
Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών

ΣΗΜΜΥ – ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

6η ενότητα:

Υπολογισιμότητα και Πολυπλοκότητα

Επιμέλεια διαφανειών: Στάθης Ζάχος, Άρης Παγουρτζής

Κεντρικό ζήτημα της επιστήμης υπολογιστών

Τι μπορεί να μηχανοποιηθεί και μάλιστα αποδοτικά;

Ποια προβλήματα μπορούμε να λύσουμε με υπολογιστή και πόσο καλά;

Ποια ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν με υπολογιστή;

- Θα φύγουμε ποτέ από το Μνημόνιο;
- Υπάρχει Θεός;
- Η πρόταση «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» είναι αληθής;
- Ο αριθμός $2^{43112609} - 1$ είναι πρώτος;

Ποια ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν με υπολογιστή;

Προϋποθέσεις:

- Τα δεδομένα εισόδου και εξόδου μπορούν να κωδικοποιηθούν με σύμβολα
- Υπάρχει αυστηρά καθορισμένη σχέση μεταξύ τους

Παράδειγμα: εύρεση ΜΚΔ (gcd)

- Είσοδος: (65, 26) Έξοδος: 13
- Είσοδος: (91, 33) Έξοδος: 1

Υπολογιστικά προβλήματα

Τυπικά περιγράφονται με διμελείς σχέσεις (απεικονίσεις) μεταξύ συμβολοσειρών

Άλλα παραδείγματα:

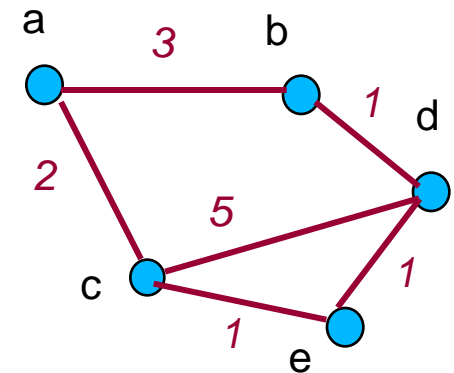
■ Αναγνώριση πρώτων αριθμών

□ $2^{43112609} - 1 \rightarrow \text{«ναι»}$

□ $129 \rightarrow \text{«όχι»}$

■ Συντομότερα μονοπάτια

□ $((\{a,b\},3), (\{a,c\},2), (\{b,d\},1), (\{c,d\},5),$
 $(\{c,e\},1), (\{d,e\},1), a, d) \rightarrow$



Υπολογιστικά προβλήματα

Τυπικά περιγράφονται με διμελείς σχέσεις (απεικονίσεις) μεταξύ συμβολοσειρών.

Άλλα παραδείγματα:

■ Αναγνώριση πρώτων αριθμών

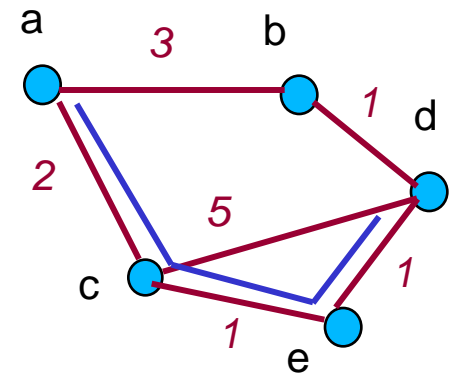
□ $2^{43112609} - 1 \rightarrow \text{«ναι»}$

□ $129 \rightarrow \text{«όχι»}$

■ Συντομότερα μονοπάτια

□ $((\{a,b\},3), (\{a,c\},2), (\{b,d\},1), (\{c,d\},5),$

$(\{c,e\},1), (\{d,e\},1), a, d) \rightarrow (a,c,e,d) \text{ ή } (a,b,d)$



Υπολογιστικά προβλήματα (συν.)

Εμφανίζονται σε:

- **Internet** (δρομολόγηση, συμφόρηση, θεωρία παιγνίων, ανάθεση πόρων, αναζήτηση)
- **Βιολογία** (αναδίπλωση πρωτεϊνών, γονιδίωμα, εξέλιξη)
- **Κρυπτογραφία** (ασφάλεια, μυστικότητα, ηλεκτρονικές υπογραφές, ψηφοφορίες)
-

Αποτελέσματα - σταθμοί



- Gödel (1931), Church(1936), Turing (1936): **δεν μπορούν να επιλυθούν όλα** τα υπολογιστικά προβλήματα με υπολογιστή
 - **Πρόβλημα Τερματισμού** (Halting Problem)
- Cook (1971), Karp (1972): από αυτά που επιλύονται, πολλά **δεν μπορούν να επιλυθούν καλά**
 - **Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή** (Traveling Salesperson Problem, TSP)

Υπολογισιμότητα - Πολυπλοκότητα

- **Υπολογισιμότητα** (Computability): *ποιά* υπολογιστικά προβλήματα μπορούμε να λύσουμε;
- **Υπολογιστική πολυπλοκότητα** (Computational Complexity): *πόσο καλά* μπορούμε να τα λύσουμε;
 - ως προς το **χρόνο**
 - ως προς το **χώρο/μνήμη**
 - ως προς την **κατανάλωση ενέργειας**
 - ως προς **bandwidth**
 - ...

Υπολογισιμότητα: το Πρόβλημα Τερματισμού

- Πρόβλημα Τερματισμού (Halting Problem):

Δίνεται πρόγραμμα και είσοδος. Σταματάει το πρόγραμμα για αυτή την είσοδο (ή "τρέχει" επ' άπειρον);

- Μια ισοδύναμη παραλλαγή είναι:

Δίνεται πρόγραμμα χωρίς είσοδο. Σταματάει;



Πρόβλημα Τερματισμού: μια ειδική περίπτωση

- Έστω το πρόγραμμα

```
while  $x \neq 1$  do
```

```
    if (x is even) then  $x = x/2$  else  $x = 3 * x + 1$ 
```

- Πρόβλημα του Collatz (Ulam):

Δίνεται φυσικός αριθμός x . Σταματάει το παραπάνω πρόγραμμα για είσοδο x ;

- Παράδειγμα: $7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52$
 $\rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16$
 $\rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Πρόβλημα Τερματισμού: μια ειδική περίπτωση (συν.)

```
while  $x \neq 1$  do
```

```
  if (x is even) then  $x = x/2$  else  $x = 3 * x + 1$ 
```

- **Εικασία Collatz:** *το πρόγραμμα σταματάει για κάθε φυσικό αριθμό x .*
- Δεν γνωρίζουμε αν ισχύει η εικασία (ανοικτό ερώτημα) ούτε γνωρίζουμε αν το πρόβλημα Collatz είναι επιλύσιμο από υπολογιστή (αν δηλαδή μπορεί να υπάρχει πρόγραμμα που για είσοδο x να αποφαινεται αν το πρόγραμμα Collatz σταματάει ή όχι).

Πρόβλημα Τερματισμού: μη επιλυσιμότητα

- Πρόβλημα Τερματισμού (Halting Problem):

Δίνεται πρόγραμμα και είσοδος. Σταματάει το πρόγραμμα για αυτή την είσοδο (ή "τρέχει" επ' άπειρον);

Θεώρημα. Το πρόβλημα τερματισμού είναι μη επιλύσιμο. Δηλαδή, δεν υπάρχει πρόγραμμα που να απαντάει σε αυτή την ερώτηση.

Πρόβλημα Τερματισμού: μη επιλυσιμότητα

Απόδειξη (α' τρόπος, με διαγωνιοποίηση):

- Έστω μια απαρίθμηση των προγραμμάτων Π_0, Π_1, \dots
- Έστω ότι υπάρχει πρόγραμμα T , ώστε για κάθε Π_j, k , $T(\Pi_j, k) = \text{"yes"}$ αν $\Pi_j(k)$ σταματάει, "no" αλλιώς.
- Τότε υπάρχει και πρόγραμμα D που με είσοδο οποιοδήποτε k κάνει το αντίθετο από το $\Pi_k(k)$, δηλ.
 - αν το $\Pi_k(k)$ σταματάει το $D(k)$ "τρέχει" επ' άπειρον
 - αν το $\Pi_k(k)$ "τρέχει" επ' άπειρον το $D(k)$ σταματάει

$D(k)$: `if $T(\Pi_k, k)$ ="yes" then loop for ever
else stop`

Πρόβλημα Τερματισμού: μη επιλυσιμότητα

Απόδειξη (α' τρόπος, συν.): έστω ότι το D είναι το Π_n

$\Pi_n(k)$: **if** $T(\Pi_k, k)$ ="yes" **then** loop for ever
else stop

- Τι κάνει το $\Pi_n(n)$;
 - Αν $T(\Pi_n, n)$ ="yes" (δηλ. $\Pi_n(n)$ σταματάει) τότε $\Pi_n(n)$ τρέχει επ' άπειρον!
 - Αν $T(\Pi_n, n)$ ="no" (δηλ. $\Pi_n(n)$ τρέχει επ' άπειρον) τότε $\Pi_n(n)$ σταματάει!!
- **ΑΤΟΠΟ**: η μόνη υπόθεση που κάναμε είναι η ύπαρξη του προγράμματος T, **άρα τέτοιο πρόγραμμα δεν μπορεί να υπάρχει!**

