιώτης Μπούσουλας
Επίκουρος Καθηγητής
ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα, 2026

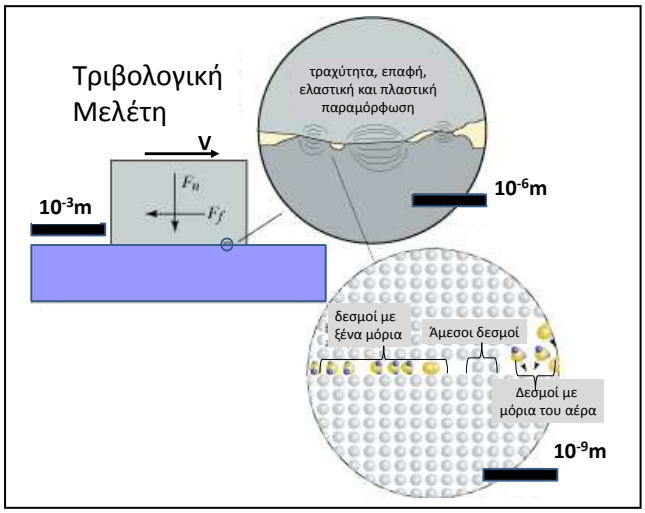
1. **Εισαγωγή – Θεμελιώδη και Παράγωγα Μεγέθη – Μαθηματικά Εργαλεία (ΒΛΕΠΕ: Chapt01)**

2. **Νόμοι του Νεύτωνα**
   2.1 Διατύπωση νόμων του Νεύτωνα, γενικά σχόλια, Επίλυση της εξίσωσης κίνησης του Νεύτωνα (ΒΛΕΠΕ: Chapt02-1)

Δυνάμεις επαφής: Αντίδραση – Τριβή – Τάση Νήματος

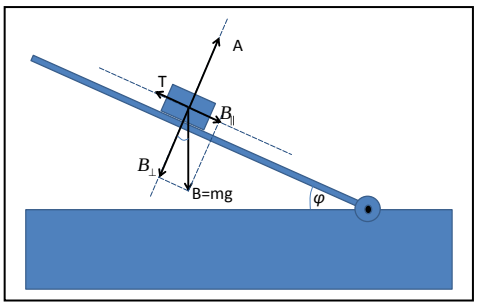
Τριβή

Όταν δύο εκτεταμένα σώματα έρχονται σε επαφή μέσω των επιφανειών τους, ασκούν γενικά δυνάμεις το ένα στο άλλο, μέσω της επιφάνειας επαφής, οι οποίες, γι' αυτό το λόγο ονομάζονται δυνάμεις επαφής. Οι δυνάμεις αυτές υπακούουν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και, οι μεν κάθετες στην επιφάνεια επαφής (Αντιδράσεις) είναι ανεξάρτητες από την σχετική κίνηση των δύο σωμάτων (και εξαρτώνται από τη γεωμετρία και τις εξωτερικές δυνάμεις που εξαναγκάζουν τα δύο σώματα να είναι σε επαφή), οι δε παράλληλες στην επιφάνεια επαφής (γνωστές και ως δυνάμεις τριβής) εξαρτώνται από την τάση που έχουν τα δύο σώματα να μετακινηθούν, το ένα ως προς το άλλο, και από την σχετική τους κίνηση. Όλες οι δυνάμεις επαφής έχουν, σε τελευταία ανάλυση, ηλεκτρομαγνητικό χαρακτήρα, και οφείλονται στις ηλεκτρομαγνητικές (Η/Μ) αλληλεπιδράσεις των επιφανειακών ατομικών - μοριακών συγκροτημάτων του ενός σώματος με το άλλο.



Η αλληλεπίδραση αυτή αποδίδεται σχηματικά στο διπλανό σχήμα, στο οποίο φαίνεται η μετάβαση από την κλίμακα των χιλιοστομέτρων (στην οποία δύο επιφάνειες μπορεί να φαίνονται επίπεδες), στην κλίμακα των μικρομέτρων (όπου αναδεικνύεται η τραχύτητα των επιφανειών, που έχει ως αποτέλεσμα ελαστική ή/και πλαστική παραμόρφωση), και στην κλίμακα των νανομέτρων (όπου οι παραπάνω παραμορφώσεις ανάγονται σε μοριακές αλληλεπιδράσεις). Οι διαμοριακές αλληλεπιδράσεις έχουν σημασία ακόμη και στην περίπτωση ιδανικά επίπεδων επιφανειών, όπως είναι οι διεπιφάνειες κρυσταλλικών επιφανειών, στις οποίες η αλληλεπίδραση των πρώτων μονομοριακών στοιβάδων από κάθε πλευρά είναι αυτές που καθορίζουν, σε μεγάλο βαθμό την "τριβή", μεταξύ των δύο σωμάτων. Επειδή, όμως, ο ακριβής μικροσκοπικός υπολογισμός τους είναι εξαιρετικά δύσκολος, λόγω της πολυπλοκότητας των Η/Μ δυνάμεων αλλά κυρίως λόγω του μεγάλου αριθμού επιφανειακών μοριακών συγκροτημάτων, τις περιγράφουμε φαινομενολογικά με το μακροσκοπικό τους αποτέλεσμα, κατά μέσον όρο.

Μία πειραματική διαδικασία με την οποία μπορεί να μελετηθούν φαινομενολογικά οι επιφανειακές δυνάμεις είναι, π.χ., το κεκλιμένο επίπεδο με ελεγχόμενα μεταβαλλόμενη γωνία κλίσης, μέσα στο πεδίο βαρύτητας, που φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Φροντίζουμε η επιφανειακή ποιότητα του κεκλιμένου επιπέδου να είναι ίδια σε όλη την έκτασή του, και τοποθετούμε πάνω του ένα άλλο σώμα μάζας m, έτσι ώστε τα δύο σώματα να έρχονται σε επαφή μέσω της κοινής τους επιφάνειας. Αν η γωνία κλίσης είναι $\varphi = 0$, οπότε διαπιστώνουμε ότι το σώμα μάζας m ακινητεί, για την ερμηνεία αυτής της ακινησίας,



σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα, χρειάζεται να επικαλεστούμε την ύπαρξη μίας δύναμης αντίδρασης $\vec{A}$, που ασκείται από το επίπεδο στο σώμα m, κάθετα στη διεπιφάνειά τους, ώστε να εξισορροπεί το βάρος του σώματος $B = mg$. Αυτή δεν είναι παρά η αντίδραση στην ίση και αντίθετη δύναμη που ασκεί το σώμα στο επίπεδο, λόγω του βάρους του, (σε συνέπεια με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα). Όταν αρχίσουμε να αυξάνουμε τη γωνία κλίσης φ, παρατηρούμε ότι, για αρκετά μικρές γωνίες, το σώμα εξακολουθεί να ακινητεί ως προς το κεκλιμένο επίπεδο. Για να ερμηνεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα, χρειάζεται, εκτός από την αντίδραση $\vec{A}$, (η οποία παραμένει κάθετη στη διεπιφάνεια, αλλά πρέπει να έχει μικρότερη τιμή ώστε να αλληλοαναιρείται με την αντίθετη βαρυτική συνιστώσα, η οποία έχει τιμή $B_{\perp} = mg\cos\varphi < mg$).και μία δύναμη Τ παράλληλη στη διεπιφάνεια και ίση σε μέτρο αλλά αντίθετη με τη βαρυτική συνιστώσα $B_{||} = mg\sin\varphi$. Αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε τη γωνία φ, για κάποια οριακή τιμή της, $\varphi_{o\rho}$, παρατηρούμε ότι το σώμα αρχίζει να γλιστράει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. (Στην πραγματικότητα, το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται, και πρέπει να μειώσουμε ελαφρώς τη γωνία φ, ώστε να διατηρήσουμε την ισοταχή κίνηση, με την ταχύτητα που θα έχει προλάβει να αποκτήσει. Βλ. παρακάτω για τη διαφορά συντελεστή στατικής τριβής και συντελεστή κινητικής τριβής). Στην κατάσταση που το σώμα κινείται ισοταχώς, κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, οι εξισώσεις κίνησης (κατά τον άξονα x΄) και ισορροπίας (κατά τον άξονα y΄), γράφονται

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\varphi_{o\rho} &= T_{o\rho} \\ mg\cos\varphi_{o\rho} &= A \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{o\rho} = A\tan\varphi_{o\rho}$$

Αν το ίδιο πείραμα επαναληφθεί με $\varphi = 0$, και εφαρμογή μεταβλητής οριζόντιας δύναμης F_{hor} στο σώμα m, διαπιστώνουμε ότι η οριακή κατάσταση έναρξης της ισοταχούς κίνησης αντιστοιχεί στη συνθήκη $F_{hor,o\rho} = mg\mu$, όπου $\mu = \tan\varphi_{o\rho}$. Ο συντελεστής μ ονομάζεται *συντελεστής στατικής τριβής* $(\mu_{\sigma\tau})$ και εξαρτάται από την φύση των δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή. Όταν οι επιφάνειες αρχίσουν να βρίσκονται σε σχετική κίνηση, τότε η δυναμική του εξηγείται με ανάλογες σχέσεις αλλά με έναν διαφορετικό συντελεστή γνωστό ως συντελεστή κινητικής τριβής $(\mu_{\kappa\iota\nu} < \mu_{\sigma\tau})$.

