Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**

Αθήνα – 2025

Περιεχόμενα

1 Σειρές Πραγματικών Αριθμών 1

1.1 Βασικοί ορισμοί 1

1.1.1 Μερικά παραδείγματα σειρών 2

1.1.2 Δύο βασικά κριτήρια σύγκλισης σειρών. 3

1.1.3 Το κριτήριο των όρων 3

1.1.4 Το κριτήριο Cauchy 4

1.2 Κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους. 4

1.2.1 Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο. 5

1.2.2 Το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy. 7

1.2.3 Κριτήρια Σύγκρισης 8

1.2.4 Το Κριτήριο άμεσης σύγκρισης 8

1.2.5 Το Κριτήριο οριακής σύγκρισης 9

1.2.6 Τα Κριτήρια Λόγου και Ρίζας. 10

1.2.7 Το Κριτήριο Λόγου 10

1.2.8 Το Κριτήριο Ρίζας 12

1.3 Εναλλάσσουσες σειρές 13

1.4 Απόλυτη σύγκλιση σειρών 13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Σειρές Πραγματικών Αριθμών

1.1 Βασικοί ορισμοί

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

ονομάζεται ***μερικό άθροισμα της σειράς*** και η ακολουθία (s_n) που προκύπτει απο αυτά καλείται ***ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς***. Χρησιμοποιώντας το σύμβολο "$\sum$" του αθροίσματος γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Παρατήρηση 1.1.1. Μπορούμε να πάρουμε την ακολουθία (a_n) από την (s_n) αφού $a_1 = s_1$ και για κάθε $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Παρατήρηση 1.1.2. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει από το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ (ή ακόμη και από άλλους φυσικούς αριθμούς πχ. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$). Στην περίπτωση αυτή για τη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

και για τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ \dots$

Ορισμός 1.1.3. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

*(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε το όριο αυτό καλείται **όριο** (ή **άθροισμα**) της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και στην περίπτωση αυτή γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

*Όταν το όριο s της σειράς είναι πραγματικός αριθμός θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στο $s \in \mathbb{R}$ ή ότι η σειρά είναι **συγκλίνουσα**. Όταν το όριο της σειράς είναι το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) τότε θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$). Μια σειρά που δεν είναι συγκλίνουσα (δηλαδή το όριό της είτε δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$) θα καλείται **αποκλίνουσα** σειρά. Ειδικότερα, αν όριό της δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η σειρά **ταλαντώνεται**.*

Παράδειγμα 1.1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+\dots$ είναι ένα παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς που ταλαντώνεται. Πράγματι, έχουμε $s_{2n} = 0 \to 0$ και $s_{2n-1} = -1 \to -1$ και συνεπώς το όριο της (s_n) δεν υπάρχει (διότι αν υπήρχε τότε οι υπακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) θα συνέκλιναν στο ίδιο όριο).

1.1.1 Μερικά παραδείγματα σειρών

1) Η ***γεωμετρική σειρά***

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + a\lambda^3 + \dots$$

όπου $a \neq 0, \lambda$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Όπως θα δούμε η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $\lambda \in (-1,1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \frac{a}{1-\lambda}$$

Πχ.

$$0,3333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η ***αρμονική σειρά***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Γενικότερα, έχουμε τις p-***αρμονικές σειρές***,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Θα δούμε ότι η p-αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$.

4) Οι ***εναλλάσσουσες σειρές*** είναι οι σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η *εναλλάσσουσα αρμονική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

1.1.2 Δύο βασικά κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Υπενθυμίζουμε ότι όταν λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει* εννοούμε ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, όπου $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

1.1.3 Το κριτήριο των όρων

Το πρώτο πράγμα που βλέπουμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι οι όροι της, δηλαδή η ακολουθία (a_n). Επειδή

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

έπεται άμεσα ότι αν $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε στο εξής

Θεώρημα 1.1.5. ***(Κριτήριο Όρων)*** *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ισοδύναμα, αν η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.1.6. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ (αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$).