Πρόβλημα Τερματισμού: μη επιλυσιμότητα

Απόδειξη (β' τρόπος, έμμεση διαγωνιοποίηση):

- Έστω ότι υπάρχει πρόγραμμα T , ώστε για κάθε Π, x , $T(\Pi, x) = \text{"yes"}$ αν $\Pi(x)$ σταματάει, "no" αλλιώς.
- Τότε υπάρχει και πρόγραμμα D που με είσοδο οποιοδήποτε Π κάνει το αντίθετο από το $\Pi(\Pi)$, δηλ.
 - αν το $\Pi(\Pi)$ σταματάει το $D(\Pi)$ "τρέχει" επ' άπειρον
 - αν το $\Pi(\Pi)$ "τρέχει" επ' άπειρον το $D(\Pi)$ σταματάει

$D(\Pi)$: `if $T(\Pi, \Pi) = \text{"yes"}$ then loop for ever
else stop`

Πρόβλημα Τερματισμού: μη επιλυσιμότητα

Απόδειξη (β' τρόπος, συν.):

```
D(D): if T(D,D)="yes" then loop for ever
      else stop
```

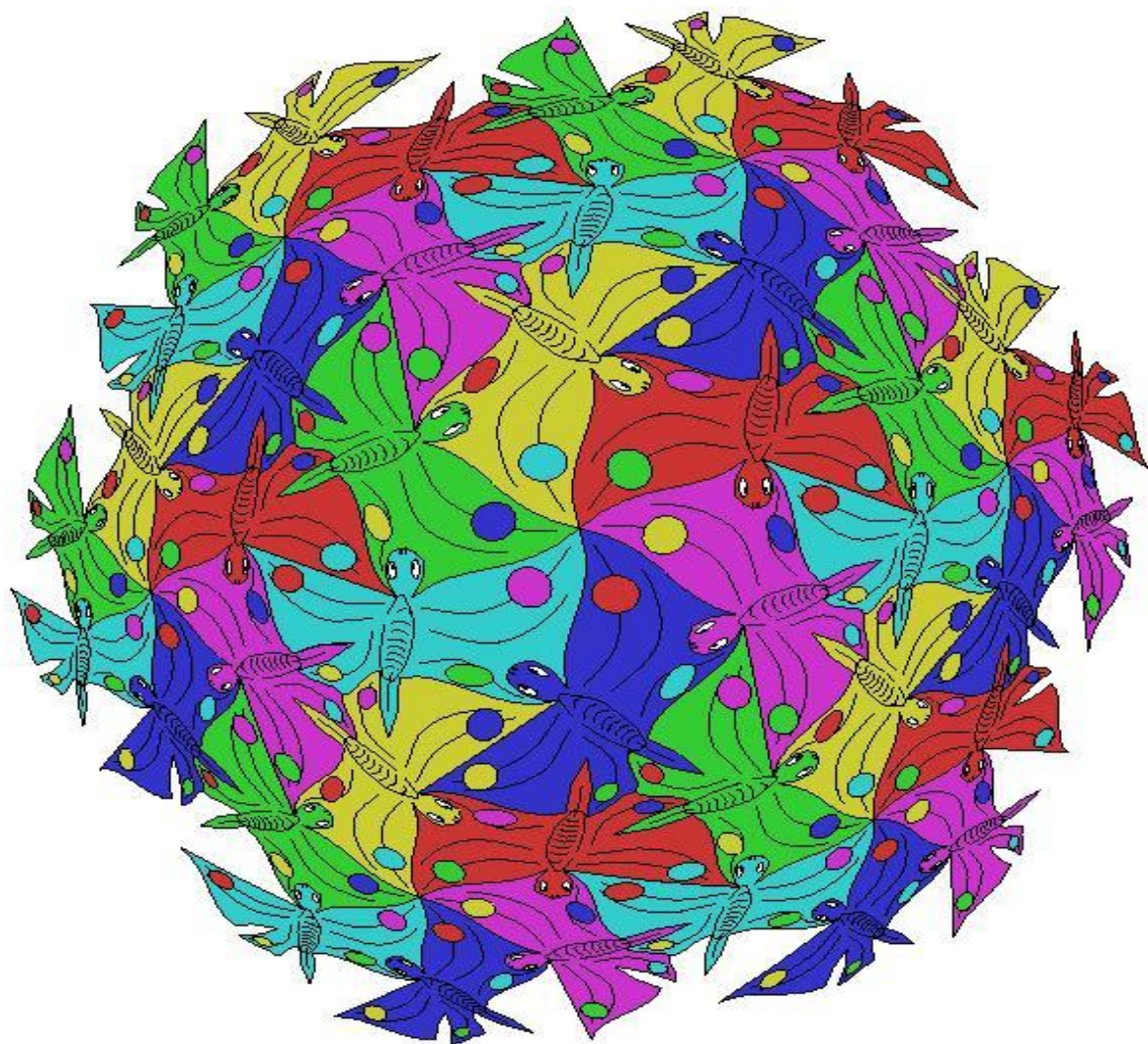
- Τι κάνει το $D(D)$;
 - Αν $T(D,D) = \text{"yes"}$ (δηλ. $D(D)$ σταματάει) τότε $D(D)$ τρέχει επ' άπειρον!
 - Αν $T(D,D) = \text{"no"}$ (δηλ. $D(D)$ τρέχει επ' άπειρον) τότε $D(D)$ σταματάει!!
- **ΑΤΟΠΟ**: η μόνη υπόθεση που κάναμε είναι η ύπαρξη του προγράμματος T , άρα τέτοιο πρόγραμμα δεν μπορεί να υπάρχει!

Πολυπλοκότητα υπολογιστικών προβλημάτων

- Για τα προβλήματα που επιλύονται (solvable, computable, decidable) μας ενδιαφέρει το **πόσο καλά** μπορεί να γίνει αυτό, δηλαδή πόσο γρήγορα, ή με πόση μνήμη, ή με πόσους επεξεργαστές (παραλληλία), ή με πόση κατανάλωση ενέργειας (sensor networks), κ.λπ.
- Αυτό λέγεται **(υπολογιστική) πολυπλοκότητα**.

Τι είναι πολυπλοκότητα;

- Το 101101011101 είναι πιο πολύπλοκο από το 010101010101
- Τα θηλαστικά είναι πιο πολύπλοκα από τους ιούς.
- Το σκάκι είναι πιο πολύπλοκο από την τρίλιζα.
- Οι επικαλύψεις του Escher είναι πιο πολύπλοκες από τα πλακάκια του μπάνιου.
- Οι πρώτοι αριθμοί είναι πιο πολύπλοκοι από τους περιττούς.



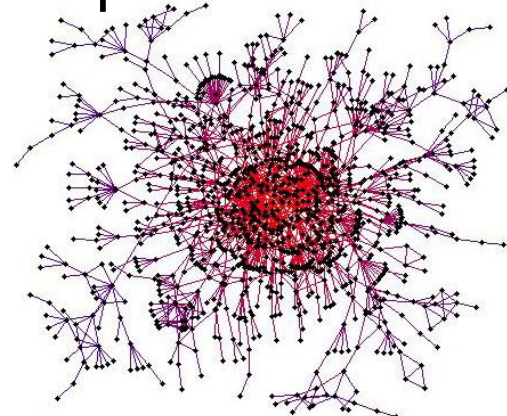
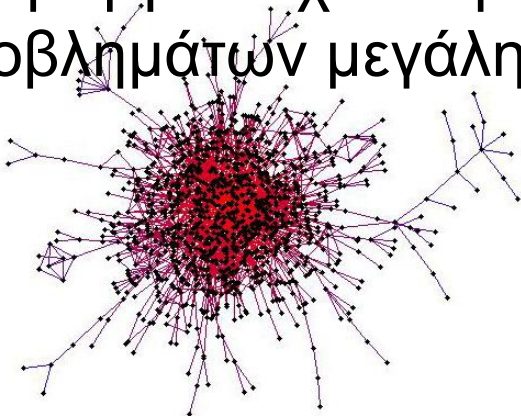
RHW

Τι είναι υπολογιστική πολυπλοκότητα;

- Η δυσκολία του να υπολογίσουμε τη λύση σε ένα πρόβλημα.
- Επιπλέον, ένας τρόπος για να εκφράσουμε μαθηματικά τη διαίσθησή μας ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι πιο πολύπλοκοι από τους περιττούς.
- Το πρόβλημα «Δίνεται x . Είναι πρώτος;» είναι υπολογιστικά πιο δύσκολο από το πρόβλημα «Δίνεται x . Είναι περιττός;»

Η πρόκληση: σύγχρονα δίκτυα και συστήματα

- Πολύπλοκα, πολλές (ετερογενείς) συνιστώσες που αλληλεπιδρούν.
- Διακίνηση τεράστιου όγκου πληροφορίας.
- Ανάγκη για άμεση επεξεργασία δεδομένων και λήψη αποφάσεων.
- Ανάγκη για ταχύτατη επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων μεγάλης κλίμακας.



