



Γραμμική Άλγεβρα

9. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, A \in M_{n \times n}$$

Μέθοδος Cramer

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Στην παράγραφο αυτή,
θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα για να βρούμε έναν τύπο για τη λύση ενός συστήματος $n \times n$ (n εξισώσεων με n αγνώστους).

Επίλυση γραμμικού συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $A \in M_{n \times n}$

- Ονομάζουμε A_i , τον πίνακα που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε την i -στήλη με την στήλη των σταθερών όρων \vec{b} . Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
- 1) Αν $\det A \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

- 2α) Αν $\det A = 0$, και τουλάχιστον μία από τις ορίζουσες $|A_i|$ είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- 2β) Αν $\det A = 0$ και $\det A_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$, τότε το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο.
- Σημείωση: Η μέθοδος ή κανόνας του Cramer χρησιμοποιείται ΜΟΝΟ όταν ο πίνακας είναι τετραγωνικός.

Παράδειγμα 1

Σύστημα 2×2 Μία και μοναδική λύση

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

Λύση:

1) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, αφού $\det A \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση!

2) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των A_1 και A_2 :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7$$

3) Υπολογίζουμε τη λύση με τον τύπο :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{|A_1|}{|A|} = -\frac{4}{5}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{7}{5}$$

Παράδειγμα 2

Σύστημα 2×2 Αδύνατο

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Λύση:

1) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, αφού $\det A = 0$ τότε το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση!

2) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των A_1 και A_2 :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0$$
$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8 \neq 0$$

Αφού μία τουλάχιστον $\det A_i \neq 0$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο! (περίπτωση 2α)

Το σύστημα δεν έχει λύση, είναι αδύνατο!

Παράδειγμα 3

Σύστημα 3×3 Άπειρες λύσεις

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

το σύστημα σίγουρα δεν έχει μοναδική λύση!

Λύση:

1) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (8 - 1) + 1 \cdot (12 - 5) + 3 \cdot (3 - 10) = 0$$

2) Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των A_1 , A_2 και A_3 :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \det A &= \det A_1 = \\ \det A_2 &= \det A_3 = 0 \\ &(\text{περίπτωση 2β}) \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Χρειάζεται διερεύνηση!

Παράδειγμα 3-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

3) Θα διερευνήσουμε αν είναι αόριστο. Θέτουμε $x_3 = t$, αντικαθιστούμε στις δύο πρώτες και έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3t = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - 3t \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 - t \end{cases}$$

Και λύνουμε το 2×2 σύστημα:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1-3t & -1 \\ 2-t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-6t+2-t}{4+3} = -t + \frac{4}{7}$$
$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3t \\ 3 & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2t-3+9t}{4+3} = t + \frac{1}{7}$$

Θα ελέγξουμε αν η λύση που βρήκαμε, ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος.

Παράδειγμα 3-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε όπου x_1 , x_2 τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω και $x_3 = t$. Έχουμε:

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \cdot \left(-t + \frac{4}{7}\right) + \left(t + \frac{1}{7}\right) + 4 \cdot t = -5t + \frac{20}{7} + t + \frac{1}{7} + 4t = \frac{21}{7} = 3$$

Άρα, επαληθεύεται και η τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος.
Επομένως το σύστημα είναι αόριστο με λύσεις της μορφής:

$$x_1 = -t + \frac{4}{7}, x_2 = t + \frac{1}{7}, x_3 = t, t \in \mathbb{R}$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε και με τη βοήθεια του αλγορίθμου Gauss να δούμε αν είναι αόριστο ή αδύνατο.

Παράδειγμα 4

Σύστημα 3×3 ομογενές / μία και μοναδική λύση

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Λύση:

1) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ (Sarrus)} \Rightarrow \text{Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση!}$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική διότι όλες οι ορίζουσες θα είναι μηδέν αφού θα έχουν σίγουρα μία μηδενική στήλη. Επομένως η λύση είναι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5

Σύστημα 3×3 παραμετρικό

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda + 1)y + z = \lambda \\ x + y + (\lambda + 1)z = \lambda^2 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Αρχικά, υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος:

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & \lambda + 3 & \lambda + 3 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot (\lambda + 3)$$

Ιδιότητα 7

Στην 1^η γραμμή προσθέτω τις άλλες δύο

Ιδιότητα 7

Από την 2^η και την 3^η στήλη αφαιρώ την 1^η.

Παράδειγμα 5-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 παραμετρικό

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda + 1)y + z = \lambda \\ x + y + (\lambda + 1)z = \lambda^2 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες ορίζουσες:

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 - \lambda \\ \lambda^2 & 1 - \lambda^2 & \lambda + 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ 1 - \lambda^2 & & \\ \lambda + 1 - \lambda^2 & & \end{vmatrix} = \\ &= \lambda + 1 - \lambda^2 - (1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda^2) = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda \cdot (-\lambda^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \dots = 2\lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (2\lambda - 1)$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \dots = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda - 1)$$

Παράδειγμα 5-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 παραμετρικό

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda + 1)y + z = \lambda \\ x + y + (\lambda + 1)z = \lambda^2 \end{cases}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\lambda \cdot (-\lambda^2 + 2)}{\lambda^2 \cdot (\lambda + 3)} = \frac{-\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 3\lambda}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\lambda \cdot (2\lambda - 1)}{\lambda^2 \cdot (\lambda + 3)} = \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda}$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\lambda \cdot (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1)}{\lambda^2 \cdot (\lambda + 3)} = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda^2 + 3\lambda}$$

Παράδειγμα 5-λύση (συνέχεια)

Σύστημα 3×3 παραμετρικό

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = 1 \\ x + (\lambda + 1)y + z = \lambda \\ x + y + (\lambda + 1)z = \lambda^2 \end{cases}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

2) Αν $\lambda = 0$, τότε το σύστημα έχει:

$$\det A = 0 \text{ και } \det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$$

Το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Χρειάζεται διερεύνηση! (περίπτωση 2β)

Αντικαθιστούμε στο αρχικό σύστημα όπου $\lambda = 0$, και έχουμε:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Το σύστημα είναι αδύνατο}$$

3) Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα έχει:

$$\det A = 0 \text{ και } \det A_1 = 27 - 6 = 21 \neq 0$$

Το σύστημα είναι αδύνατο! (περίπτωση 2α)

Άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση

1) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 4y + z = 5 \\ 6x + 6y + 2z = 13 \end{cases}$. [αδύνατο, $\det A = 0$ και $\det A_1 = -7 \neq 0$]

2) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} -3x + 6y - 11z = 5 \\ 3x - 4y + 6z = -2 \\ 4x - 8y + 13z = 4 \end{cases}$. [$\det A = 10, x = -7.2, y = -2.5, z = -6.4$]

3) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in R$.

4) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x + \lambda y - z = 2 \\ 2x - y + \lambda z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in R$.