Πρόταση 1.1.7. *Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = a + a\lambda + a\lambda^2 + \dots$ συγκλίνει μόνο για $\lambda \in (-1,1)$ και στην περίπτωση αυτή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n = \frac{a}{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a\lambda^n$ συγκλίνει τότε απο το Θεώρημα 1.1.5 θα πρέπει $\lim_{n\to+\infty}(a\lambda^n) = a\lim_{n\to+\infty}\lambda^n = 0$. Επειδή $a \neq 0$ αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty}\lambda^n = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|\lambda| \geq 1$ αφού τότε $|\lambda^n| = |\lambda|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $\lambda \in (-1,1)$ επειδή

$$s_n = a + a\lambda + \cdots + a\lambda^n = a\left(1 + \cdots + \lambda^n\right) = a\frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(a\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\right) = a\frac{1 - \lim_{n\to+\infty}\lambda^{n+1}}{1-\lambda} = \frac{a}{1-\lambda}$$

□

Παρατήρηση 1.1.8. Τονίζουμε ότι το Θεώρημα 1.1.5 ***δεν*** μας λέει ότι αν $a_n \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Πχ. $1/n \to 0$ αλλά όπως έχουμε αναφέρει η αρμονική σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

1.1.4 Το κριτήριο Cauchy

Το δεύτερο γενικό Κριτήριο σύγκλισης σειρών είναι το Κριτήριο Cauchy. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) καλείται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_m - x_n| < \varepsilon$ για όλα τα $m > n \geq n_0$. Ένα σημαντικό θεώρημα στην Ανάλυση είναι ότι *μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy.* Επειδή εξ ορισμού μια σειρά καλείται συγκλίνουσα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι συγκλίνουσα, το Κριτήριο Cauchy για σύγκλιση σειρών αναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 1.1.9. *(**Κριτήριο Cauchy για σειρές**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (s_n) της σειράς είναι Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$|s_m - s_n| = a_{n+1} + \cdots + a_m < \varepsilon$$

για όλα τα $m > n \geq n_0$.

Το Κριτήριο Cauchy είναι χρήσιμο στην απόδειξη άλλων κριτηρίων σύγκλισης σειρών που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια.

Πρόταση 1.1.10. *Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.*

Πρόταση 1.1.11. *Έστω $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς. Παρατηρούμε ότι*

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς δεν είναι Cauchy και άρα από το Θεώρημα 1.1.9 η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

1.2 Κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους.

Οι πρώτες σειρές που μελετάμε είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικά βασικά κριτήρια σύγκλισης τέτοιων σειρών. Είναι εύκολο καταρχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους αποτελούν μια **αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών** αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \geq 0$$

Ως γνωστόν, μια αύξουσα ακολουθία είτε είναι άνω φραγμένη και τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε δεν είναι άνω φραγμένη και τότε αποκλίνει στο $+\infty$. Συνεπώς, αν $a_n \geq 0$ τότε είτε

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in [0, +\infty)$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Με άλλα λόγια πάντα υπάρχει το άθροισμα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους (μπορεί όμως να είναι και το $+\infty$). Έχουμε συνεπώς το εξής.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(1) Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει (σε ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό).

(2) Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

1.2.1 Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.

Ορισμός 1.2.2. *Αν $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq a$, το **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f ορίζεται να είναι το όριο*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

Το παραπάνω όριο πάντα υπάρχει (επειδή η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ είναι αύξουσα όταν η f είναι θετική) μπορεί να είναι όμως και $+\infty$. Στην περίπτωση όπου το $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι ***το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει***. Διαφορετικά λέμε ότι ***αποκλίνει***.

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω $p \geq 1$ και $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(t) = \frac{1}{t^p}.$$

(i) Αν $p = 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = +\infty$$

και άρα το το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει.

(ii) Αν $p > 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt = \frac{1}{p-1}$$

και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$(\ln t)' = 1/t \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

ενώ για κάθε $a \neq -1$,

$$\left(\frac{t^{a+1}}{a+1}\right)' = t^a \Rightarrow \int_1^x t^a\, dt = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-p}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \frac{1}{p-1}$$

αφού λόγω του ότι $p > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-p+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0$. □

Πρόταση 1.2.4. *(Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο) Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση. Έστω $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ συγκλίνει. Ειδικότερα, Ισχύει ότι*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1.2.1}$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φθίνουσα έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και άρα

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq f(k+1)$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq 2$,

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x)\, dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\, dx \geq f(2) + \cdots + f(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x)\, dx \geq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} f(n) \geq \int_1^n f(x)\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1)$$

οπότε

$$\int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\, dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a_n = f(n)$ και παίρνοντας όρια έπεται η (1.2.1). □

Παρατήρηση 1.2.5. (*Προσέγγιση του αθροίσματος* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) Αν $f(x) = 1/x$ τότε η σχέση (1.2.1) δίνει

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

Πρόταση 1.2.6. *Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$, συγκλίνει.*

Απόδειξη. Πράγματι, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t$. Απο τη Πρόταση 1.2.3 έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ αποκλίνει και άρα απο το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Αντίστοιχα, για $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t^p$ και από την Πρόταση 1.2.3 το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\, dt$ συγκλίνει. □

1.2.2 Το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy.