Καθορισμός πολυπλοκότητας υπολογιστικών προβλημάτων

- **Αλγόριθμοι:** παρέχουν άνω φράγματα
 - ταξινόμηση (με bubblesort): $O(n^2)$
- **Αποδείξεις δυσκολίας:** παρέχουν κάτω φράγματα
 - ταξινόμηση με συγκρίσεις: $\Omega(n \log n)$
 - NP-πληρότητα: ισχυρή ένδειξη απουσίας αποδοτικού αλγορίθμου

*million dollar question!
(Clay Institute
millennium problems)*

Πολυπλοκότητα αλγορίθμου

- Μέτρηση του κόστους του σαν συνάρτηση των υπολογιστικών πόρων που απαιτούνται σε σχέση με το μέγεθος της (αναπαράστασης της) εισόδου:

$$\text{cost}_A(n) = \max \{ \text{κόστος αλγορ. A για είσοδο } x \}$$

για όλες τις εισόδους
x μήκους n

- Παράδειγμα: $\text{time-cost}_{\text{MS}}(n) \leq c n \log n$
(MS = MergeSort, c κάποια σταθερά)

Πολυπλοκότητα αλγορίθμου: απλοποιήσεις

- Συχνά θεωρούμε ως μέγεθος της εισόδου το πλήθος των δεδομένων μόνο (αγνοώντας το μέγεθός τους σε bits). Αυτό δεν δημιουργεί πρόβλημα εφ'όσον ο αλγόριθμος δεν περιέχει πράξεις ή διαδικασίες που να κοστίζουν εκθετικά ως προς το μέγεθος των δεδομένων σε bits.
- Επίσης θεωρούμε ότι κάθε στοιχειώδης αριθμητική πράξη (πρόσθεση, πολ/σμός, σύγκριση) έχει κόστος 1 βήματος. Αυτό λέγεται αριθμητική πολυπλοκότητα (arithmetic complexity) και είναι συνήθως αρκετά ακριβής μέτρηση. Η ανάλυση πολυπλοκότητας σε πλήθος πράξεων ψηφίων λέγεται bit complexity.

Πολυπλοκότητα προβλήματος

- Είναι η πολυπλοκότητα του βέλτιστου αλγορίθμου που λύνει το πρόβλημα.

$$\text{cost}_{\Pi}(n) = \min \{ \text{cost}_A(n) \}$$

για όλους τους αλγορίθμους

A που επιλύουν το Π

- Παράδειγμα: $\text{time-cost}_{\text{SORT}}(n) \leq c n \log n$ [= $O(n \log n)$]
(SORT = πρόβλημα ταξινόμησης)
- Για να δείξουμε *βελτιστότητα αλγορίθμου* χρειάζεται και *απόδειξη αντίστοιχου κάτω φράγματος*.

Πολυπλοκότητα ταξινόμησης: κάτω φράγμα

Οποιοσδήποτε αλγόριθμος ταξινόμησης n αριθμών χρειάζεται $\Omega(n \log n)$ συγκρίσεις:

- Είσοδος (x_1, x_2, \dots, x_n)
- Αρχικά $n!$ περιπτώσεις:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

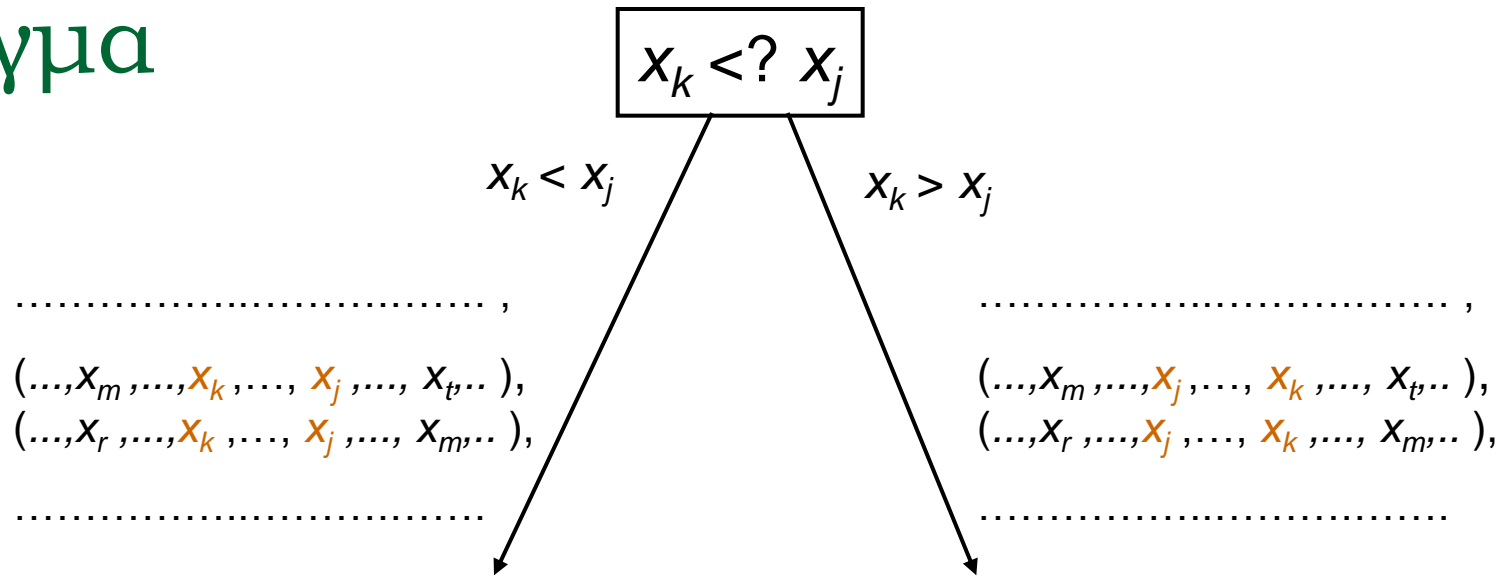
$$x_2 < x_1 < x_3 < \dots < x_n$$

$$x_3 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

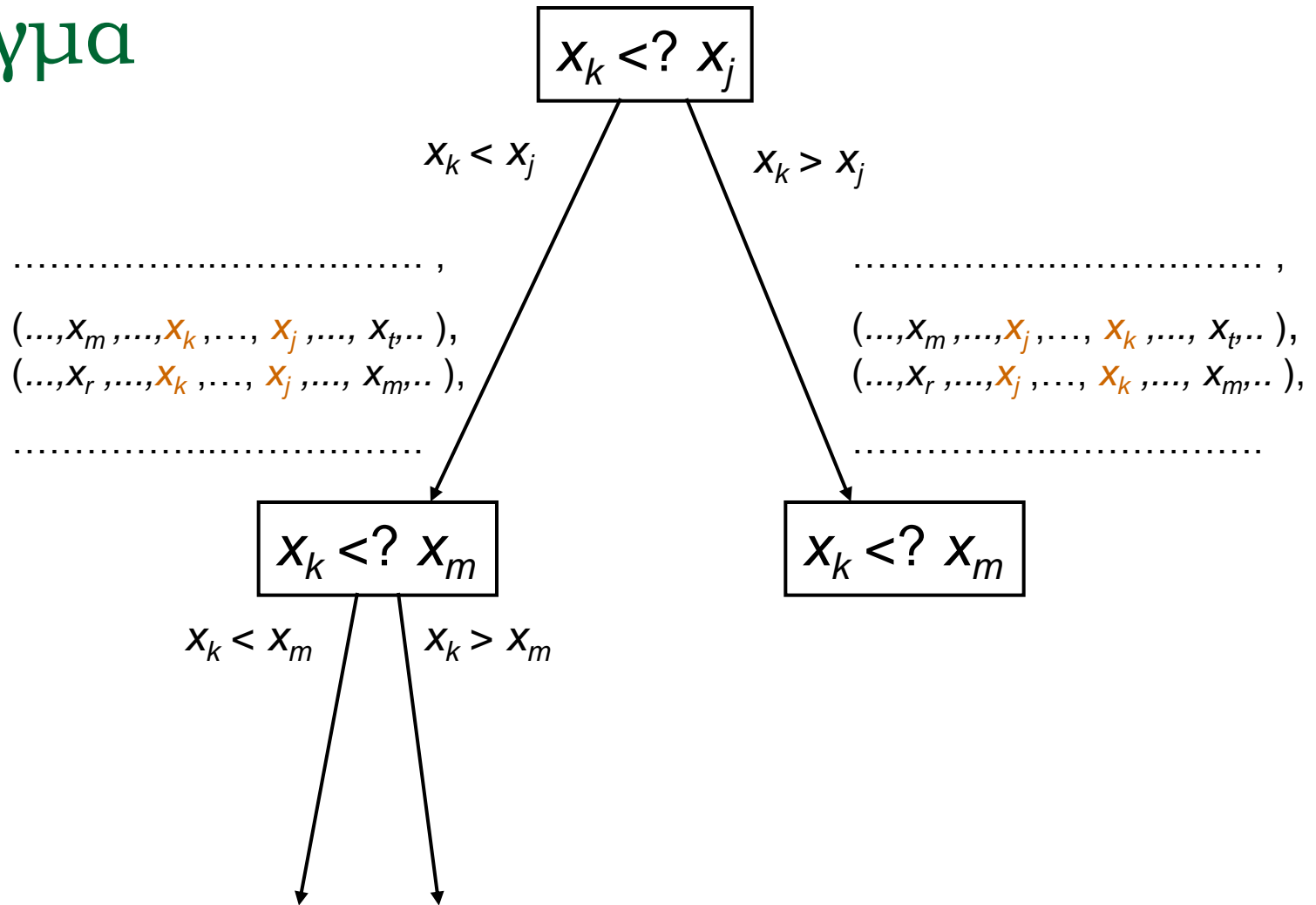
...

