ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
Ασκήσεις
8β. Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Άσκηση 1

Αν $A, B \in M_{n\times n}$ και ο ένας είναι αντιστρέψιμος, τότε να δείξετε ότι:

$$|A \cdot B + I_n| = |B \cdot A + I_n|$$

Λύση

Έστω ότι A αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$|A \cdot B + I_n| = \left|A \cdot B + A \cdot A^{-1}\right| = \ (\varepsilon\pi\iota\mu\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \pi\iota\nu\alpha\kappa\omega\nu)\left|A \cdot \left(B + A^{-1}\right)\right| =$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + AC$

$det(AB) = detA \ \cdot detB, A, B \in M_{n\times n}$

$$(\gamma\iota\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ o\rho\iota\zeta o\upsilon\sigma\acute{\omega}\nu)\ |A| \cdot \left|B + A^{-1}\right| =$$

$$(\alpha\nu\tau\iota\mu\varepsilon\tau\alpha\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\eta\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\omega}\nu)\ \left|B + A^{-1}\right| \cdot |A| =$$

$$(\gamma\iota\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ o\rho\iota\zeta o\upsilon\sigma\acute{\omega}\nu)\left|\left(B + A^{-1}\right) \cdot A\right| =$$

$(B + C)A = BA + CA$

$$(\varepsilon\pi\iota\mu\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \pi\iota\nu\alpha\kappa\omega\nu)\left|B \cdot A + A^{-1} \cdot A\right| = \boxed{|B \cdot A + I_n|.}$$

Όμοια δείχνουμε αν υποθέσουμε πως ο B είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2

α) Να εξετάσετε αν ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος. Αν ναι, να βρείτε τον αντίστροφό του με τη χρήση γραμμοπράξεων.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Με βάση τους υπολογισμούς στο (α), και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα $detA$ του $\boldsymbol{A}$;

γ) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 2α-Λύση

α) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_1 \to -\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_3 \to \frac{1}{2} \cdot \gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 + 3\gamma_2]{\gamma_1 \to \gamma_1 + 2\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/10 & 7/10 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array}\right]$$

Αντίστροφος A^{-1}

Μοναδιαίος

<u>Άσκηση 2β</u>-Λύση(συνέχεια)

β) Με βάση τον υπολογισμούς στο (α) και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα $detA$ του A;

Πρέπει να δούμε:

i. **ποιες από τις γραμμοπράξεις επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας;**

ii. **πώς επηρεάζουν τον υπολογισμό της;**

1) Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) με τον αριθμό λ , τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.

$$\begin{vmatrix} \lambda\cdot\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda\cdot\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda\cdot\alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\cdot\alpha_1\cdot detA_{11} - \lambda\cdot\alpha_2\cdot detA_{21} + \lambda\cdot\alpha_3\cdot detA_{31} =$$

$$= \lambda\cdot(\alpha_1\cdot detA_{11} - \alpha_2\cdot detA_{21} + \alpha_3 detA_{31}) = \lambda\cdot detA$$

2) Αν στα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασμένα επί λ, τότε η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1+\lambda\cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2+\lambda\cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3+\lambda\cdot a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda\cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda\cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda\cdot a_3 \end{vmatrix}}_{\text{Δύο στήλες ανάλογες}} =$$

$$= detA + 0 = detA$$

Άσκηση 2β-Λύση(συνέχεια)

Γραμμοπράξεις-υπολογισμός ορίζουσας

Παρατηρώντας τις γραμμοπράξεις που κάναμε, εκείνες που επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής:

1) $\gamma_1 \to -\gamma_1$

2) $\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2$

3) $\gamma_3 \to \frac{1}{2}\gamma_3$

Πιο συγκεκριμένα:

Η γραμμοπράξη $A \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{5}\gamma_2} A_1$, προκαλεί την εξής μεταβολή:

$$detA_1 = \frac{1}{5}\, detA \Leftrightarrow \boxed{detA = 5 \cdot detA_1}$$

Επομένως συνολικά έχουμε:

$$\boxed{\begin{gathered} detA = (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot detA_{\alpha\nu\eta\gamma\mu\varepsilon\nu o\varsigma\ \kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\omega\tau o\varsigma} = \\ (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot detI_3 = (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = -10 \end{gathered}}$$

Άσκηση 2γ-Λύση(συνέχεια)

γ) Να λυθεί το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} -x_1 \ + \ 3\,x_2 \ + 2\,x_3 = -5 \\ 2x_1 \ - \ x_2 \ + \ x_3 = -1 \\ x_1 \ - 2\,x_2 \ + \ x_3 = 4 \end{array}\right\}$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας A στο (α).