Περνάμε τώρα σε ένα δεύτερο Κριτήριο για σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.

Πρόταση 1.2.7. *(**Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy**) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ συγκλίνει. Ειδικότερα, ισχύει ότι*

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \tag{1.2.2}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την δεξιά ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) + \dots \\
&\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}) + \dots \\
&= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για την αριστερή ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}) + \dots \\
&\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}}) + \dots \\
&= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^k a_{2^{k+1}} + \dots \\
&\geq \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^n}.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.2.8. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο συμπύκνωσης μπορούμε να δώσουμε και μια γρήγορη απόδειξη της μη σύγκλισης της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty$$

Ομοίως μπορούμε να δούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ για $p > 1$ συγκλίνει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

που συγκλίνει αφού είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda = 1/2^{p-1} < 1$

Γενικότερα, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $k \geq 0$ ισχύει ότι

$$\text{η σειρά } \sum_{n=2^k}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά } \sum_{n=k}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \text{ συγκλίνει}$$

Παράδειγμα 1.2.9. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ αποκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

1.2.3 Κριτήρια Σύγκρισης

1.2.4 Το Κριτήριο άμεσης σύγκρισης

Θεώρημα 1.2.10. *Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών με την ιδιότητα ότι υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \geq N_0$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή ισοδύναμα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν $m > n \geq N_0$ τότε από την υπόθεσή μας έπεται ότι

$$|s_m - s_n| = s_m - s_n = a_m + \cdots + a_{n+1} \leq b_m + \cdots + b_{n+1} = \tau_m - \tau_n = |\tau_m - \tau_n|$$

Από την σχέση αυτή έπεται ότι αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Ισοδύναμα αν η (s_n) δεν είναι Cauchy τότε ούτε και η (τ_n) είναι Cauchy. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Cauchy η πρόταση έπεται. □

Παράδειγμα 1.2.11. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή όπως έχουμε πεί και θα εξηγήσουμε στα επόμενα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.12. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $0 < \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, ι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει.

1.2.5 Το Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Θεώρημα 1.2.13. *(**Κριτήριο οριακής σύγκρισης**) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ για $\varepsilon = L/2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \Rightarrow 0 < \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n \tag{1.2.3}$$

Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Από την (1.2.3) έπεται ότι

$$0 < \tau_n < \frac{2}{L} \cdot s_n \tag{1.2.4}$$

και

$$0 < s_n < \frac{3L}{2} \cdot \tau_n. \tag{1.2.5}$$

Έστω τώρα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η (s_n) είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Από την (1.2.4) έπεται ότι η (τ_n) είναι άνω φραγμένη και συνεπώς από την Πρόταση 1.2.1 η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Αντίστοιχα με τον ίδιο συλογισμό και χρησιμοποιώντας την (1.2.5) δείχνουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Παράδειγμα 1.2.14. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.15. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.16. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7} = \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}} = 1$$

Επειδή η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

1.2.6 Τα Κριτήρια Λόγου και Ρίζας.

Το κριτήριο Λόγου (tou D'Alembert) και Ρίζας (του Cauchy) ανάγουν την σύγκλιση μιας σειράς με θετικούς όρους στην μελέτη της ακολουθίας των λόγων $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και αντίστοιχα των n-οστών ριζών $\sqrt[n]{a_n}$. Πρόκειται στην ουσία για δύο κριτήρια σύγκρισης της σειράς με την γεωμετρική σειρά.

1.2.7 Το Κριτήριο Λόγου

Θεώρημα 1.2.17. ***(Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

(1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lambda < 1$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda + \varepsilon < 1$. Αφού $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon \tag{1.2.6}$$

για κάθε $n \geq N_0$. Θέτουμε $\tilde{\lambda} = \lambda + \varepsilon$. Από την (1.2.6) και με επαγωγή έπεται ότι

$$a_{n_0+k} < a_{n_0}\tilde{\lambda}^k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $c = \dfrac{a_{n_0}}{\tilde{\lambda}^{n_0}}$ παίρνουμε ότι

$$a_n \leq c\tilde{\lambda}^n$$

για κάθε $n \geq N_0$. Επειδή $0 < \tilde{\lambda} < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c\tilde{\lambda}^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.1.7) και άρα απο το Κριτήριο σύγκρισης (Θεώρημα 1.2.10) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Έστω $\lambda > 1$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda - \varepsilon > 1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda - \varepsilon > 1$ για κάθε $n \geq N_0$. Συνεπώς,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) είναι τελικά αύξουσα και ειδικότερα, $a_n \geq a_{N_0} > 0$ για κάθε $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν και άρα από το Θεώρημα 1.1.5 η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 1.2.18. Το Κριτήριο Λόγου δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

αλλά, όπως είδαμε απο το Ολοκληρωτικό Κριτήριο, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παράδειγμα 1.2.19. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Παράδειγμα 1.2.20. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

1.2.8 Το Κριτήριο Ρίζας

Περνάμε τώρα στο Κριτήριο Ρίζας.