- Σε κάθε σύγκριση το πλήθος περιπτώσεων **υποδιπλα/ται** (στην καλύτερη περίπτωση)
- Πλήθος συγκρίσεων: $\geq \log(n!) \geq (n \log n)/4$

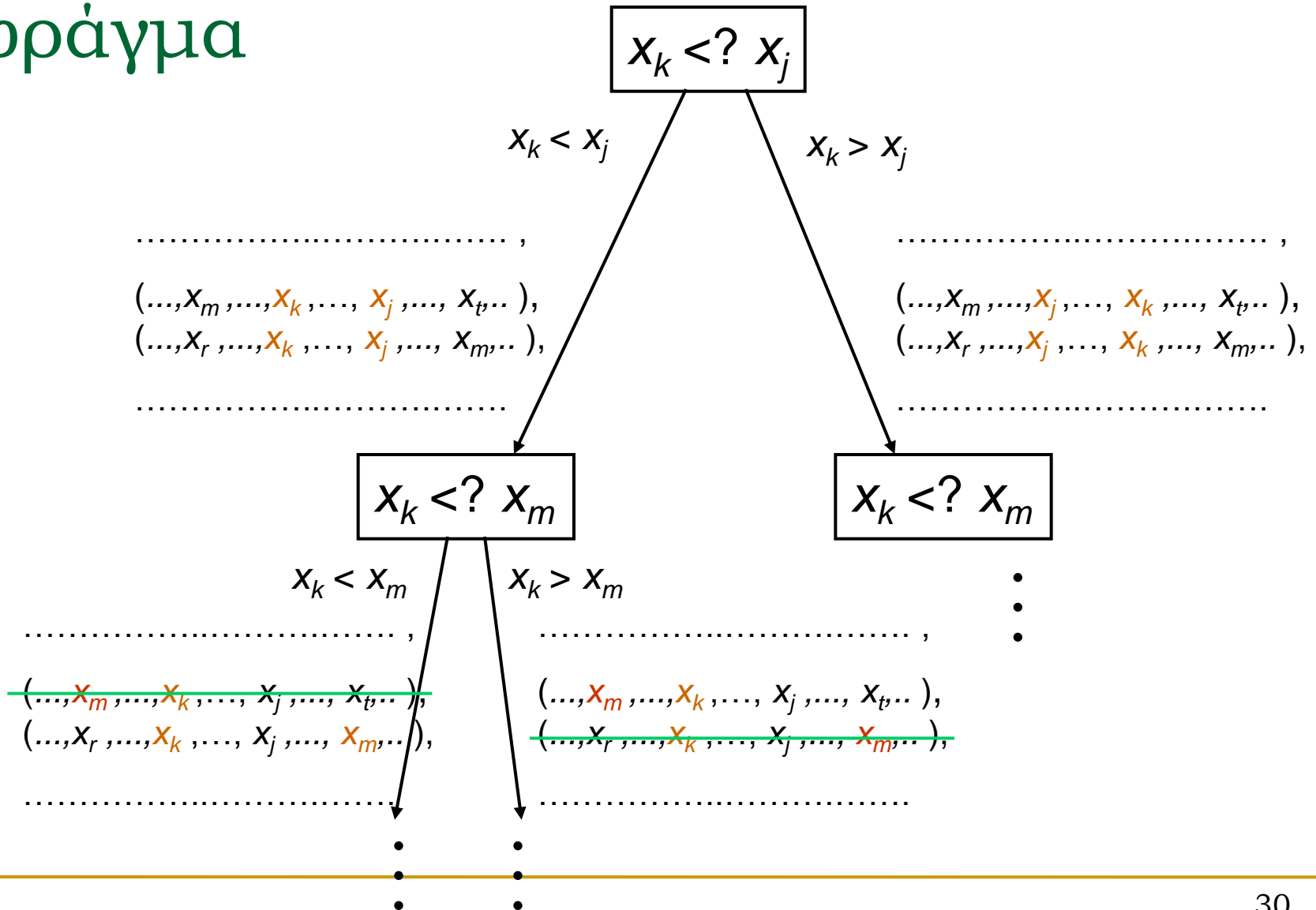
Πολυπλοκότητα ταξινόμησης: κάτω φράγμα



Πολυπλοκότητα ταξινόμησης: κάτω φράγμα



Πολυπλοκότητα ταξινόμησης: κάτω φράγμα



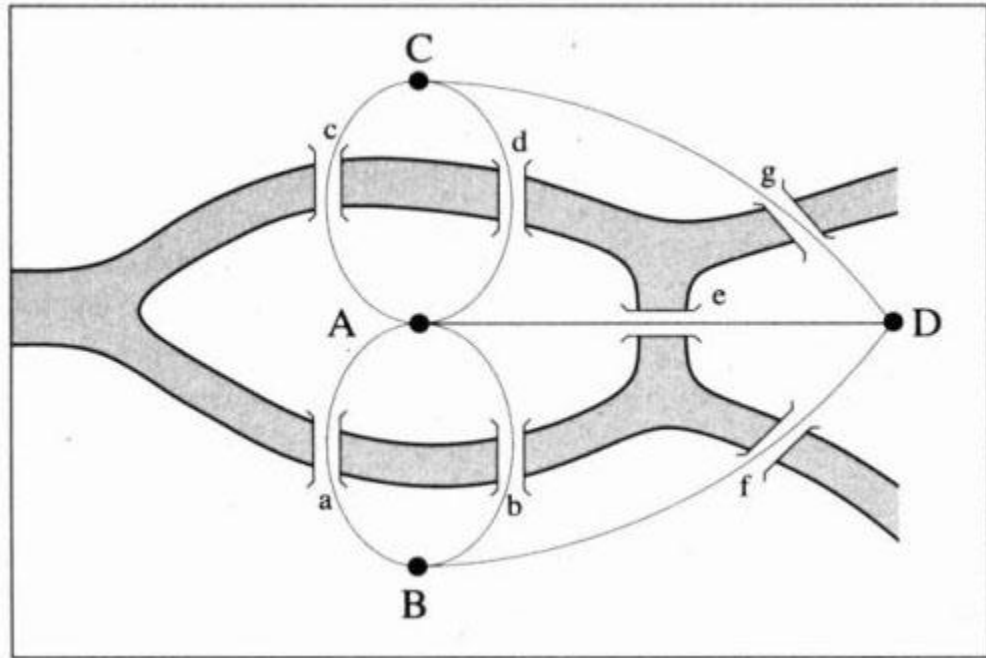
P =? NP

- Τι είναι πιο εύκολο; Να βρείτε τις λύσεις των ασκήσεων ή να τις αντιγράψετε;
- Πόσο πιο δύσκολο είναι να βρούμε κάποια λύση από το να την επαληθεύσουμε;
- Αυτό είναι ουσιαστικά το **P =? NP** πρόβλημα, που αποτελεί το πιο σημαντικό ανοικτό πρόβλημα της Θεωρητικής Πληροφορικής σήμερα.

Στο <http://www.claymath.org> προσφέρονται 1εκ. δολάρια για τη λύση του !