Στη γενικότερη περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε ότι για την τριβή ισχύει η σχέση:

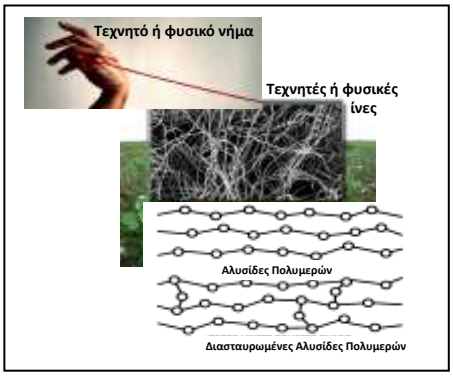
$$F_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma} \le \mu_{\sigma\tau} F_{\kappa\alpha\theta},$$

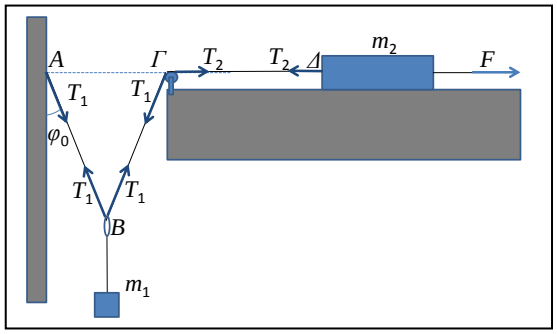
όπου $F_{\kappa\alpha\theta}$ είναι η δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε δύο σώματα, κάθετα στην μεταξύ τους επιφάνειας επαφής. Η ισότητα στην προηγούμενη σχέση ισχύει κατά την στιγμή που αρχίζει η σχετική κίνηση των δύο σωμάτων, παράλληλα στην επιφάνεια επαφής. Για την ακρίβεια, αμέσως μετά την έναρξη της κίνησης ισχύει: $F_{\kappa\iota\nu-\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma} = \mu_{\kappa\iota\nu} F_{\kappa\alpha\theta} \le \mu_{\sigma\tau} F_{\kappa\alpha\theta} = F_{\sigma\tau,\max}$.

Εκτός από τις δυνάμεις τριβής μεταξύ στερεών επιφανειών, που περιγράφονται στις προηγούμενες παραγράφους, στην προηγούμενη ενότητα έχουμε αναφερθεί και σε δυνάμεις μεταξύ στερεών και ρευστών, οι οποίες είναι αντίθετες με τη σχετική ταχύτητα στερεού και ρευστού και είναι ανάλογες με το μέτρο ή με το τετράγωνο αυτής της ταχύτητας. Και σε αυτή την περίπτωση, η φύση αυτών των δυνάμεων έχει σχέση με την αλληλεπίδραση των μορίων του ρευστού με τα επιφανειακά μοριακά συγκροτήματα του στερεού

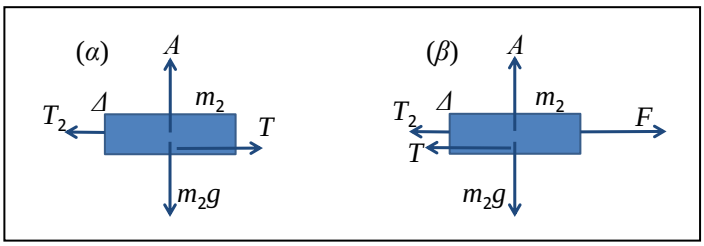
Τάση νήματος

Κατά την εφαρμογή δύναμης σε κάποιο σώμα, μέσω νήματος το οποίο είναι συνδεδεμένο σε αυτό το σώμα, η δύναμη αυτή θα απαιτούσε για την μικροσκοπική της περιγραφή μία αναλυτική περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων όλων των μορίων του νήματος. Τα νήματα συνδυάζουν αντοχή και ευκαμψία, οι οποίες είναι αποτέλεσμα της φύσης των μακρομορίων, και των πολυμερικών αλυσίδων από τα οποία αποτελούνται τα νήματα. Επειδή αυτό δεν είναι δυνατόν, λόγω του μεγάλου αριθμού μορίων, η δύναμη αυτή περιγράφεται επίσης φαινομενολογικά και, όταν το νήμα είναι τεντωμένο, θεωρούμε ότι εφαρμόζεται κατά μήκος της διεύθυνσης που είναι τεντωμένο το νήμα, και την ονομάζουμε τάση του νήματος. Όταν το νήμα είναι «μη-εκτατό» (δεν μεταβάλλεται το μήκος του) τότε η τάση είναι ίδια σε όλο το μήκος του τεντωμένου νήματος, Επίσης, όταν η μάζα του νήματος θεωρηθεί αμελητέα (σε σχέση με τις υπόλοιπες μάζες κάποιου προβλήματος) τότε οι τάσεις που ασκούνται στα δύο άκρα του θεωρούνται ίσες και αντίθετες, διότι διαφορετικά θα υπήρχε μη-μηδενική επιταχύνουσα δύναμη που θα επέφερε άπειρη επιτάχυνση στο νήμα. Σε περίπτωση που το νήμα έχει πεπερασμένη μάζα (ή, πεπερασμένη μάζα ανά μονάδα μήκους, σε περιπτώσεις άπειρου μήκους), τότε η διαφορά τάσεων ανάμεσα σε δύο σημεία του τεντωμένου νήματος αποτελεί την επιταχύνουσα δύναμη για το τμήμα του νήματος που περιλαμβάνεται ανάμεσα στα δύο αυτά σημεία.





Παράδειγμα 2.2.8 Σώμα μάζας m_1 κρέμεται με τη βοήθεια μη-εκτατού νήματος αμελητέας μάζας και δακτυλιδιού αμελητέας μάζας, από άλλο νήμα ΑΒΓΔ, του οποίου τα άκρα Α και Δ είναι στηριγμένα σε ακλόνητο τοίχο και σε σώμα μάζας m_2, αντίστοιχα, έτσι ώστε τα σημεία Α, Γ, Δ να ευρίσκονται στην ίδια ευθεία και ΑΓ=D. Το νήμα στο σημείο Γ διέρχεται από τροχαλία αμελητέας μάζας και ελεύθερη τριβών, και το δακτυλίδι (σημείο Β) κινείται ως προς το νήμα χωρίς τριβές. Η επαφή ανάμεσα στο σώμα m_2 και στο οριζόντιο επίπεδο χαρακτηρίζεται από συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής, $\mu_{\sigma\tau} > \mu_{\kappa\iota\nu}$, αντίστοιχα. (α) Αν η αρχική γωνία ανάμεσα στον κατακόρυφο τοίχο και στο τμήμα ΑΒ του νήματος είναι φ_0, να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της μάζας $m_{1,\max}$ που μπορεί να αναρτηθεί από το νήμα, έτσι ώστε το σύστημα να εξακολουθεί να βρίσκεται σε στατική ισορροπία, χωρίς τη βοήθεια εξωτερικής δύναμης (F=0). (β) Όταν m_1=$m_{1,\max}$, να υπολογιστεί η ελάχιστη εξωτερική οριζόντια δύναμη F, που πρέπει να ασκηθεί στο σώμα m_2, έτσι ώστε να αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά. (γ) Αν υποθέσουμε ότι μέσα σε ελάχιστο χρονικό διάστημα από την έναρξη της κίνησης, το σώμα m_2 αποκτά ταχύτητα υ_0 , να υπολογισθεί η τιμή που πρέπει να λάβει η εξωτερική δύναμη F προκειμένου να διατηρηθεί η ισοταχής κίνηση, καθώς και η εξάρτησή της από τον χρόνο.



(α) Σχεδιάζουμε το λεγόμενο σχεδιάγραμμα ελεύθερου σώματος για την πρώτη περίπτωση. Επειδή το σώμα έχει την τάση να κινηθεί προς τα αριστερά, η τριβή T που ασκείται πάνω του θα κατευθύνεται δεξιά. Η

συνθήκη ισορροπίας στους δύο άξονες γράφεται: $\left.\begin{array}{l} m_2 g = A \\ T_2 = T \le \mu_{\sigma\tau} A \end{array}\right\} \Rightarrow T_2 \le \mu_{\sigma\tau} m_2 g$. Επίσης, από το σχεδιάγραμμα των τάσεων στο νήμα, έχουμε: $2T_1 \cos\varphi_0 = m_1 g \Rightarrow T_1 = {m_1 g}/{2\cos\varphi_0}$

Αλλά, από το γεγονός ότι η τροχαλία είναι αμελητέας μάζας (και, επομένως, και ροπής αδράνειας) και δεν υφίσταται τριβές, συνεπάγεται ότι οι δύο εφαπτομενικές δυνάμεις στην περιφέρειά της πρέπει να είναι ίσες, $T_1 = T_2$, (διαφορετικά θα υπήρχε άπειρη γωνιακή επιτάχυνση), οπότε από τις δύο προηγούμενες σχέσεις συνάγεται ότι

$$ {m_1 g}/{2\cos\varphi_0} \le \mu_{\sigma\tau} m_2 g \Rightarrow \boxed{m_1 \le \mu_{\sigma\tau} m_2 2\cos\varphi_0} $$

(β) Αν ασκήσουμε δύναμη F προς τα δεξιά, τότε η τριβή μειώνεται καθώς, από τη σχέση οριζόντιας ισορροπίας θα πρέπει να ισχύει $T_2 = T + F \Rightarrow T = T_2 - F$. Άρα, όταν $F = T_2$, τότε η τριβή T μηδενίζεται. Περαιτέρω αύξηση της δύναμης F, προκαλεί μία «τάση» του σώματος να κινηθεί προς τα δεξιά, οπότε αρχίζει να αναπτύσσεται τριβή, η οποία κατευθύνεται τώρα προς τα αριστερά. Όσο το σώμα εξακολουθεί να ακινητεί, οι συνθήκες ισορροπίας γράφονται $m_2 g = A, \quad T_2 + T = F$, όπου $T \le \mu_{\sigma\tau} A = \mu_{\sigma\tau} m_2 g$, επομένως $F_{\max} = T_2 + \mu_{\sigma\tau} m_2 g$. Αλλά για την T_2 εξακολουθεί να ισχύει (όπως και στο προηγούμενο ερώτημα) $T_2 = T_1 = {m_1 g}/{2\cos\varphi_0}$.

