ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

7. Επίλυση ενός συστήματος 3×3

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 3×3 , τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους

Αλγεβρική επίλυση

Παράδειγμα 1:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Επίλυση με εξισώσεις

Επίλυση με τη βοήθεια πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1:

Αλγεβρική επίλυση

Λύση γραμμικού συστήματος 3×3

Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_2 \to \varepsilon\xi_2 - 2\varepsilon\xi_1}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_3 \to \varepsilon\xi_3 - 3\varepsilon\xi_1}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2y-7z=-17 \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_2 \to \frac{1}{2}\cdot\varepsilon\xi_2}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ y-\frac{7}{2}\cdot z=-\frac{17}{2} \\ 3y-11z=-27 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_3 \to \varepsilon\xi_3 - 3\varepsilon\xi_2}$$

Λύση με χρήση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \frac{1}{2}\cdot\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_2}$$

Παράδειγμα 1:

Αλγεβρική επίλυση

Λύση γραμμικού συστήματος 3×3

Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot z = -\frac{3}{2} \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_3 \to -2\varepsilon\xi_3}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_2 \to \varepsilon\xi_2 + \frac{7}{2} \cdot \varepsilon\xi_3}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ y \quad = 2 \\ z = 3 \end{cases} \xLeftrightarrow{\varepsilon\xi_1 \to \varepsilon\xi_1 - 2\varepsilon\xi_3}$$

Λύση με χρήση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3 \to -2\gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_2 \to \gamma_2 + \frac{7}{2} \cdot \gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - 2\gamma_3}$$

Παράδειγμα 1:

Αλγεβρική επίλυση

Λύση γραμμικού συστήματος 3×3

Λύση συμβολικά με εξισώσεις

$$\begin{cases} x + y \quad = 3 \\ \quad y \quad = 2 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases} \xleftrightarrow{\varepsilon\xi_1 \to \varepsilon\xi_1 - \varepsilon\xi_2}$$

$$\begin{cases} x \quad\quad = 1 \\ \quad y \quad = 2 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την
$x = 1, y = 2, z = 3$

Λύση με χρήση πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \to \gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 3×3 , με μία και μοναδική λύση

Γεωμετρική Ερμηνεία

<u>Παράδειγμα 1:</u>

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} \boxed{x + y + 2z = 9} \\ \boxed{2x + 4y - 3z = 1} \\ \boxed{3x + 6y - 5z = 0} \end{cases}$$

Ως προς τις στήλες

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1:

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 3×3 , με μία και μοναδική λύση

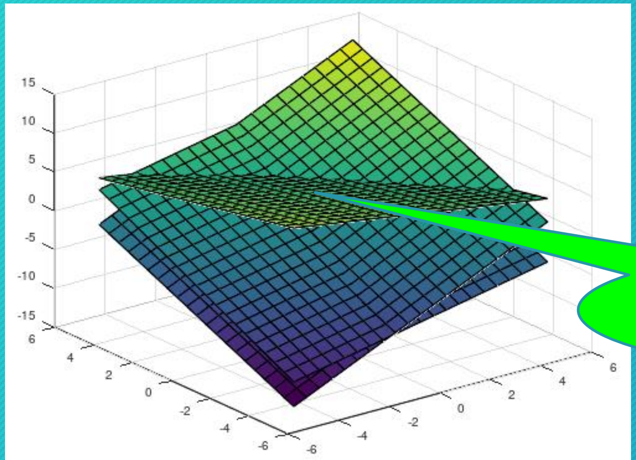
Γεωμετρική Ερμηνεία

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση την $x = 1, y = 2, z = 3$

Ως προς τις γραμμές

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$



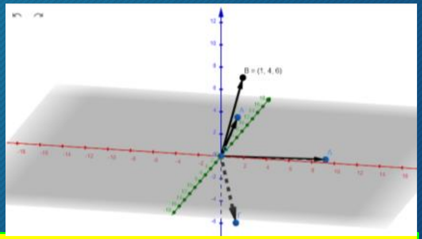
το σημείο τομής των τριών επιπέδων (1, 2, 3)