Το πρόβλημα του Euler

Δίνεται γράφος.
Υπάρχει τρόπος
να περάσουμε
από **κάθε ακμή** μια
ακριβώς φορά;



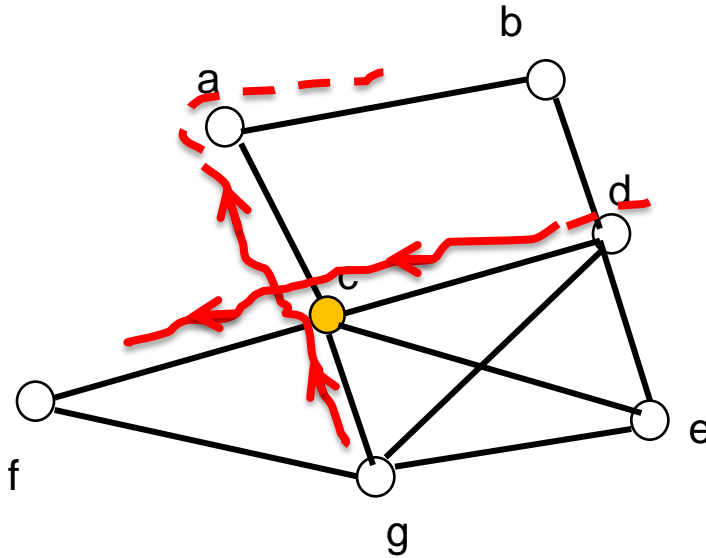
Seven Bridges of Königsberg

Source:

http://physics.weber.edu/carroll/honors_images/BarbasiBridges.jpg

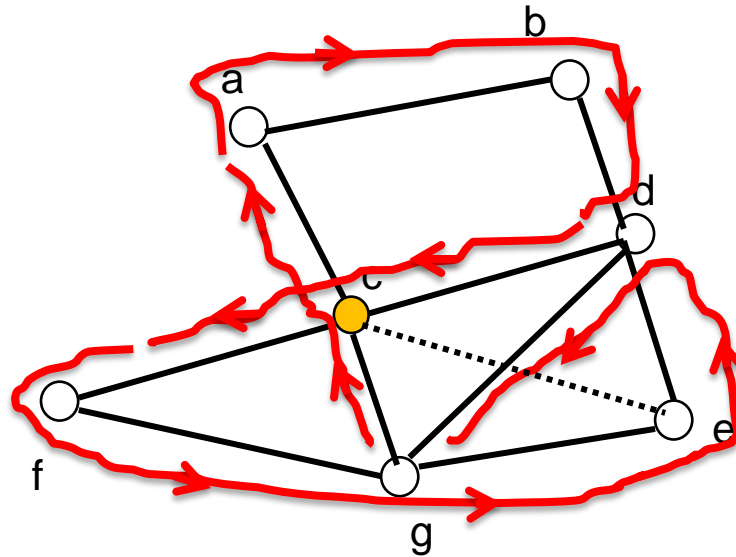
Επίλυση του προβλήματος Euler

- Το πρόβλημα του Euler είναι **ευεπίλυτο**. Η απάντηση είναι 'ναι' αν και μόνο αν *κάθε κόμβος v έχει άρτιο # γειτόνων*



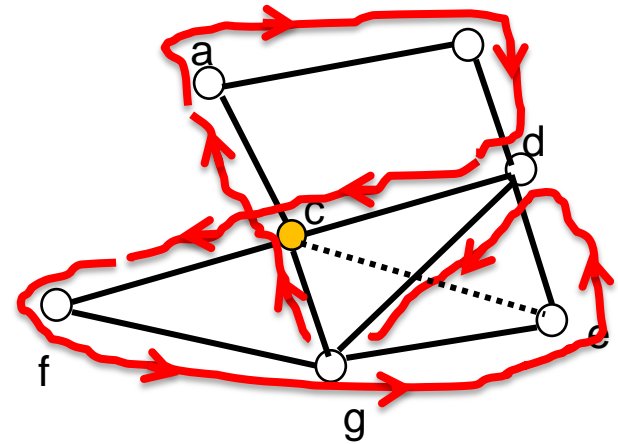
Επίλυση του προβλήματος Euler

- Το πρόβλημα του Euler είναι **ευεπίλυτο**. Η απάντηση είναι 'ναι' αν και μόνο αν **κάθε κόμβος v έχει άρτιο # γειτόνων**



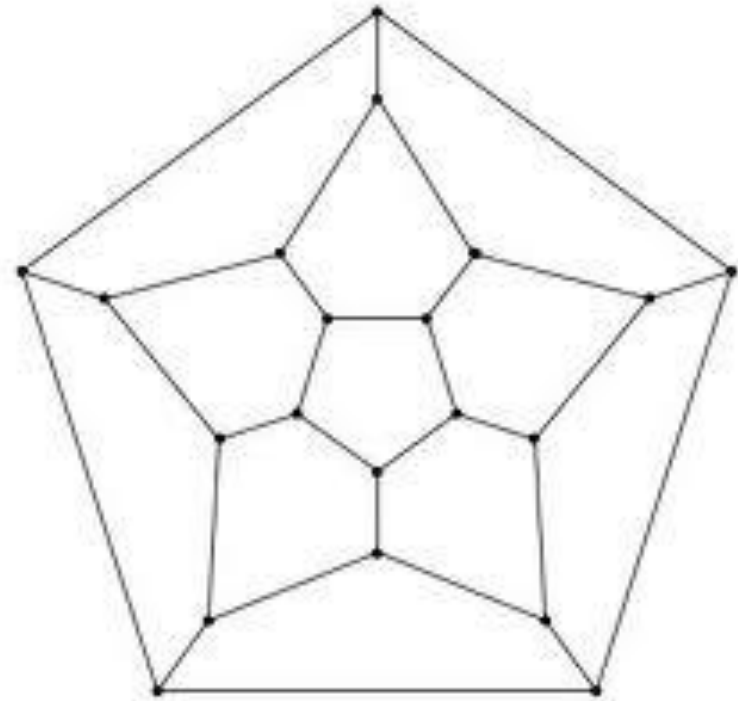
Επίλυση του προβλήματος Euler

- Το πρόβλημα του Euler είναι **ευεπίλυτο**.
- Η απάντηση είναι 'ναι' αν **κάθε κόμβος v έχει άρτιο # γειτόνων**
- Για κάθε γράφο με n κόμβους αρκούν n^2 έλεγχοι: χρόνος *πολυωνυμικός* ως προς το μέγεθος της εισόδου.
- Τέτοια προβλήματα που η επίλυσή τους χρειάζεται χρόνο $O(n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$... λέμε ότι ανήκουν στην **κλάση P** (polynomial time).



Το πρόβλημα του Hamilton

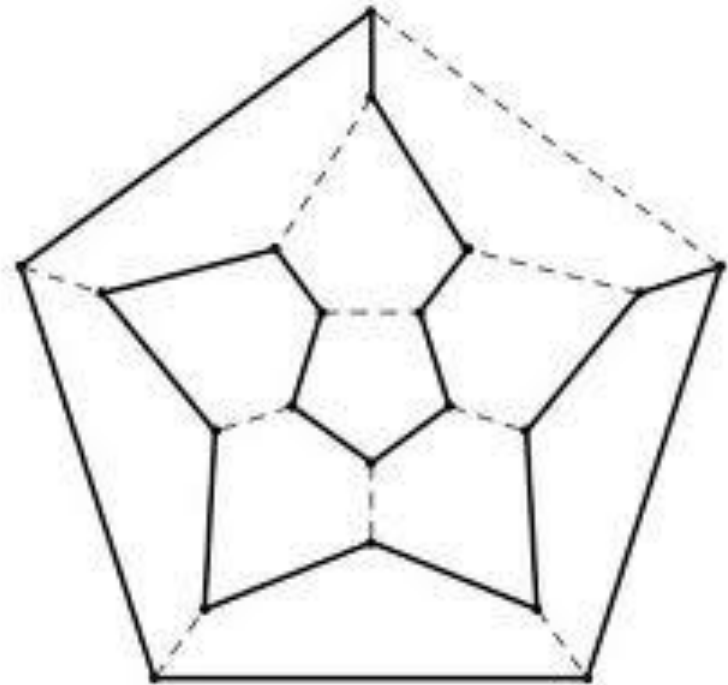
Δίνεται γράφος.
Υπάρχει τρόπος
να περάσουμε
από **κάθε κορυφή**
μια ακριβώς
φορά;



Source:
<http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680/yamaguchi/emat6690/essay1/gt.html>

Το πρόβλημα του Hamilton

Δίνεται γράφος.
Υπάρχει τρόπος
να περάσουμε
από **κάθε κορυφή**
μια ακριβώς
φορά;



Source:
<http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680/yamaguchi/emat6690/essay1/gt.html>

Πολυπλοκότητα προβλήματος Hamilton

- Το πρόβλημα του **Hamilton** είναι πιο **δύσκολο** (**δυσεπίλυτο**). Δεν γνωρίζουμε κανέναν γρήγορο αλγόριθμο γι' αυτό. Ο καλύτερος γνωστός αλγόριθμος δεν διαφέρει ουσιαστικά από το να δοκιμάσουμε όλους τους συνδυασμούς, που είναι πολλοί ($n!$). Αν όμως μας προτείνουν μια λύση, μπορούμε να την **επαληθεύσουμε πολύ γρήγορα**.
- Τέτοια προβλήματα που η επαλήθευση μιας λύσης τους (αν υπάρχει και μας δοθεί) χρειάζεται χρόνο $O(n)$, $O(n^2)$, $O(n^3)$, ..., λέμε ότι ανήκουν στην **κλάση NP** (non-deterministic polynomial time).