Άρα το σύστημα γράφεται: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}\,, \acute{o}\pi o\upsilon\ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Και η λύση δίνεται από τη σχέση: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ -14/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3α

α) **Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ **συναρτήσει της παραμέτρου** $\boldsymbol{\alpha \in R}$ **.** Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in R$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος;

Άσκηση 3α-Λύση

α) $\boldsymbol{detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ 0 & 4+2a & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4+2a & -8 \end{vmatrix} = 16 + 4a}$

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν:

$$\boxed{\boldsymbol{detA \neq 0 \Leftrightarrow 16 + 4\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -4}}$$

Άσκηση 3β

β) Επιλέξτε στην τύχη μία από τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (α) και υπολογίστε για αυτήν την τιμή τον αντίστροφο του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

Άσκηση 3β-Λύση

Επιλέγουμε τυχαία έναν πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -4$. Έστω $\boxed{\alpha = -3}$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan έχουμε:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2\cdot L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2\cdot L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{-1}{4} L_3}$$

Άσκηση 3β-Λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_3]{L_1 \to L_1 + 5 \cdot L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -5/2 & -3/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 3 \cdot L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array}\right] = [I_3 | A^{-1}]$$

Επομένως:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}}$$

Άσκηση 3γ

γ) Χρησιμοποιήστε την τιμή του α που επιλέξατε στο ερώτημα (β) και βρείτε τη λύση

του συστήματος $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$, $\boldsymbol{\acute{o}\pi o\upsilon\ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$ **και** $\boldsymbol{\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$.

Άσκηση 3γ-Λύση

γ) Αφού $detA \neq 0$, το σύστημα $\boldsymbol{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$ έχει **μία και μοναδική λύση** την $\boldsymbol{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$.

Άρα :

$$\boldsymbol{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}}$$

Άσκηση 3δ

δ) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Gauss-Jordan για να λύσετε το σύστημα

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}, \text{ό}\boldsymbol{\pi o \upsilon}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

για τις τιμές (ή τιμή) του α για τις οποίες (ή οποία) ο $\boldsymbol{A}$ είναι μη αντιστρέψιμος. Να διακρίνετε τις βασικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές. Τέλος, να βρείτε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, <u>χωρίς να το επιλύσετε</u>.

Άσκηση 3δ-Λύση

δ) Για α=-4, έχουμε $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -4 & -5\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}$, θα βρούμε τη λύση του συστήματος $\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ με αλγόριθμο Gauss-Jordan.

$rank(A|b)=2$

$rank(A)=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & -5 & \mathbf{1}\\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{-1}\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}\end{array}\right] \xrightarrow{L_1\to L_1+4\cdot L_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & \mathbf{-3}\\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{-1}\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}\end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x_1}=\mathbf{-3-3}\cdot\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{x_2}=\mathbf{-1-2}\cdot\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{x_3}\in\boldsymbol{R}\end{cases}$$

2 pivots: 2 βασικοί άγνωστοι οι x_1, x_2

$\boldsymbol{\nu - rankA = 3-2 = 1}$**, μία ελεύθερη μεταβλητή, η x_3**

Άσκηση 3δ-Λύση (συνέχεια)

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \boldsymbol{R} \right\}$$

Λύση αντίστοιχου ομογενούς

δ) Από την προηγούμενη γενική μορφή του συνόλου λύσης του συστήματος $\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ προκύπτει ότι και το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ έχει άπειρες λύσεις (αφού $rank(A) \neq 3$). Και το σύνολο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι η εξής:

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \boldsymbol{R} \right\}$$