Θεώρημα 1.2.21. *(Κριτήριο Ρίζας) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$$

(1) Αν $\lambda<1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\lambda>1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lambda<1$ και $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\lambda+\varepsilon<1$. Αφού $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$ υπάρχει $N_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{a_n}\leq\lambda+\varepsilon \tag{1.2.7}$$

για κάθε $n\geq N_0$. Θέτουμε $\tilde{\lambda}+\lambda+\varepsilon$. Από την (1.2.7) έπεται ότι

$$a_n\leq\tilde{\lambda}^n$$

για κάθε $n\geq N_0$. Επειδή $0<\tilde{\lambda}<1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\lambda}^n$ συγκλίνει (Πρόταση 1.1.7) και άρα απο το Κριτήριο Σύγκρισης (Θεώρημα 1.2.10) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Έστω $\lambda>1$ και έστω $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\tilde{\lambda}=\lambda-\varepsilon>1$. Αφού $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda$ υπάρχει $N_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{a_n}\geq\lambda-\varepsilon>1$ για κάθε $n\geq N_0$. Συνεπώς,

$$a_n>1$$

για κάθε $n\geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν και άρα από το Κριτήριο Όρων η σειρά δεν συγκλίνει. □

Παράδειγμα 1.2.22. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{5n+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{5+4/n}=3/5<1.$$

Παρατήρηση 1.2.23. Όπως και το Κριτήριο Λόγου, το Κριτήριο Ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda=1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ έχουμε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}}=1$$

και ομοίως

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παρατήρηση 1.2.24. Είναι γνωστό ότι για μια ακολουθία (a_n) θετικών όρων ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

με την αντίστροφη συνεπαγωγή να μην ισχύει γενικά. Αυτό σημαίνει το Κριτήριο Ρίζας αποφαίνεται όπου αποφαίνεται και το Κριτήριο Λόγου (με τον ίδιο βέβαια τρόπο). Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το Κριτήριο Λόγου δεν αποφαίνεται αλλά το Ρίζας μπορεί να αποφανθεί. Πχ. η σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

συγκλίνει (στο 2). Επειδή $a_{2n-1} = a_{2n} = 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1 \ \text{ ενώ } \ \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1/2$$

και άρα η ακολουθία $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ δεν είναι συγκλίμουσα. Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$ και άρα από το Κριτήριο Ρίζας η σειρά συγκλίνει.

1.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Πόρισμα 1.3.1. *(**Κριτήριο Leibniz**) Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών όρων. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Δίνουμε σύντομα την απόδειξη. Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Παρατηρούμε ότι η (s_{2n}) είναι γνησίως αύξουσα, η (s_{2n-1}) γνησίως φθίνουσα και $s_{2n} < s_{2n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα οι ακολουθίες (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν ως μονότονες και φραγμένες. Επειδή $s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n} \to 0$ οι (s_{2n}) και (s_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο $s \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $s_n \to s$. □

Παράδειγμα 1.3.2. Η *εναλλάσσουσα αρμονική* δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

συγκλίνει αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

Παράδειγμα 1.3.3. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots$ συγκλίνει αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

1.4 Απόλυτη σύγκλιση σειρών

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ για να εξετάσουμε την σύγκλισή της την μετατρέπουμε σε σειρά με μη αρνητικούς όρους αντικαθιστώντας τους όρους της a_n με τα απόλυτά τους $|a_n|$. Αν η προκύπτουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

συγκλίνει τότε θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***συγκλίνει απολύτως***. Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 1.1.9) αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Πρόταση 1.4.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

Απόδειξη. Έστω $\tau_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$ και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m > n$ έχουμε

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_n| = |\tau_m - \tau_n|$$

και άρα αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Άρα από το Κριτήριο Cauchy αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση 1.4.2. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 1.4.1 τα Κριτήρια Λόγου και Ρίζας διατυπώνονται για σειρές με γενικούς όρους ως εξής.

Πρόταση 1.4.3. ***(Γενικό Κριτήριο Λόγου)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$$

(i) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(ii) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Πρόταση 1.4.4. ***(Γενικό Κριτήριο Ρίζας)*** *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

(i) *Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(ii) *Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Παράδειγμα 1.4.5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το Κριτήριο λόγου η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.