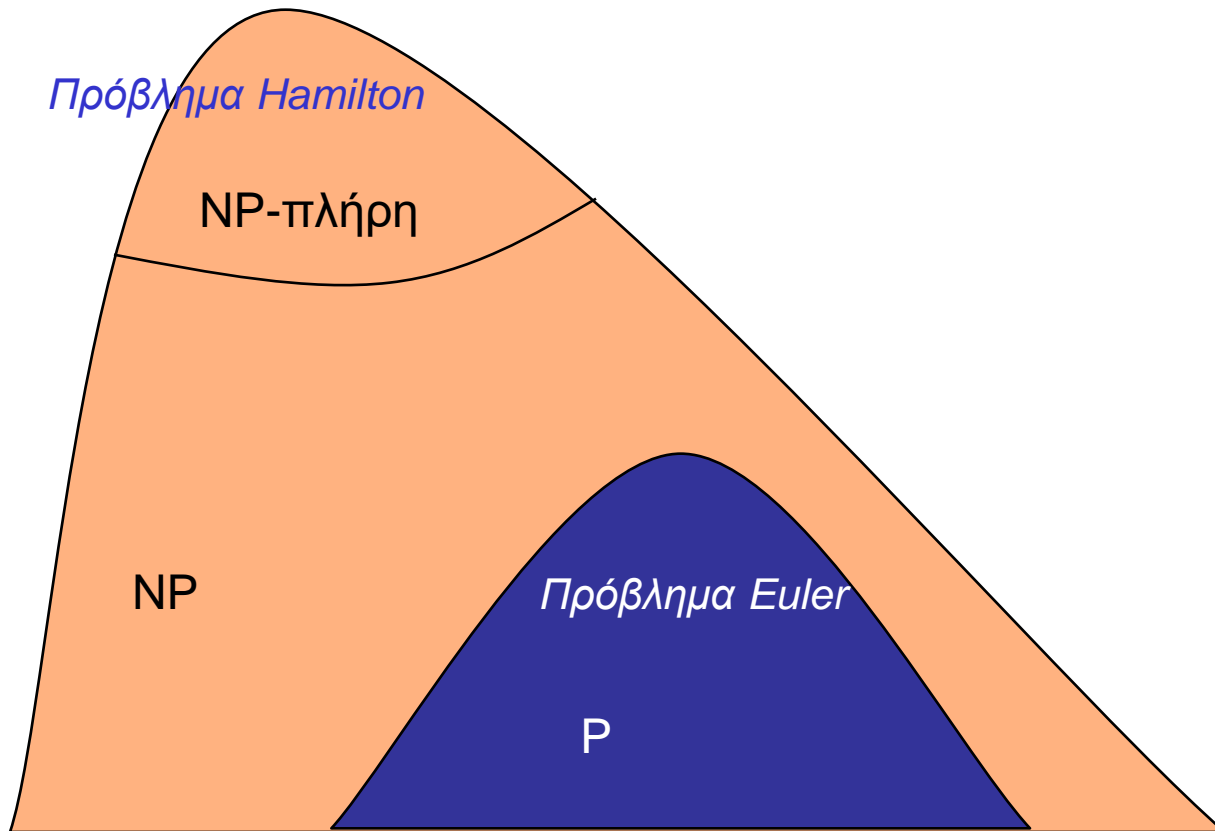
NP-πλήρη προβλήματα

- Το πρόβλημα του Hamilton μπορεί να έχει γρήγορο αλγόριθμο. Δεν πιστεύουμε όμως ότι έχει (κανείς δεν έχει βρει ως τώρα). Ούτε όμως καταφέραμε να αποδείξουμε κάτι τέτοιο.
- Το μόνο που μπορούμε να δείξουμε είναι ότι μια πλειάδα από προβλήματα που μας ενδιαφέρουν είναι της ίδιας δυσκολίας με αυτό.
- Τα προβλήματα που είναι το ίδιο δύσκολα με το πρόβλημα του Hamilton τα λέμε **NP-πλήρη** (NP-complete).

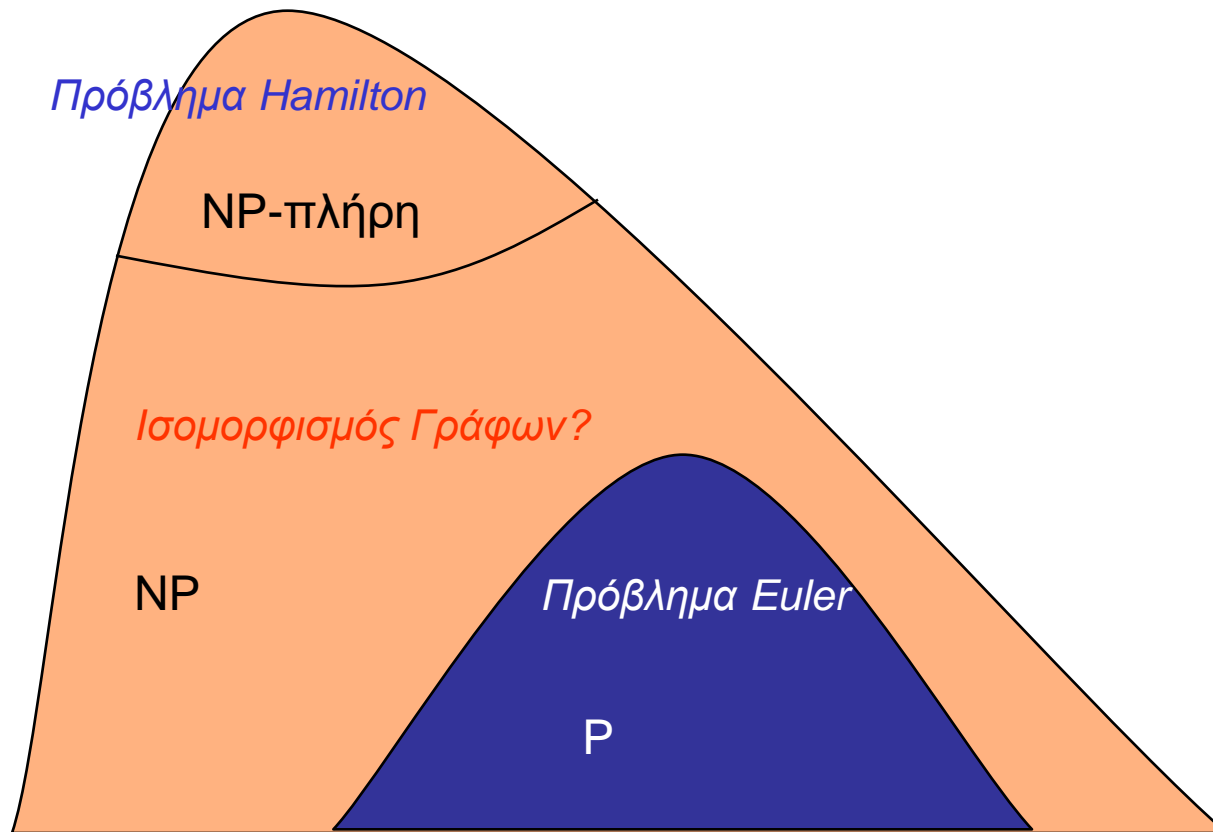
Κλάσεις πολυπλοκότητας

- **P (πολυωνυμικός χρόνος):** Το σύνολο των προβλημάτων που λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Θεωρούνται τα προβλήματα που μπορούμε να λύσουμε στην πράξη.
 - Το πρόβλημα του Euler ανήκει στο P
- **NP (μη ντετερμινιστικός πολυωνυμικός χρόνος):** Το σύνολο των προβλημάτων που μπορούμε να επαληθεύσουμε τη λύση τους (αν μας δοθεί) σε πολυωνυμικό χρόνο.
- **NP-πλήρης:** Το υποσύνολο των πιο δύσκολων προβλημάτων του NP – για κανένα δεν έχει βρεθεί πολυωνυμικός αλγόριθμος. Αν οποιοδήποτε από αυτά τα προβλήματα ανήκει στο P, τότε $P=NP$.
 - Το πρόβλημα του Hamilton είναι NP-πλήρες.