Τελικά: $$F_{\max} = {m_1 g}/{2\cos\varphi_0} + \mu_{\sigma\tau} m_2 g$$

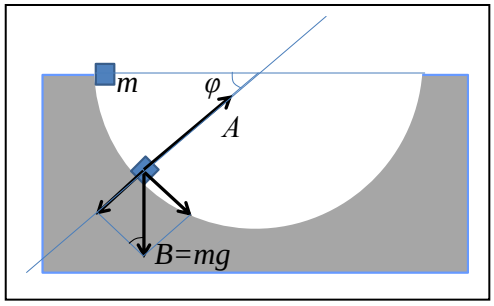
(γ) Αν υποθέσουμε ότι μέσα σε ελάχιστο χρονικό διάστημα από την έναρξη της κίνησης, το σώμα m_2 αποκτά ταχύτητα υ_0, (αυτό συμβαίνει διότι, ενώ προς τα δεξιά εξασκείται η μέγιστη δύναμη $F_{\max} = {m_1 g}/{2\cos\varphi_0} + \mu_{\sigma\tau} m_2 g$, προς τα αριστερά ασκείται μικρότερη δύναμη τριβής ${m_1 g}/{2\cos\varphi_0} + \mu_{\kappa\iota\nu} m_2 g$, λόγω του ότι έχει πλέον ενεργοποιηθεί ο συντελεστής κινητικής τριβής). Επομένως, προκειμένου να εξασφαλισθεί η συνέχιση της ισοταχούς κίνησης, θα πρέπει η εξωτερική δύναμη F να λάβει, προς στιγμήν, τιμή ίση $F = {m_1 g}/{2\cos\varphi_0} + \mu_{\kappa\iota\nu} m_2 g$. Στη συνέχεια, επειδή μειώνεται το μήκος του νήματος ΑΒΓ που κρέμεται, λόγω της ισοταχούς κίνησης της m_2, μεταβάλλεται και η γωνία φ, οπότε: $F(t) = \dfrac{m_1 g}{2\cos\varphi(t)} + \mu_{\kappa\iota\nu} m_2 g$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\sin\varphi(t) = \frac{D/2}{L(t)/2} = \frac{D}{L(t)} \Rightarrow \cos\varphi(t) = \sqrt{1-\sin^2\varphi(t)} = \sqrt{1-\left(\frac{D}{L(t)}\right)^2} = \frac{\sqrt{L^2(t)-D^2}}{L(t)}$$

Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό μήκος, (μεταξύ των Α και Γ), είναι $L_0 = \dfrac{D}{\sin\varphi_0}$ τότε, (θεωρώντας αμελητέα την μεταβολή μήκους που αντιστοιχεί στο απειροστό χρονικό διάστημα Δt , κατά τη διάρκεια του οποίου το σώμα m_2 επιταχύνεται μέχρι να λάβει την τελική του ταχύτητα υ_0), έχουμε:

$$L(t) = L_0 - \upsilon_0 t \Rightarrow \cos\varphi(t) = \frac{\sqrt{(L_0-\upsilon_0 t)^2 - D^2}}{L_0 - \upsilon_0 t} \Rightarrow F(t) = \frac{m_1 g (L_0 - \upsilon_0 t)}{2\sqrt{(L_0-\upsilon_0 t)^2 - D^2}} + \mu_{\kappa\iota\nu} m_2 g$$



Παράδειγμα 2.2.9 Σώμα μάζας m ολισθαίνει (χωρίς να κυλάει) σε λεία ημι-κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R. Να υπολογισθούν, συναρτήσει της γωνίας φ, (α) η γωνιακή επιτάχυνση (β) η δύναμη που ασκείται από την κυλινδρική επιφάνεια στο σώμα m.

Θα εργασθούμε σε πολικές συντεταγμένες, δεδομένου ότι από τη γεωμετρία της κίνησης έχουμε:

$$\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} = 0$$

και, επομένως, θα μηδενίζονται οι όροι της επιτάχυνσης που περιέχουν αυτές τις παραγώγους Θυμίζουμε ότι, σε πολικές συντεταγμένες, η επιτάχυνση είναι $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$, και με βάση τις προηγούμενες σχέσεις γίνεται $\vec{a} = \left(-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + \left(\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$, οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\left[\left(-R\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} + \left(R\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}\right] = \left(mg\sin\varphi - A\right)\hat{\rho} + \left(mg\cos\varphi\right)\hat{\varphi}$

Κατά συνιστώσες $m\left(-R\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho} = \left(mg\sin\varphi - A\right)\hat{\rho}, \qquad m\left(R\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi} = \left(mg\cos\varphi\right)\hat{\varphi}$

(α) Από τη γωνιακή συνιστώσα προκύπτει: $\boxed{\ddot{\varphi} = \left(g/R\right)\cos\varphi}$:

(β) Από την ακτινική συνιστώσα προκύπτει: $-mR\dot{\varphi}^2 = mg\sin\varphi - A \Rightarrow A = mg\sin\varphi + mR\dot{\varphi}^2$, η αντίδραση συναρτήσει της γωνίας, αλλά χρειαζόμαστε την γωνιακή ταχύτητα $\dot{\varphi}$=?

Την γωνιακή ταχύτητα θα την υπολογίσουμε από την γωνιακή συνιστώσα $\ddot{\varphi} = \left(g/R\right)\cos\varphi$.

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \left(g/R\right)\cos\varphi \Rightarrow \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \left(g/R\right)\cos\varphi \Rightarrow \omega\, d\omega = \left(g/R\right)\cos\varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$\int_0^{\omega} \omega\, d\omega = \left(g/R\right)\int_{\varphi=0}^{\varphi} \cos\varphi d\varphi \Rightarrow \frac{\omega^2}{2} = \left(g/R\right)\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\omega^2 \equiv \dot{\varphi}^2 = \left(2g/R\right)\sin\varphi}$$

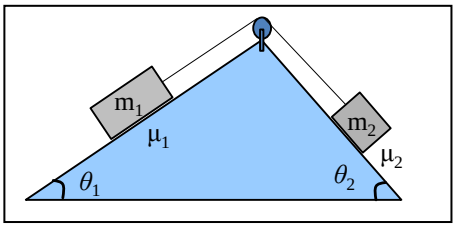
Οπότε, αντικαθιστώντας στη σχέση για την αντίδραση Α έχουμε

$$A = mg\sin\varphi + mR\left(2g/R\right)\sin\varphi \Rightarrow \boxed{A = mg\left(3\sin\varphi\right)}$$

Για τον υπολογισμό του $\varphi = \varphi(t)$ έχουμε $\dot{\varphi} = \sqrt{\left(2g/R\right)\sin\varphi} \Rightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\phi}} = \sqrt{\left(2g/R\right)}dt}$

[Ισοδύναμα, από διατήρηση ενέργειας: $mgR\sin\varphi = \frac{1}{2}m\left(\omega R\right)^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\left(2g/R\right)\sin\varphi}$]

$$\int_o^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\phi}} = \sqrt{\left(2g/R\right)}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad t\sqrt{\left(2g/R\right)} = \int_o^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\phi}}$$ [=? ελλειπτικό ολοκλήρωμα 1^{ου} είδους]

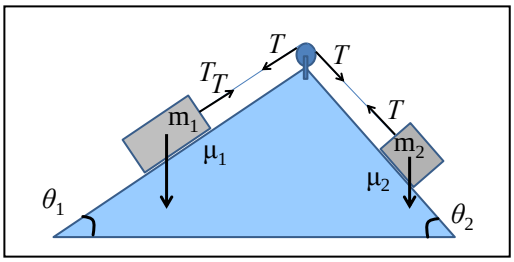


Παράδειγμα 2.2.10 Στο διπλό κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος μπορούν να κινούνται ή να ισορροπούν οι δύο μάζες m_1 και m_2, ο συντελεστής τριβής των οποίων με κάθε κεκλιμένο επίπεδο είναι $\left(\mu_{1,\sigma\tau} = \mu_{1,\kappa\iota\nu} = \mu_1 < \tan\theta_1\right)$ και $\left(\mu_{2,\sigma\tau} = \mu_{2,\kappa\iota\nu} = \mu_2 < \tan\theta_2\right)$ αντίστοιχα. Να διερευνηθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις ισορροπίας και κίνησης, για διαφορετικές τιμές του λόγου των μαζών, $\lambda = m_2/m_1$, και να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις στις περιπτώσεις επιταχυνόμενης κίνησης. Τα νήματα θεωρούνται μη-εκτατά και χωρίς μάζα και η τροχαλία επίσης χωρίς μάζα και χωρίς τριβές, ενώ θεωρούνται δεδομένα και σταθερά τα στοιχεία $\left(\mu_1, \mu_2, \theta_1, \theta_2\right)$ της διάταξης.

Η εφαρμογή αυτή θέλει να επισημάνει ότι, ακόμη και για σταθερή γεωμετρία και δεδομένους συντελεστές τριβής, το πρόβλημα των τριβών και των τάσεων μπορεί να έχει πολλές

διαφορετικές λύσεις, ανάλογα με τις τιμές των εμπλεκόμενων μαζών. Μάλιστα, για τη δεδομένη γεωμετρία και τη φύση των επιφανειών, μπορεί να είναι στατικό πρόβλημα, η πρόβλημα με διαφορετική δυναμική.