Τρία επίπεδα στον χώρο R^3

… που τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο με συντεταγμένες $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Ως προς τις στήλες

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



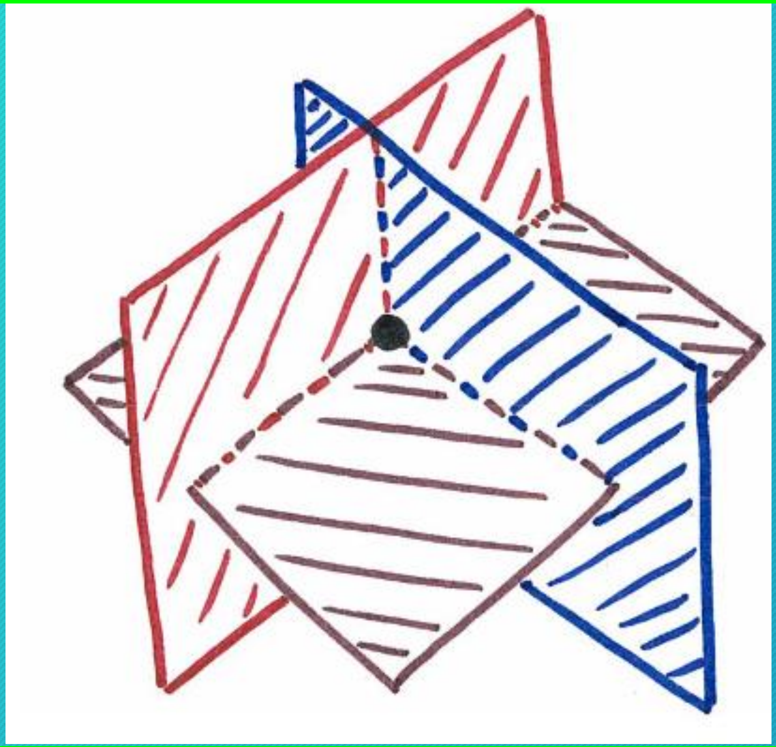
Τρία διανύσματα στον χώρο R^3

… ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός τους μπορεί να δημιουργήσει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

… Αυτός ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός προκύπτει για $x = 1, y = 2, z = 3$

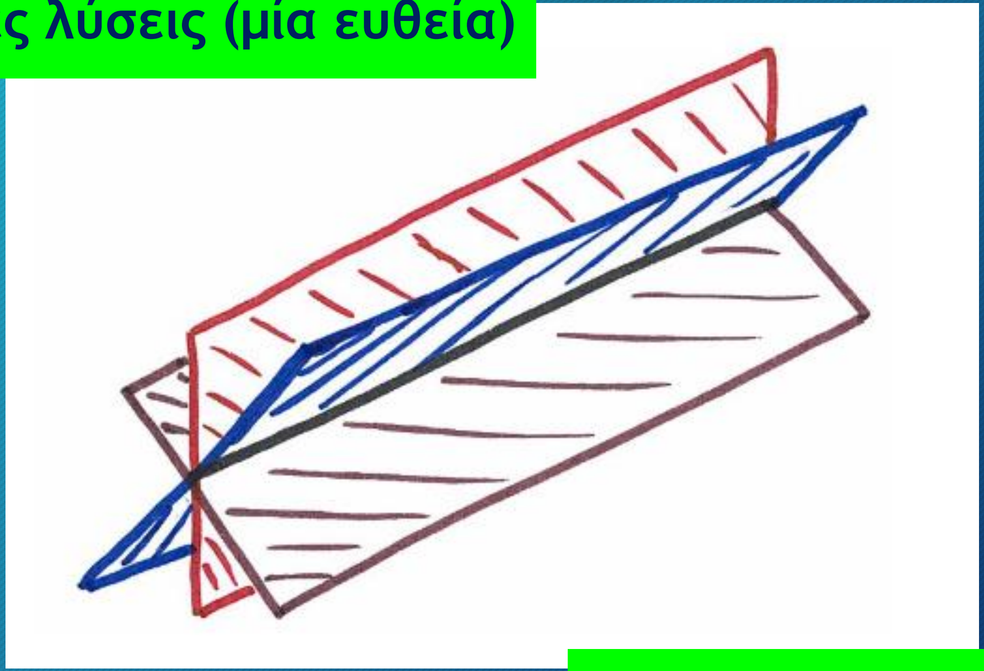
Δυνατές περιπτώσεις γραμμικού συστήματος 3×3