Ο χάρτης των κλάσεων (μέχρι τώρα)



Ο χάρτης των κλάσεων (μέχρι τώρα)



Γιατί θέλουμε πολυωνυμικό χρόνο;

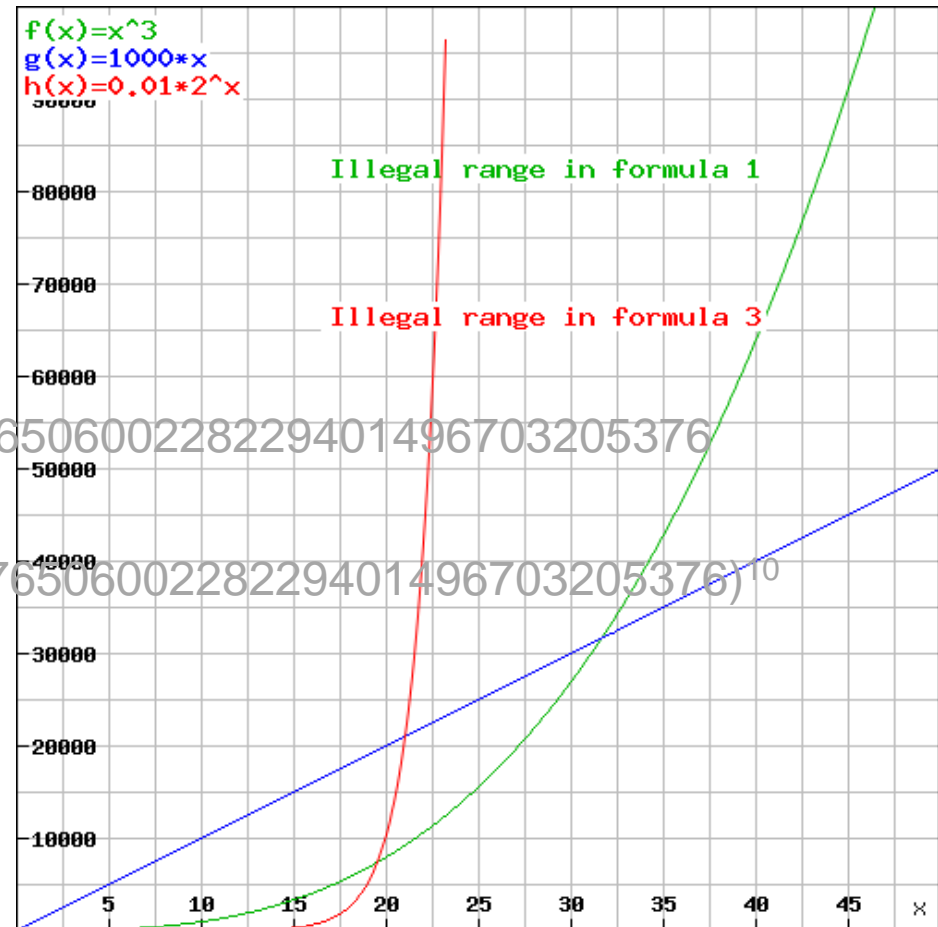
$\log n$	n	n^2	2^n
3.322	10	100	1024
6.644	100	10000	1267650600228229401496703205376
9.966	1000	1000000	$(1267650600228229401496703205376)^{10}$

Ο ρυθμός αύξησης των εκθετικών συναρτήσεων είναι απαγορευτικός για μεγάλα στιγμιότυπα!

Γιατί θέλουμε πολυωνυμικό χρόνο;

$\log n$	n	n^2	2^n
3.322	10	100	1024
6.644	100	10000	1267650600228229401496703205376
9.966	1000	1000000	(1267650600228229401496703205376) ¹⁰

Ο ρυθμός αύξησης των εκθετικών συναρτήσεων είναι απαγορευτικός για μεγάλα στιγμιότυπα!



Αποδείξεις NP-πληρότητας

- Πρόβλημα Πλανόδιου Πωλητή (Traveling Salesperson Problem, TSP)
 - Δίνεται πλήρης γράφος με n κόμβους, οι αποστάσεις μεταξύ τους $d(v_i, v_k)$ και ένας φυσικός αριθμός D .
 - Υπάρχει διαδρομή που να περνάει μία φορά από κάθε κόμβο με συνολικό κόστος $\leq D$;



http://myprojectsdiary.blogspot.com/2005_03_01_archive.html

Αποδείξεις NP-πληρότητας: αναγωγές

- Δοθέντος ενός στιγμιοτύπου (εισόδου) του προβλήματος Hamilton μπορούμε να το *αναγάγουμε* σε στιγμιότυπο του προβλήματος TSP:
 - Μετατρέπουμε τον γράφο σε πλήρη.
 - Στις υπάρχουσες ακμές θέτουμε απόσταση 1, ενώ στις νέες θέτουμε απόσταση 2.
 - Θέτουμε $D=n$.

Αποδείξεις NP-πληρότητας: αναγωγές

- Είναι εύκολο να δούμε ότι η απάντηση για το αρχικό στιγμιότυπο (του προβλήματος Hamilton) είναι «ναι», δηλαδή **υπάρχει κύκλος Hamilton στον αρχικό γράφο, αν και μόνο αν** η απάντηση για το νέο στιγμιότυπο (του προβλήματος TSP) είναι «ναι», δηλαδή **υπάρχει κύκλος κόστους n στον νέο γράφο.**
- Επομένως είναι **μάλλον απίθανο το TSP να λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.**

Άλλα NP-πλήρη προβλήματα

■ Ικανοποιησιμότητα (Satisfiability)

- Δίνεται προτασιακός τύπος Boole $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Υπάρχει ανάθεση αληθοτιμών για τα x_1, \dots, x_n που να ικανοποιεί την φ ;

■ Διαμέριση (Partition)

- Δίνονται ακέραιοι a_1, \dots, a_n . Μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα με ίσα αθροίσματα;

■ Πάρα πολλά άλλα προβλήματα.

Άλλα NP-πλήρη προβλήματα

■ Partition

- Δίνονται ακέραιοι a_1, \dots, a_n μπορούμε να τους διαμερίσουμε σε δύο σύνολα ίσου αθροίσματος;
- Παράδειγμα [Lance Fortnow, *The Golden Ticket: P, NP, and the Search for the Impossible*, 2013]

14175, 15055, 16616, 17495, 18072, 19390, 19731, 22161, 23320, 23717, 26343, 28725, 29127, 32257, 40020, 41867, 43155, 46298, 56734, 57176, 58306, 61848, 65825, 66042, 68634, 69189, 72936, 74287, 74537, 81942, 82027, 82623, 82802, 82988, 90467, 97042, 97507, 99564.

- Μπορείτε να βρείτε τη λύση;
- Κάθε σύνολο θα πρέπει να έχει άθροισμα **1000000**

Ενδιάμεση πολυπλοκότητα;

■ Factoring

Δίνεται σύνθετος αριθμός N , βρείτε την παραγοντοποίησή του:

123018668453011775513049495838496272077285356959533479219732245215172640050726
365751874520219978646938995647494277406384592519255732630345373154826850791702
6122142913461670429214311602221240479274737794080665351419597459856902143413

=

3347807169895689878604416984821269081770479498371376856891
2431388982883793878002287614711652531743087737814467999489

x

3674604366679959042824463379962795263227915816434308764267
6032283815739666511279233373417143396810270092798736308917

Ενδιάμεση πολυπλοκότητα;

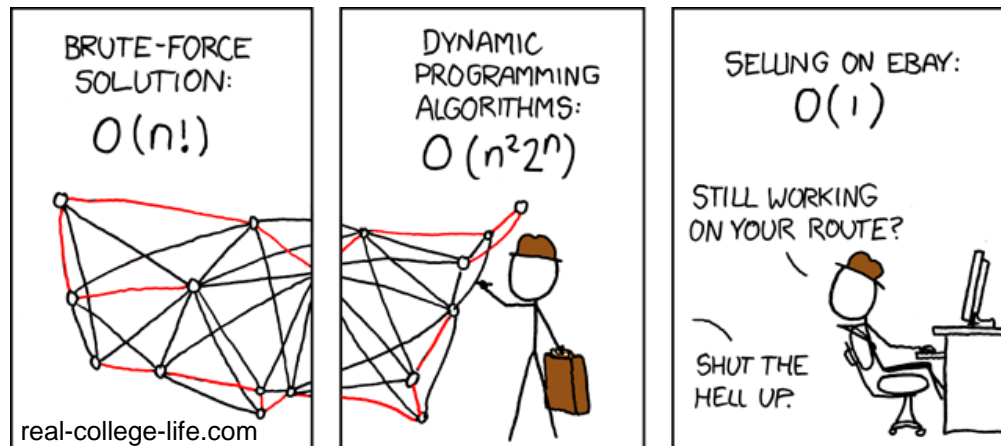
■ Factoring

Δίνεται σύνθετος αριθμός N , βρείτε την παραγοντοποίησή του.