Το σύστημα μπορεί: (α) να ισορροπεί, χωρίς να έχει την «τάση» να κινηθεί προς καμία κατεύθυνση, (β) να ισορροπεί, έχοντας την τάση να κινηθεί προς τα δεξιά, (γ) να ισορροπεί, έχοντας την τάση να κινηθεί προς τα αριστερά, (δ) να επιταχύνεται προς τα δεξιά, (ε) να επιταχύνεται προς τα αριστερά. Σε όλες τις περιπτώσεις, οι τάσεις των νημάτων και τα βάρη των σωμάτων έχουν τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα, ενώ οι τριβές αλλάζουν τιμή και προσανατολισμό.



(α) Ισορροπία, χωρίς την «τάση» να κινηθεί προς καμία κατεύθυνση, (μηδενικές τριβές):

$$\{m_1 g\sin\theta_1 = T,\quad T = m_2 g\sin\theta_2\} \quad\Rightarrow\quad \boxed{m_2/m_1 = \sin\theta_1/\sin\theta_2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \lambda_0 \quad (1)$$

(β) Ισορροπία, έχοντας την «τάση» να κινηθεί προς τα δεξιά, (τριβές προς τα αριστερά)

$$\{m_2 g\sin\theta_2 = T + F_{\tau\rho,2},\quad T = m_1 g\sin\theta_1 + F_{\tau\rho,1}\} \Rightarrow m_2 g\sin\theta_2 - m_1 g\sin\theta_1 = F_{\tau\rho,1} + F_{\tau\rho,2} \quad (2\alpha)$$

$$\{F_{\tau\rho,1} \le m_1 g\mu_1\cos\theta_1,\quad F_{\tau\rho,2} \le m_2 g\mu_2\cos\theta_2\} \Rightarrow F_{\tau\rho,1} + F_{\tau\rho,2} \le m_1 g\mu_1\cos\theta_1 + m_2 g\mu_2\cos\theta_2 \quad (2\beta)$$

$$(2\alpha),(2\beta) \Rightarrow \boxed{m_1\left(\sin\theta_1 + \mu_1\cos\theta_1\right) \ge m_2\left(\sin\theta_2 - \mu_2\cos\theta_2\right)} \quad (3\alpha)$$

Από (1) και (3α): <u>ισορροπία, αλλά με «τάση» κίνησης προς τα δεξιά</u>, για την περιοχή μαζών:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} < \frac{m_2}{m_1} \le \frac{\left(\sin\theta_1 + \mu_1\cos\theta_1\right)}{\left(\sin\theta_2 - \mu_2\cos\theta_2\right)} \qquad (3\beta)$$

(γ) Ισορροπία, έχοντας την «τάση» να κινηθεί προς τα αριστερά, (τριβές προς τα δεξιά)

$$\{T = m_2 g\sin\theta_2 + F_{\tau\rho,2},\quad m_1 g\sin\theta_1 = T + F_{\tau\rho,1}\} \Rightarrow m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2 = F_{\tau\rho,1} + F_{\tau\rho,2} \qquad (4\alpha)$$

$$\{F_{\tau\rho,1} \le m_1 g\mu_1\cos\theta_1,\quad F_{\tau\rho,2} \le m_2 g\mu_2\cos\theta_2\} \Rightarrow F_{\tau\rho,1} + F_{\tau\rho,2} \le m_1 g\mu_1\cos\theta_1 + m_2 g\mu_2\cos\theta_2 \quad (4\beta)$$

$$(4\alpha),(4\beta) \Rightarrow \boxed{m_1\left(\sin\theta_1 - \mu_1\cos\theta_1\right) \le m_2\left(\sin\theta_2 + \mu_2\cos\theta_2\right)} \quad (5\alpha)$$

Από (1) και (5α): <u>ισορροπία, αλλά με «τάση» κίνησης προς αριστερά</u>, για την περιοχή μαζών:

$$\frac{\left(\sin\theta_1 - \mu_1\cos\theta_1\right)}{\left(\sin\theta_2 + \mu_2\cos\theta_2\right)} \le \frac{m_2}{m_1} < \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \qquad (5\beta)$$

(δ) Επιταχύνεται προς τα δεξιά, (τριβές προς τα αριστερά)

$$\{m_2 a = m_2 g\sin\theta_2 - T - m_2 g\mu_2\cos\theta_2,\quad m_1 a = T - m_1 g\sin\theta_1 - m_1 g\mu_1\cos\theta_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{m_2\left(\sin\theta_2 - \mu_2\cos\theta_2\right) - m_1\left(\sin\theta_1 + \mu_1\cos\theta_1\right)}{m_1 + m_2} g} \qquad (6)$$

$$\text{Για } a > 0 \Rightarrow m_2\left(\sin\theta_2 - \mu_2\cos\theta_2\right) - m_1\left(\sin\theta_1 + \mu_1\cos\theta_1\right) > 0 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} > \frac{\left(\sin\theta_1 + \mu_1\cos\theta_1\right)}{\left(\sin\theta_2 - \mu_2\cos\theta_2\right)} \quad (6\beta)$$

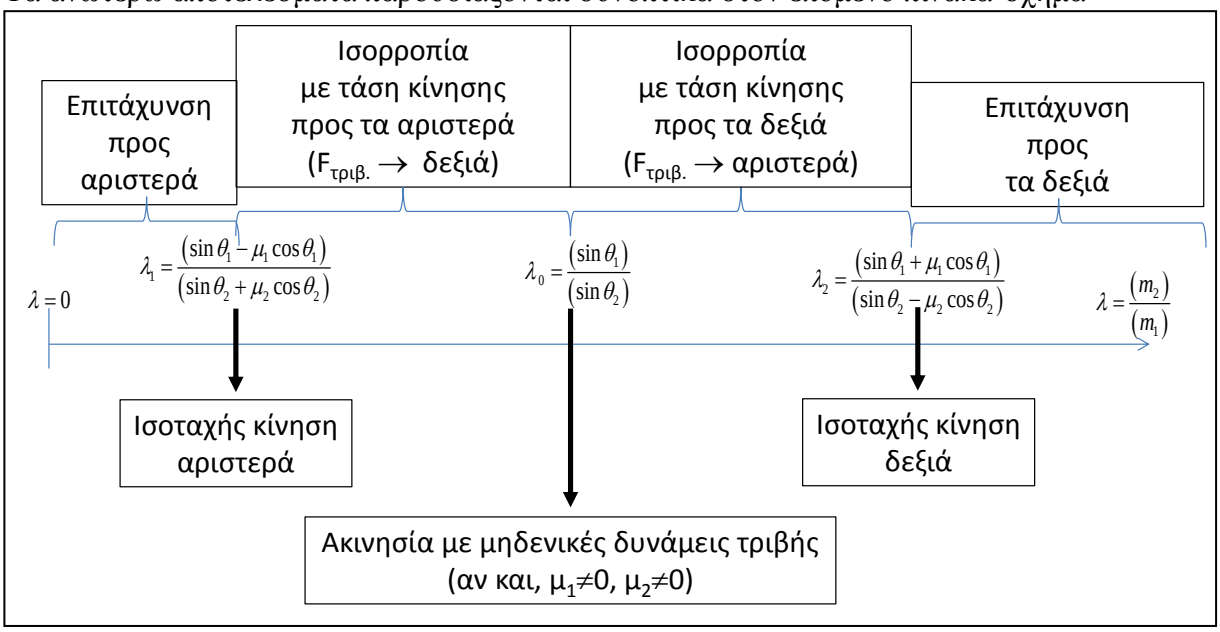
(ε) Επιταχύνεται προς τα αριστερά, (τριβές προς τα δεξιά)

$$\{m_1 a = m_1 g\sin\theta_1 - T - m_1 g\mu_1\cos\theta_1,\quad m_2 a = T - m_2 g\sin\theta_2 - m_2 g\mu_2\cos\theta_2\} \Rightarrow$$

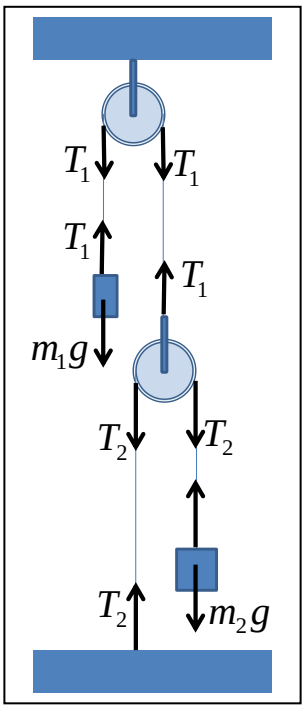
$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{m_1\left(\sin\theta_1 - \mu_1\cos\theta_1\right) - m_2\left(\sin\theta_2 + \mu_2\cos\theta_2\right)}{m_1 + m_2} g} \qquad (7)$$

Για $a>0 \Rightarrow m_1\left(\sin\theta_1-\mu_1\cos\theta_1\right)-m_2\left(\sin\theta_2+\mu_2\cos\theta_2\right)>0 \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1}<\dfrac{\left(\sin\theta_1-\mu_1\cos\theta_1\right)}{\left(\sin\theta_2+\mu_2\cos\theta_2\right)}$ (7β)

Τα ανωτέρω αποτελέσματα παρουσιάζονται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα-σχήμα



Λόγω των αρχικών υποθέσεων, $\left(\mu_{1,\sigma\tau}=\mu_{1,\kappa\iota\nu}=\mu_1<\tan\theta_1\right)$ και $\left(\mu_{2,\sigma\tau}=\mu_{2,\kappa\iota\nu}=\mu_2<\tan\theta_2\right)$, οι περιοχές και τα όρια των περιοχών για το πηλίκο των μαζών έχουν θετικές τιμές. Οι δύο αυτές υποθέσεις, για τη σχέση των γωνιών με τους αντίστοιχους συντελεστές τριβής, δηλώνουν ότι το κάθε σώμα από μόνο του στο αντίστοιχο κεκλιμένο επίπεδο θα εκτελούσε καθοδική κίνηση.