Μία και μοναδική λύση (ένα σημείο)



three linear equations in three variables, unique solution

Άπειρες λύσεις (μία ευθεία)

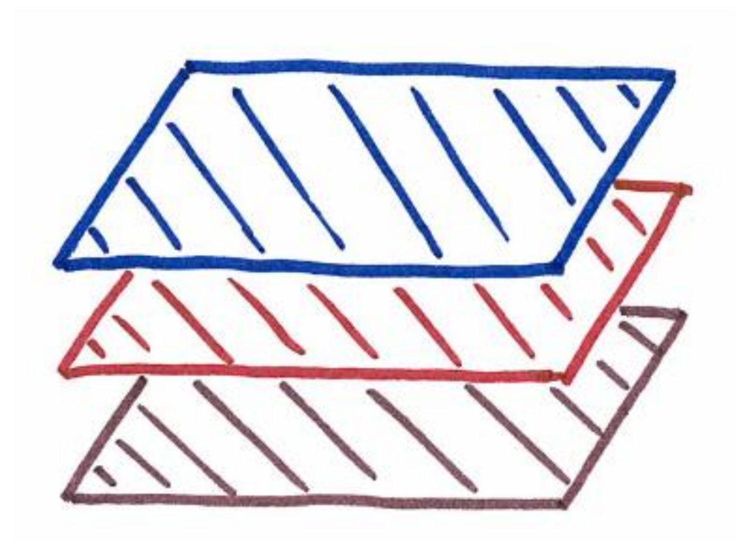


multiple solutions

https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-lei3v.pdf

Δυνατές περιπτώσεις γραμμικού συστήματος 3×3

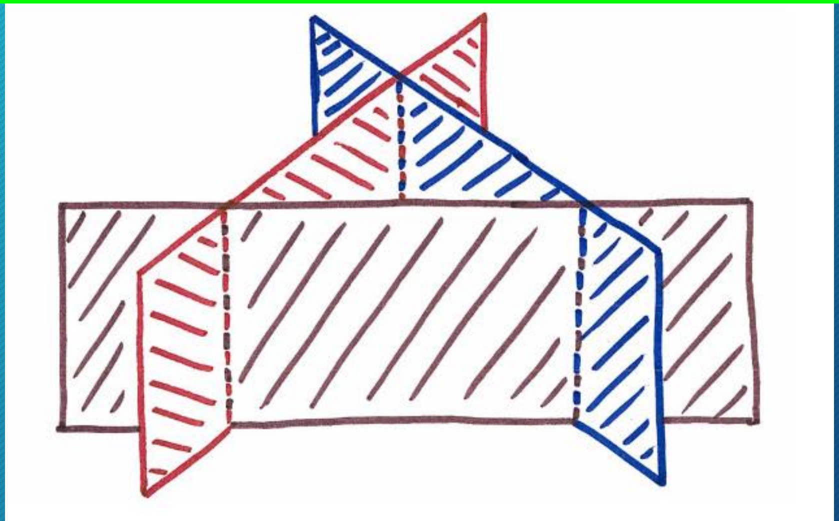
Καμία λύση (τρία παράλληλα επίπεδα)



Three parallel planes. There is no point common to all three planes, and hence the system will not have any solutions.