- Ενώ το **Primality** ανήκει στην κλάση **P**, το **Factoring** μάλλον όχι.
- Είναι στην **NP** (γιατί;), αλλά μάλλον όχι **NP-complete**.
- Το **κρυπτοσύστημα RSA**, και πολλά άλλα βασίζονται στη δυσκολία του **Factoring**.

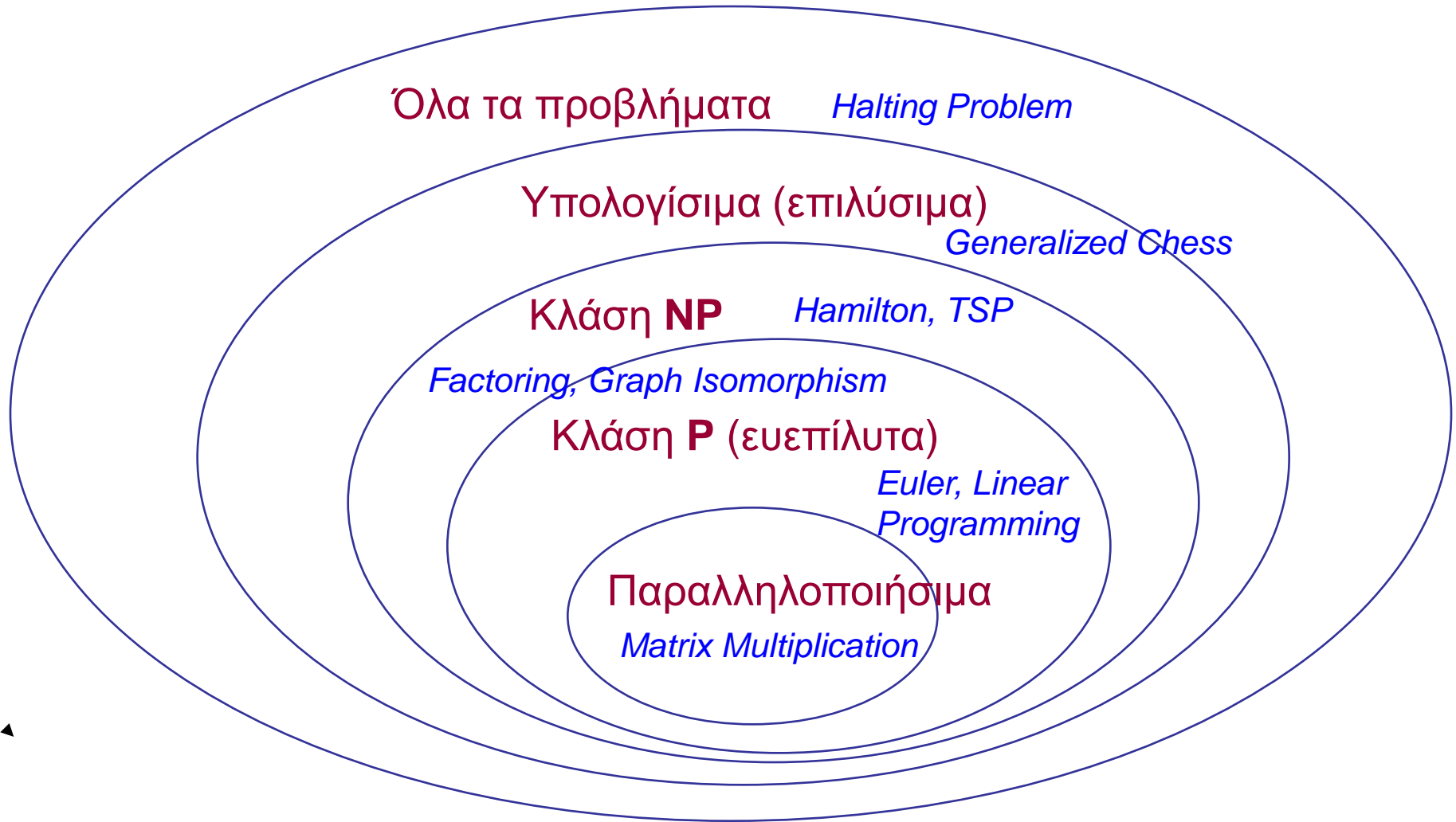
Γιατί ασχολούμαστε με την NP-πληρότητα;

- Γλιτώνουμε την απόλυση (...λέμε τώρα 😊)
- Στροφή σε πιο ρεαλιστικές λύσεις: ειδικές περιπτώσεις, προσεγγιστική επίλυση



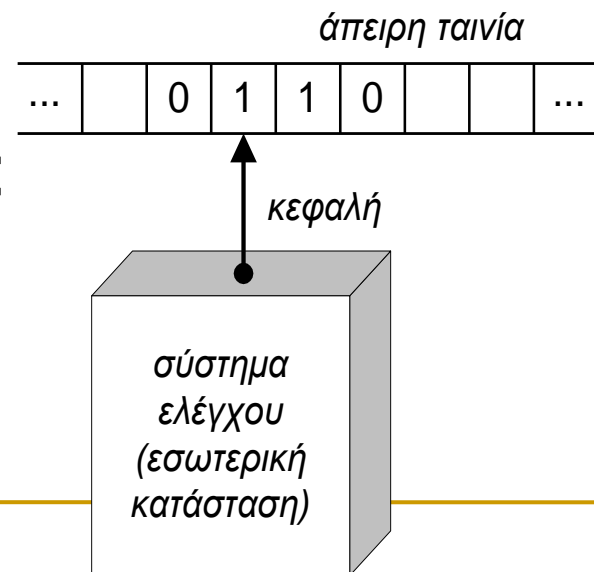
- Χρήση προς όφελός μας (κρυπτογραφία, εκλογές)

Κατηγοριοποίηση προβλημάτων



Πώς ξέρουμε ότι δεν κάνουμε λάθος;

- Μήπως υπάρχει πιο «έξυπνος» τρόπος υπολογισμού;
- Αυστηρός ορισμός αλγορίθμων με χρήση **υπολογιστικών μοντέλων**: Alan Turing, Alonso Church, Stephen Kleene, Emil Post, Andrey Markov, κ.ά.
- Το πλέον «φυσικό» μοντέλο: **Μηχανή Turing**.



Θέση των Church-Turing

Κάθε αλγόριθμος μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια μιας μηχανής Turing

Ισοδύναμη διατύπωση:

Όλα τα γνωστά και άγνωστα υπολογιστικά μοντέλα είναι μηχανιστικά ισοδύναμα

Δηλαδή, για κάθε ζευγάρι υπολογιστικών μοντέλων, μπορούμε με πρόγραμμα (compiler) να μεταφράζουμε αλγορίθμους από το ένα στο άλλο.

Είδη πολυπλοκότητας

- **Χειρότερης περίπτωσης** (worst case): με αυτήν ασχολούμαστε συνήθως.
- **Μέσης περίπτωσης** (average case): με βάση κατανομή πιθανότητας στιγμιοτύπων (instances) του προβλήματος. Συνήθως δύσκολο να οριστεί σωστά.
- **Αποσβετική** (amortized): εκφράζει την μέση αποδοτικότητα σε μια σειρά επαναλήψεων του αλγορίθμου.

Πολυπλοκότητα: ανοικτά ερωτήματα

- Εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις, για **κανένα πρόβλημα** δεν γνωρίζουμε **πόσο γρήγορα** μπορεί να λυθεί.
- Ακόμα και για τον **πολλαπλασιασμό αριθμών** δεν γνωρίζουμε τον ταχύτερο αλγόριθμο.
- Ο σχολικός τρόπος πολλαπλασιασμού αριθμών με n ψηφία χρειάζεται $O(n^2)$ βήματα.
- Με μέθοδο «διαίρει και κυρίευε» $O(n^{\log 3}) \approx O(n^{1.58})$ βήματα αρκούν [Karatsuba 1960, από ιδέα Gauss].
- Υπάρχουν ακόμα καλύτεροι αλγόριθμοι που χρειάζονται περίπου $O(n \log n)$ βήματα [Schönhage-Strassen 1971, Fürer 2007].
- Υπάρχει αλγόριθμος που χρειάζεται μόνο $O(n)$ βήματα; Αυτό είναι ανοικτό ερώτημα.