Παράδειγμα 2.2.11 Ιδανική Μηχανή του Atwood φέρει στον ένα κλάδο της άλλη τροχαλία συνδεδεμένη με το δάπεδο, όπως στο σχήμα. Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των δύο μαζών και της τροχαλίας. (Τροχαλίες χωρίς μάζα και τριβές, νήματα αβαρή και μη εκτατά). [Διερεύνηση περιπτώσεων]

Έστω ότι το σύστημα επιταχύνεται προς την πλευρά της m_1, και έστω ότι : a_1, a_2, a, οι επιταχύνσεις των μαζών m_1, m_2 και της δεύτερης τροχαλίας, αντίστοιχα. Επειδή όλα τα νήματα είναι μη εκτατά, έχουμε: $a_2=2a_1=2a$ (1)

$m_1a_1=m_1g-T_1$ (2), $m_2a_2=T_2-m_2g$ (3)

και, λόγω της (1), παίρνουμε

$m_1a=m_1g-T_1$ (2α), $2m_2a=T_2-m_2g$ (3α)

Επειδή και η δεύτερη τροχαλία είναι χωρίς μάζα, για να έχει πεπερασμένη τιμή οποιαδήποτε επιτάχυνσή της a θα πρέπει η συνολική επιταχύνουσα δύναμη να είναι μηδέν $\Rightarrow T_1=2T_2$ (4).

Συνδυάζοντας τις (2α), (3α) και απαλείφοντας τις τάσεις μέσω της (4), παίρνουμε

$$\boxed{a=\frac{m_1-2m_2}{m_1+4m_2}g}$$

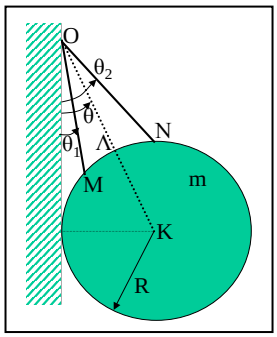
<u>Σχόλια-Διερεύνηση</u>:

(i) Αν $m_1 > 2m_2$ τότε η παραδοχή για επιτάχυνση προς την πλευρά της m_1 οδηγεί σε συνεπή αποτελέσματα

(ii) Αν $m_1 < 2m_2$ τότε το σύστημα κινείται προς την αντίθεση κατεύθυνση με

$$\boxed{a = \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g}$$

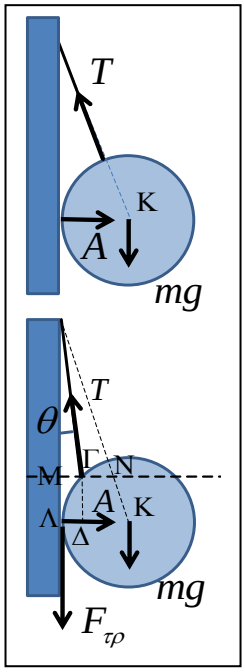
(iii) Το αποτέλεσμα (ii) θα προέκυπτε και αν υποθέταμε κίνηση προς την m_2



Παράδειγμα 2.2.12 (α) Σφαίρα, κέντρου Κ, μάζας m και ακτίνας R εφάπτεται σε κατακόρυφο λείο τοίχο (συντελεστής στατικής τριβής μ=0) καθώς κρέμεται από νήμα μήκους L, το άλλο άκρο του οποίου είναι επίσης στερεωμένο στον ίδιο κατακόρυφο τοίχο (σημείο Ο). Δείξτε ότι, σ' αυτή την περίπτωση το νήμα τείνεται κατά μήκος της ευθείας ΟΚ. (β) Στην περίπτωση που ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μη μηδενικός, εξετάστε αν το νήμα ανάρτησης μπορεί να πάρει κλίση είτε όπως η ΟΜ είτε όπως η ΟΝ, και υπολογίστε τον συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στη σφαίρα και τον τοίχο, αν το νήμα ανάρτησης σχηματίζει, τελικώς, γωνία θ (θ≠τοξημ[R/(R+L)]) με τον τοίχο.

(α) Όταν $\mu = 0$ τότε και $F_{\tau\rho} = 0$, οπότε στο σώμα ασκούνται το βάρος του mg, η κάθετη αντίδραση του κατακόρυφου τοίχου Α και η τάση του νήματος ανάρτησης Τ.

Προκειμένου, σε κατάσταση ισορροπίας, να έχουμε μηδενική ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα και ως προς το κέντρο της σφαίρας, θα πρέπει η προέκταση του νήματος να διέρχεται από το κέντρο, δεδομένου ότι οι δύο άλλες δυνάμεις διέρχονται από το κέντρο.



(β) Όταν $\mu \neq 0$, τότε και $F_{\tau\rho} \neq 0$, οπότε, αν το νήμα βρίσκεται σε γωνία μικρότερη από αυτή που σχηματίζει η ευθεία «σημεία ανάρτησης – κέντρο σφαίρας» με τον τοίχο, τότε η τριβή θα κατευθύνεται προς τα κάτω. Αυτό γίνεται και διαισθητικά αντιληπτό με το επιχείρημα ότι το σύστημα τείνει να πάρει την κατάσταση που είχε απουσία τριβών, άρα να περιστραφεί δεξιόστροφα. Μπορεί επίσης να δειχθεί με βάση το γεγονός ότι αν υπολογιστούν ροπές ως προς το κέντρο της σφαίρας (ως προς το οποίο το βάρος και η κάθετη αντίδραση έχουν μηδενική ροπή) θα πρέπει η ροπή της τάσης Τ και της τριβής $F_{\tau\rho}$ να εξισορροπούνται. Αν το σύστημα το φέρουμε στην συμπληρωματική κατάσταση [το νήμα να βρίσκεται σε γωνία μεγαλύτερη από αυτή που σχηματίζει η ευθεία «σημεία ανάρτησης – κέντρο σφαίρας» με τον τοίχο] τότε, με τα ίδια επιχειρήματα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η τριβή θα κατευθύνεται προς τα πάνω. Ας αναλύσουμε την πρώτη τοποθέτηση, θεωρώντας ότι αναζητούμε την οριακή γωνία θ:

Οριζόντιος άξονας: $T\sin\theta = A$ (1)

Κατακόρυφος άξονας: $T\cos\theta = F_{\tau\rho} + mg$, (2)

Επειδή αναφερόμαστε στην οριακή γωνία: $F_{\tau\rho} = \mu A$ (3)

Ροπές (ως προς το σημείο πρόσδεσης του νήματος στη σφαίρα, Γ)

$$mg\left(R - L\sin\theta\right) = A\left(\Gamma\Delta\right) + \mu AL\sin\theta \quad (4)$$

όπου: $$\Gamma\Delta = \sqrt{\left(\Gamma\text{K}\right)^2 - \left(\Delta\text{K}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \left(R - L\sin\theta\right)^2} \quad (5)$$

Από (1) και (2) $$\tan\theta = \frac{A}{T_\rho + mg} = \frac{A}{\mu A + mg} \Rightarrow A = \frac{mg\tan\theta}{1 - \mu\tan\theta} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις (5) και (6) στην (4), και επιλύοντας ως προς μ, παίρνουμε:

$$\boxed{\mu = \frac{R - L\sin\theta}{R\tan\theta} - \frac{\sqrt{L\sin\theta\left(2R - L\sin\theta\right)}}{R}}$$

Έλεγχος οριακής συμπεριφοράς: $\mu \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \to \dfrac{R}{R+L}$

Παράδειγμα 2.2.13 Αλυσίδα συνολικού μήκους L και συνολικής μάζας m είναι τεντωμένη σε ευθεία γραμμή πάνω σε ένα τραπέζι, και συγκρατείται έτσι ώστε ένα τμήμα της, μήκους x_0, να κρέμεται ελεύθερα από την άκρη του τραπεζιού, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας. Τη χρονική στιγμή αφήνουμε την αλυσίδα ελεύθερη, (χωρίς αρχική ταχύτητα). Να υπολογίσετε τον ολικό χρόνο μέχρι να εγκαταλείψει το τραπέζι όλη η αλυσίδα για τις περιπτώσεις: (α) που δεν υπάρχει τριβή ανάμεσα στην αλυσίδα και στο τραπέζι, (β) όταν ο συντελεστής τριβής είναι μ $\left(\mu < x_0/(L-x_o)\right)$[Τι θα συμβεί, στη δεύτερη περίπτωση, αν $\mu > x_0/(L-x_o)$;]

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε μία γραμμική πυκνότητα για την αλυσίδα $\rho \equiv \dfrac{dm}{dx} = \dfrac{m}{L}$, οπότε, για ένα τυχαίο στιγμιότυπο, κατά το οποίο μήκος *x* κρέμεται από το τραπέζι, η μάζα της αλυσίδας που είναι πάνω στο τραπέζι είναι $m_{L-x} = \left(L-x\right)\rho$ και η υπόλοιπη είναι $m_x = x\rho$.

(α) Η ενιαία επιτάχυνση όλης της αλυσίδας υπολογίζεται από τον 2ο Ν του Νέυτωνα

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{x}{L}g \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{L}g \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon = \frac{g}{L}\int_{x_0}^{x}xdx \quad \Rightarrow \boxed{\upsilon^2 = \frac{g}{L}\left(x^2 - x_0^2\right)}$$

Η τελευταία σχέση θα μπορούσε να έχει προκύψει και από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (διατήρηση μηχανικής ενέργειας).

Για τον υπολογισμό του χρόνου ολοκληρώνουμε την ταχύτητα

$$\upsilon = \sqrt{\frac{g}{L}\left(x^2 - x_0^2\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}\left(x^2 - x_0^2\right)} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - x_0^2\right)}} = \left(\sqrt{g/L}\right)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - x_0^2\right)}} = \left(\sqrt{g/L}\right)\int_0^t dt$$

Αλλά, $$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \ln\left\{x + \sqrt{x^2 - x_0^2}\right\}\Big|_{x_0}^{x} = \ln\left\{\frac{x}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1}\right\}$$

Επομένως: $$\boxed{t = \sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left\{\frac{x}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1}\right\}}$$

(β) Παρουσία τριβών, η δύναμη τριβής, τη στιγμή που κρέμεται τμήμα μήκους x της αλυσίδας εκτός του τραπεζιού, οφείλεται στο υπόλοιπο τμήμα μήκους *L-x*, άρα:

$F_{\tau\rho} = \mu F_{\kappa\alpha\theta} = \mu\dfrac{m}{L}\left(L-x\right)g$, και η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{m}{L}xg - \mu\frac{m}{L}\left(L-x\right)g \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{g}{L}x - \mu\frac{g}{L}\left(L-x\right) = \frac{g}{L}(1+\mu)x - \mu g$$

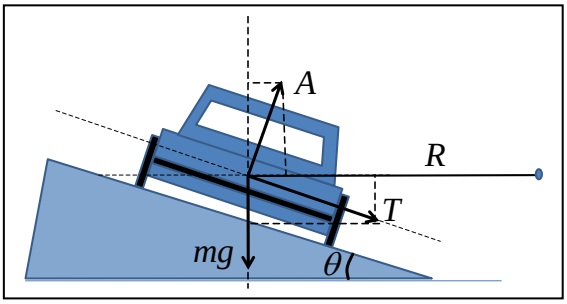
Θέτουμε: $A = \dfrac{g}{L}(1+\mu), \quad B = \mu g$, οπότε $\dfrac{d\upsilon}{dx}\dfrac{dx}{dt} = Ax - B \Rightarrow \upsilon d\upsilon = \left(Ax - B\right)dx \Rightarrow$

$$A\int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=\int_{Ax_0-B}^{Ax-B}(Ax-B)d(Ax-B)\Rightarrow A\frac{\upsilon^2}{2}=\frac{(Ax-B)^2}{2}\Bigg|_{Ax_0-B}^{Ax-B}\Rightarrow A\upsilon^2=(Ax-B)^2-(Ax_0-B)^2$$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{Ax^2-2Bx+C},\qquad \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{Ax^2-2Bx+C}}=\int_0^t dt,\quad \{C=2Bx_0-Ax_0^2\},$$

Επομένως: $$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{Ax^2-2Bx+C}}\Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left(\sqrt{A}\sqrt{Ax^2-2Bx+C}+Ax-B\right)\Big|_{x_0}^{x}}$$

Παράδειγμα 2.2.14 Αυτοκίνητο κινείται σε στροφή με ακτίνας καμπυλότητας R. Σε όλη την έκταση της στροφής το οδόστρωμα έχει κλίση, προς το κέντρο καμπυλότητας, με γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στους τροχούς και στο οδόστρωμα είναι μ. (α) Μελετήστε την κίνηση και υπολογίστε την μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο πάνω στην στροφή χωρίς να αρχίσει να γλιστράει (ντεραπάρισμα). Συγκρίνετε με τις περιπτώσεις: (β) το οδόστρωμα έχει μηδενική κλίση, και (γ) ο συντελεστής τριβής οδοστρώματος-τροχών είναι μηδέν. (δ) Υπάρχει η δυνατότητα πορείας σε στροφή όταν δεν υπάρχει ούτε τριβή ούτε και κλίση;



Η δύναμη του βάρους *mg* είναι κατακόρυφη. Η δύναμη της αντίδρασης, *A*, του οδοστρώματος είναι κάθετη στο οδόστρωμα. Η δύναμη της τριβής, *T*, στην περίπτωση που το αυτοκίνητο ήταν ακίνητο, θα κατευθυνόταν αντίθετα από ότι στο σχήμα, διότι το αυτοκίνητο θα είχε την τάση να γλιστρήσει προς τα κάτω. Επειδή μελετάμε τη μέγιστη ασφαλή ταχύτητα, μας ενδιαφέρει η περίπτωση που το αυτοκίνητο έχει την τάση να «φύγει» προ τα έξω, άρα η τριβή κατευθύνεται όπως στο σχήμα.

Αναλύουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο αυτοκίνητο στον κατακόρυφο άξονα και στο οριζόντιο επίπεδο και απαιτούμε: (α) ισορροπία κατά τον κατακόρυφο άξονα, και (β) να εξασφαλίζεται η απαραίτητη κεντρομόλος για την κίνηση στο επίπεδο.

$$A\cos\theta=T\sin\theta+mg\quad,\qquad A\sin\theta+T\cos\theta=m\upsilon^2/R$$

Επιλύουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων, ως προς *A* και *T* και παίρνουμε

$$A=m\left(g\cos\theta+\frac{\upsilon^2}{R}\sin\theta\right),\qquad T=m\left(\frac{\upsilon^2}{R}\cos\theta-g\sin\theta\right)$$

(α) Ασφαλής ταχύτητα (όχι ολίσθηση) παρουσία κλίσης και τριβών

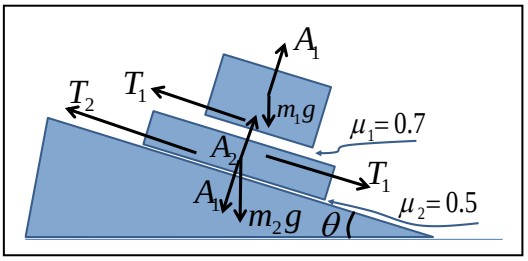
$$T\le\mu A\ \Rightarrow\ m\left(\frac{\upsilon^2}{R}\cos\theta-g\sin\theta\right)\le\mu m\left(g\cos\theta+\frac{\upsilon^2}{R}\sin\theta\right)\Rightarrow\boxed{\upsilon^2\le gR\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}}$$

(β) Ασφαλής ταχύτητα απουσία κλίσης $(\theta=0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon^2\le gR\mu}$

(γ) Ασφαλής ταχύτητα απουσία τριβών $(\mu=0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\upsilon^2\le gR\tan\theta}$

(δ) Απουσία τριβών και κλίσης, δεν υπάρχει μηχανισμός που θα εξασφαλίσει την κεντρομόλο δύναμη, (παρά μόνο αν το κινητό είναι συνδεδεμένο με το κέντρο καμπυλότητας !)

Παράδειγμα 2.2.15 Επάνω σε ένα επίπεδο που μπορεί να αλλάζει κλίση, βρίσκεται ένα κομμάτι χαρτόνι και πάνω στο χαρτόνι βρίσκεται ένας ξύλινος κύβος. Αν ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο ξύλο και στο χαρτόνι είναι μ_1=0.7 και ανάμεσα στο χαρτόνι και στο επίπεδο είναι μ_2=0.5, να περιγράψετε την εξέλιξη της κίνησης του συστήματος, για γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου, καθώς δοκιμάζουμε σταδιακά μεγαλύτερες γωνίες, ξεκινώντας από θ=0.



Γνωρίζουμε από την παρουσίαση των γενικών χαρακτηριστικών των δυνάμεων τριβής και των σχετικών συντελεστών τριβής ότι, όταν σε ένα κεκλιμένο επίπεδο έχουμε γωνία κλίσης θ τέτοια ώστε $\tan\theta = \mu$, τότε η τριβή ανάμεσα στο κεκλιμένο επίπεδο και σε ένα σώμα που βρίσκεται πάνω του, παίρνει την μέγιστη τιμή της και, για μεγαλύτερες γωνίες, το σώμα αρχίζει να γλιστράει. Λόγω της σχέσης των δύο συντελεστών τριβής, είναι φανερό ότι [οι δείκτες "1" και "2" αναφέρονται στα όρια μίας περιοχής γωνιών]:

(α) Μέχρι $\tan\theta_1 = 0.5 \;\Rightarrow\; \theta_1 = 26,6^o$, όλα ακινητούν

(β) Από $\theta_1 = 26,6^o$ μέχρι $\tan\theta_2 = 0.7 \Rightarrow \theta_2 \simeq 35^o$, δηλαδή για $26,6^o = \theta_1 < \theta < \theta_2 = 35^o$, τα m_1, m_2 κινούνται ως ένα σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο

(γ) Για γωνίες μεγαλύτερες των 35^0 τα δύο σώματα κινούνται «ανεξάρτητα»

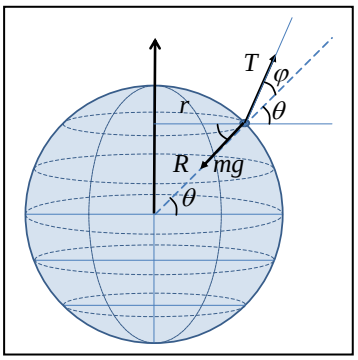
Για το πρώτο σώμα

$$\{m_1 a_1 = m_1 g\sin\theta_1 - T_1, \qquad T_1 = \mu_1 A_1 = \mu_1 m_1 g\cos\theta\} \Rightarrow \boxed{a_1 = g\left(\sin\theta - \mu_1\cos\theta\right)}$$

Για το δεύτερο σώμα

$m_2 a_2 = m_2 g\sin\theta + T_1 - T_2$ όπου $T_2 = \mu_2 A_2$, και $A_2 = A_1 + m_2 g\cos\theta = (m_1 + m_2)g\cos\theta$

$$\boxed{a_2 = g\left(\sin\theta - \mu_2\cos\theta\right) + \frac{m_1}{m_2}\left(\mu_1 - \mu_2\right)g\cos\theta}$$



Παράδειγμα 2.2.16 Θεωρώντας ότι η Γη είναι σφαίρα που περιστρέφεται περί τον άξονά της να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το νήμα της στάθμης με την ακριβή κατακόρυφο, συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους θ, όπου γίνεται η μέτρηση.

Ας υποθέσουμε ότι ένας πειραματιστής βρίσκεται σε γεωγραφικό πλάτος θ και κρεμά από μία οροφή ένα νήμα της στάθμης, φροντίζοντας να είναι σε ισορροπία ως προς την οροφή, (άρα, και ως προς τη Γη). Θα περιγράψουμε την κατάσταση όπως τη βλέπει ένας εξωτερικός , ως προς τη Γη, αδρανειακός παρατηρητής, Ο αδρανειακός παρατηρητής βλέποντας τη Γη να περιστρέφεται, και μαζί της το νήμα της στάθμης, ερμηνεύει τον προσανατολισμό του νήματος ως προς τη Γη, με τη βοήθεια της απαίτησης να εξασφαλιστεί κεντρομόλος δύναμη για το σφαιρίδιο του νήματος, το οποίο εκτελεί ομαλή

κυκλική κίνηση με ακτίνα $r = R\cos\theta$, και περίοδο ίση με την περίοδο της Γης $T_{ΓΗ}$ (=24 ώρες), επομένως με ταχύτητα $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T_{ΓΗ}}\cos\theta$.

Στο σφαιρίδιο του νήματος της στάθμης ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος του $B = mg$ με κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης, και η τάση του νήματος T, προς το σημείο ανάρτησης. Αν το νήμα σχηματίζει γωνία φ με την προέκταση της ευθείας που ενώνει το κέντρο της Γης με το σφαιρίδιο, τότε, κατά μεν τον κατακόρυφο άξονα του σχήματος έχουμε συνθήκη ισορροπίας

$$mg\sin\theta = T\sin(\theta+\varphi), \qquad (1)$$

κατά δε τον οριζόντιο άξονα του σχήματος η κεντρομόλος δύναμη θα είναι

$$mg\cos\theta - T\cos(\theta+\varphi) = m\frac{\upsilon^2}{r} \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) και αντικαθιστώντας $r = R\cos\theta$

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta - \dfrac{m\upsilon^2}{R\cos\theta}} \Rightarrow \theta+\varphi = \arctan\left\{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \dfrac{\upsilon^2}{gR}}\right\}, \text{ αλλά } \upsilon^2 = \left(\frac{2\pi R}{T_{ΓΗ}}\cos\theta\right)^2$$

και, τελικά: $\boxed{\varphi = \arctan\left\{\left(1-\dfrac{4\pi^2 R}{T_{ΓΗ}^2 g}\right)^{-1}\tan\theta\right\} - \theta}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές R και $T_{ΓΗ}$, παίρνουμε : $\boxed{\varphi = \arctan\left\{\left(1+3.4\times10^{-3}\right)\tan\theta\right\} - \theta}$

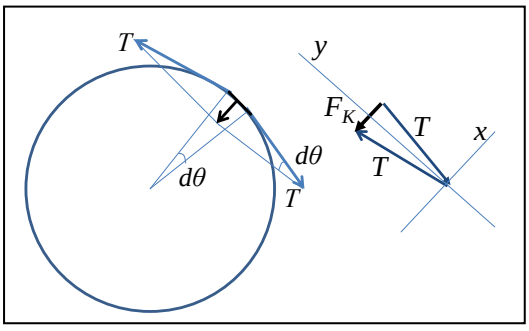
Περιπτώσεις:

$(a)\quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$

$(\beta)\quad \theta = 90^o \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\{\infty\} - 90^o = 90^o - 90^o = 0$

$(\gamma)\quad \theta = 45^o \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left\{\left(1+3.4\times10^{-3}\right)\tan 45^o\right\} - 45^o = 0.097^o = 0^o5'49''$

Ανάλυση με ισοδύναμα αποτελέσματα θα μπορούσε να γίνει με σύστημα αναφοράς την Γη. Σε αυτή την περίπτωση, όπως θα δούμε στην Ενότητα των «Μη-αδρανειακών Συστημάτων Αναφοράς», θα πρέπει να εισάγει κανείς, στην ανάλυση, τις κατάλληλες «ψευδοδυνάμεις», ή, «αδρανειακές» δυνάμεις.



Παράδειγμα 2.2.17 Σχοινί με συνολική μάζα m έχει σχηματίσει κυκλική θηλιά και περιστρέφεται (π.χ., ένα λάσο), με ταχύτητα υ, σχηματίζοντας κύκλο ακτίνας R. Να υπολογιστεί η τάση του σχοινιού.

Μελετάμε την δυναμική ενός διαφορικού τμήματος του σχοινιού, το οποίο αντιστοιχεί σε γωνία $d\theta$.

Το τμήμα αυτό έχει μάζα $dm = \dfrac{m}{2\pi R}(Rd\theta) = \dfrac{m}{2\pi}d\theta$ και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα υ. Η σύνθεση των δύο τάσεων μέτρου T που ασκούνται στα άκρα του, από τα γειτονικά τμήματα του σχοινιού, θα πρέπει να αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη για την περιστροφή του. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με δύο (ισοδύναμους) τρόπους:

(α) Από το μικρό δυναμο-τρίγωνο: $F_K = Td\theta$, [Η F_K αποτελεί το "τόξο" ενός γωνιακού τομέα που γράφεται με "ακτίνα" μέτρου T και αντιστοιχεί σε γωνία $d\theta$. Η γωνία $d\theta$ συμπίπτει με εκείνη που βλέπει στο διαφορικό τμήμα του νήματος, διότι οι πλευρές τους είναι κάθετες μεταξύ τους (σχέση ακτίνας και εφαπτόμενης)]

(β) Αναλύοντας στο τοπικό σύστημα (x, y) που φαίνεται στο σχήμα,

$$F_K = F_{x,ολ} = 2T_x = 2\left(T\sin\left(d\theta/2\right)\right) \simeq 2\left(T\left(d\theta/2\right)\right) = Td\theta : \text{κεντρομόλος δύναμη}$$

$$F_y = F_{y,ολ} = T\cos\left(d\theta/2\right) - T\cos\left(d\theta/2\right) = 0 : \text{μηδενική επιτρόχια δύναμη (και επιτάχυνση)}$$

Από ομαλή κυκλική κίνηση: $(dm)\dfrac{\upsilon^2}{R} = Td\theta \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{m}{2\pi}d\theta\right)\dfrac{\upsilon^2}{R} = Td\theta \;\Rightarrow\; \boxed{T = \dfrac{m}{2\pi}\dfrac{\upsilon^2}{R}}$

Αν εισάγουμε το μέγεθος της γραμμικής πυκνότητας μάζας $\rho \equiv \dfrac{dm}{dl} = \dfrac{m}{2\pi R}$, η τελευταία σχέση γράφεται: $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$, (που, όπως θα διαπιστώσετε στα μαθήματα κυματικής, είναι και η ταχύτητα διάδοσης μιας διαταραχής σε χορδή με γραμμική πυκνότητα ρ και τάση Τ).

Επομένως, αν δημιουργούσαμε στην περιστρεφόμενη χορδή, μία διαταραχή, αυτή θα είχε ως αποτέλεσμα η «μισή» διαταραχή να διαδοθεί αριστερόστροφα και η άλλη «μισή» δεξιόστροφα, με ταχύτητα $c = \sqrt{T/\rho}$, ως προς το σύστημα ηρεμίας της χορδής.

Άρα, ως προς το σύστημα αναφοράς, στο οποίο η χορδή περιστρέφεται, κατά τη μία φορά, με ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$, η «μισή» διατραχή θα φαίνεται στάσιμη και η άλλη «μισή» θα οδεύει με διπλάσια ταχύτητα από την ταχύτητα περιστροφής της χορδής.

Παράδειγμα 2.2.18. Ομοιογενής (δηλαδή σταθερής πυκνότητας), μη εκτατή αλυσίδα μήκους *L* και μάζας *m* είναι τοποθετημένη έτσι ώστε ένα τμήμα της μήκους $x_0 > 0$ να κρέμεται από την άκρη ενός οριζόντιου τραπεζιού, ενώ το υπόλοιπο είναι απλωμένο σε ευθεία γραμμή στην επιφάνεια του τραπεζιού. Ο συντελεστής τριβής (στατικής και δυναμικής) μεταξύ αλυσίδας και τραπεζιού είναι μ. Το σύστημα βρίσκεται μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας *g*.

(α) Γράψτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το μήκος x_0 ώστε η αλυσίδα να παραμένει ακίνητη.

(β) Στην περίπτωση που το x_0 είναι τέτοιο ώστε η αλυσίδα να κινείται, να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν το μήκος *x* της αλυσίδας που κρέμεται, ως προ τον χρόνο, $x = x(t)$, και η ταχύτητα του κάτω άκρου $\upsilon = \upsilon(x)$ ως συνάρτηση του *x*.

(γ) Αν, τη χρονική στιγμή t = 0 η αλυσίδα απελευθερώνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα και το x_0 εκείνη τη στιγμή είναι τέτοιο ώστε η αλυσίδα να μπορεί να κινηθεί, βρείτε την ταχύτητα $\upsilon = \upsilon(x)$ για $x > x_0$ και $t > 0$.

(α) Συνθήκη ακινησίας: $T_{L-x_0} = B_{x_0}$, αλλά

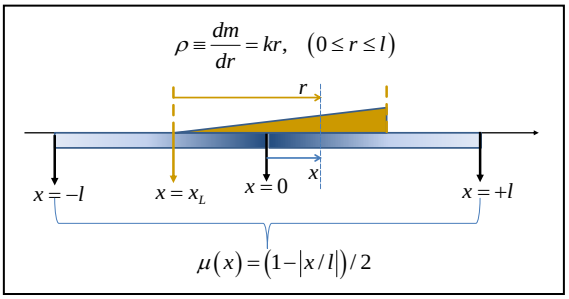
$$\left.\begin{aligned} B_{x_0} &= m\frac{x_0}{L}g \\ T_{L-x_0} &\le \mu m\frac{L-x_0}{L}g \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\frac{x_0}{L}g \le \mu m\frac{L-x_0}{L}g \Rightarrow x_0 \le \mu(L-x_0) \Rightarrow \boxed{x_0 \le \frac{\mu}{(1+\mu)}L}$$

(β) $$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{x}{L}g - \mu m\frac{L-x}{L}g \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x}{L}(1+\mu)g - \mu g}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{x}{L}(1+\mu)g-\mu g \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{x}{L}(1+\mu)g-\mu g \Rightarrow \boxed{\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{x}{L}(1+\mu)g-\mu g}$$

(γ) $$\upsilon d\upsilon=\frac{xdx}{L}(1+\mu)g-\mu g dx \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=\frac{(1+\mu)g}{L}\int_{x_0}^{x}xdx-\mu g\int_{x_0}^{x}dx$$

$$\frac{\upsilon^2}{2}=\frac{(1+\mu)g}{2L}\left(x^2-x_0^2\right)-\mu g\left(x-x_0\right),\ \upsilon(x)=\sqrt{\frac{(1+\mu)g}{L}\left(x^2-x_0^2\right)-2\mu g\left(x-x_0\right)}$$



Παράδειγμα 2.2.19 Ευθύγραμμη δοκός με γραμμική πυκνότητα $\rho\equiv\frac{dm}{dr}=kr,\quad(0\le r\le l)$, (όπου το r μετράται από το αριστερό άκρο της δοκού), μπορεί να μετακινείται μέσα σε οριζόντιο ευθύγραμμο κανάλι που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα-x. Η κάτω επιφάνεια της δοκού έχει ίδια τραχύτητα σε όλο το μήκος της δοκού. Αντίθετα, η τραχύτητα του καναλιού είναι μεταβλητή έτσι ώστε ο συντελεστής τριβής, ανάμεσα στην κάτω επιφάνεια της δοκού και στην επιφάνεια του καναλιού, εξαρτάται από τη θέση x στο κανάλι, και παίρνει τιμές $\mu_{\sigma\tau}(x)=\mu_{\kappa\iota\nu}(x)=\mu(x)=(1-|x/l|)/2$, στο διάστημα $(-l\le x\le l)$, και $\mu(x)=0$, οπουδήποτε αλλού.

(α) Υπολογίστε τη συνολική μάζα $m_{o\lambda}$ της δοκού και βρήτε τη σχέση που συνδέει τα k, l, $m_{o\lambda}$.

(β) Γράψτε τη σχέση από την οποία πρέπει να υπολογιστεί (με τη μορφή κατάλληλου ολοκληρώματος) η ελάχιστη οριζόντια δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο δοκό, ώστε να αρχίσει (οριακά) να μετακινείται, όταν το αριστερό της άκρο βρίσκεται στη θέση $x=x_L$, με την προϋπόθεση ότι η ράβδος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή $(-l\le x\le l)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$m_{o\lambda}=\int dm=\int_{r=0}^{r=l}k\,r\,dr \Rightarrow \boxed{m_{o\lambda}=\frac{kl^2}{2}} \quad\Rightarrow\quad k=2m_{o\lambda}/l^2$$

(β) Όταν το αριστερό άκρο της δοκού βρίσκεται στη θέση $x=x_L$, τότε, ένα συγκεκριμένο σημείο της ράβδου που απέχει r απο το αριστερό της άκρο, έχει x-συντεταγμένη $x=x_L+r$. Οπότε, ένα διαφορικό τμήμα έχει μήκος $dx=dr$, μάζα, $dm=\rho(r)dr=\rho(x-x_L)dx$, και η ελάχιστη δύναμη που χρειάζεται, ώστε να αρχίσει (οριακά) να μετακινείται, ίση με την αντίστοιχη μέγιστη στατική τριβή $dF_{\tau\rho}=\mu(x)g\rho(r)dr=\mu(x)g\rho(x-x_L)dx$.

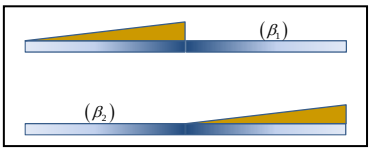
Επομένως, η συνολική δύναμη που χρειάζεται για να μετακινηθεί (οριακά) όλη η δοκός είναι:

$$F_{\tau\rho}=\int dF_{\tau\rho}=\int\mu(x)g\rho(r)dr=\int_{x=x_L}^{x=x_L+l}\mu(x)g\rho(x-x_L)dx$$

Λόγω της διαφορετικής αναλυτικής έκφρασης για τον συντελεστή τριβής, στο κάθε τμήμα του καναλιού, η ολοκλήρωση πρέπει να πραγματοποιηθεί τμηματικά

$$F_{\tau\rho}=gk\int_{x=x_L}^{x=0}\frac{1+(x/l)}{2}(x-x_L)dx+\int_{x=0}^{x=x_L+l}\frac{1-(x/l)}{2}(x-x_L)dx$$

Ως εφαρμογή, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέγιστη στατική τριβή για δύο χαρακτηριστικές θέσεις της δοκού, ως προς τα χαρακτηριστικά τραχύτητας του καναλιού.



(β_1) Στην περίπτωση $x_L = -l$, υπολογίζουμε $F_{\tau\rho} = \dfrac{gkl^2}{6}$

(β_2) Στην περίπτωση $x_L = 0$, υπολογίζουμε $F_{\tau\rho} = \dfrac{gkl^2}{12}$

Η ερμηνεία των δύο αποτελεσμάτων είναι προφανής: στην πρώτη περίπτωση, η μεγάλη μάζα της δοκού βρίσκεται στο τραχύ τμήμα του καναλιού, στη δεύτερη περίπτωση είναι η μικρή μάζα της δοκού που βρίσκεται στο πιό τραχύ τμήμα του καναλιού, με αποτέλεσμα, στη δεύτερη περίπτωση η τριβή να είναι μικρότερη.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>

Θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ότι, εναλλακτικά, θα αρκούσε ο υπολογισμός της θέσης του κέντρου βάρους της ράβδου και, στη συνέχεια, ο υπολογισμός της τριβής θα γινόταν χρησιμοποιώντας το $m_{o\lambda}g$ ως κάθετη δύναμη και την τιμή του συντελεστή τριβής, στη θέση όπου βρίσκεται το κέντρο μάζας της ράβδου, (για κάθε συγκεκριμένη τοποθέτηση της ράβδου). Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αυτό ΔΕΝ είναι σωστό, σε παρόμοιες περιπτώσεις, με ένα απλό παράδειγμα.

Αν θεωρήσουμε μια ομοιογενή ράβδο (με σταθερή γραμμική πυκνότητα σε όλο της το μήκος), τοποθετημένη στην περιοχή $\left(-l/2, +l/2\right)$. Το κέντρο μάζας της ράβδου βρίσκεται στο $x = 0$, λόγω συμμετρίας. Εντούτοις, είναι φανερό ότι η τριβή δεν μπορεί να είναι ίση με $F_{\tau\rho} = \mu_{x=0} m_{o\lambda} g$, διότι όλα τα υπόλοιπα σημεία, πλην του μέσου της ράβδου, βρίσκονται σε περιοχές με μικρότερο συντελεστή τριβής από την τιμή $\mu_{KM} = \mu_{x=0} = 1/2$

Όσον αφορά στην περίπτωση του συγκεκριμένου παραδείγματος, για την οποία η γραμμική πυκνότητα μεταβάλλεται γραμμικά με τη θέση, η θέση του κέντρου μάζας της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση

$$r_{CM} = \left(\int_0^l (dm)\, r\right) / m_{o\lambda} = \left(\int_0^l \rho(r)\, r dr\right) / m_{o\lambda} = \left(\int_0^l (kr)\, r dr\right) / m_{o\lambda} = \frac{k}{m_{o\lambda}} \frac{l^3}{3}$$

Αλλά : $k = 2m_{o\lambda}/l^2 \quad \Rightarrow \quad r_{CM} = \dfrac{k}{m_{o\lambda}} \dfrac{l^3}{3} \Rightarrow \boxed{r_{CM} = \dfrac{2}{3} l}$

Οπότε, αν χρησιμοποιούσαμε αυτό (το λάθος) επιχείρημα, στις δύο περιπτώσεις (β_1) και (β_2) θα πέρναμε, αντίστοιχα: $F_{\tau\rho,\beta_1} = \mu_{\left(-\frac{1}{3}\right)} m_{o\lambda} g = \dfrac{gkl^2}{6}$, $F_{\tau\rho,\beta_2} = \mu_{\left(+\frac{2l}{3}\right)} m_{o\lambda} g = \dfrac{gkl^2}{12}$.

Τα αποτελέσματα είναι τα σωστά επειδή και η γραμμική πυκνότητα της ράβδου αλλά και ο συντελεστής τριβής μεταβάλλονται γραμμικά μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής τους.