Καμία λύση

(τρία επίπεδα που τέμνονται ανά δύο)



There might not be a point that lies on all three planes even if the planes aren't parallel. In this case, there is no solution at all.

https://www.math.utah.edu/~wortman/1050-text-lei3v.pdf

Παράδειγμα συστήματος γραμμικών εξισώσεων 3×3 με μία και μοναδική λύση

Παράδειγμα 2 :

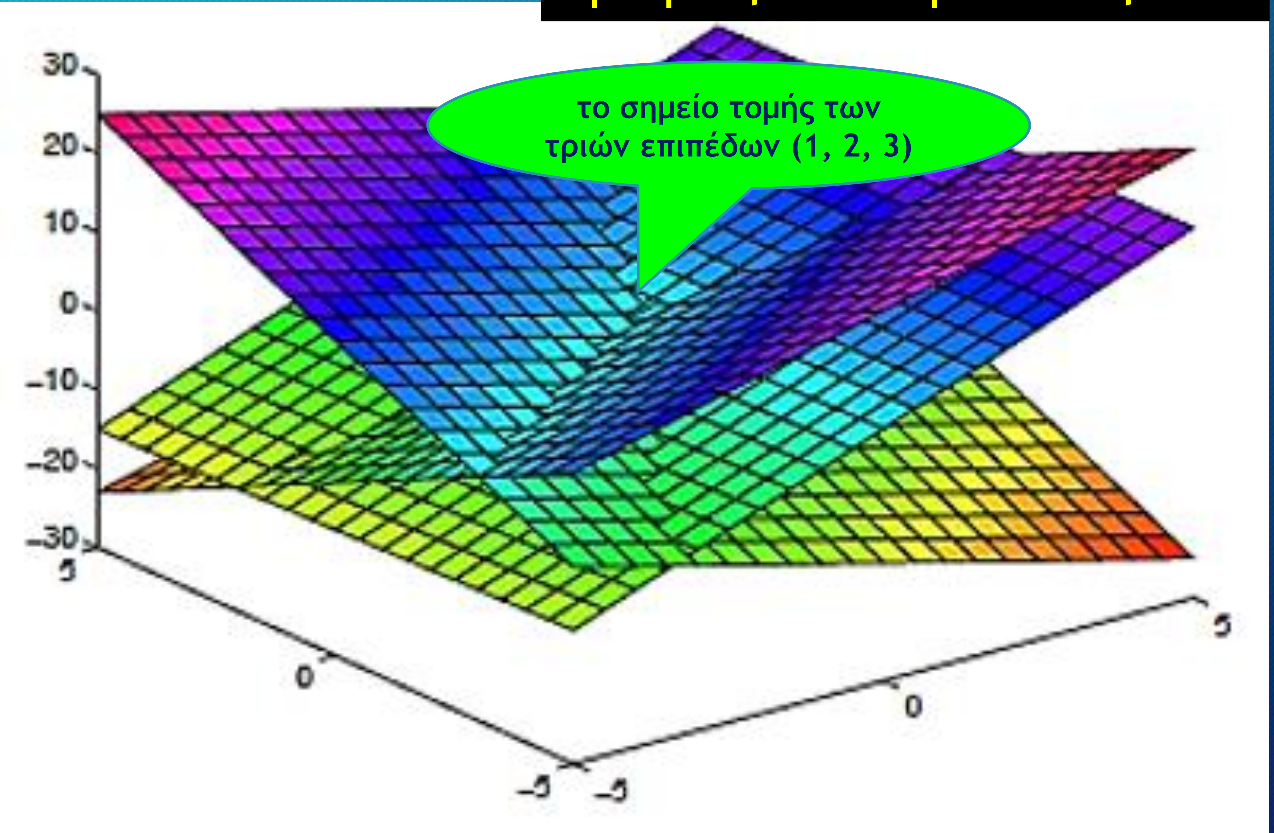
$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 0.2y + z = 1 \end{cases}$$

Τρία επίπεδα στον χώρο R^3

… που τέμνονται σε ένα σημείο

Το σύστημα έχει μία και μοναδική λύση

Γραφική αναπαράσταση 3-D



MATLAB

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.5:5);
z = 2*x - 3*y + 2;
surf(x,y,z)
hold
z = -2*x + 3*y;
surf(x,y,z)
hold
z = 3*x - 0.2*y + 1;
surf(x,y,z)
```

Παράδειγμα συστήματος γραμμικών εξισώσεων 2×3 δύο εξισώσεις και τρεις άγνωστοι

Παράδειγμα 2 :

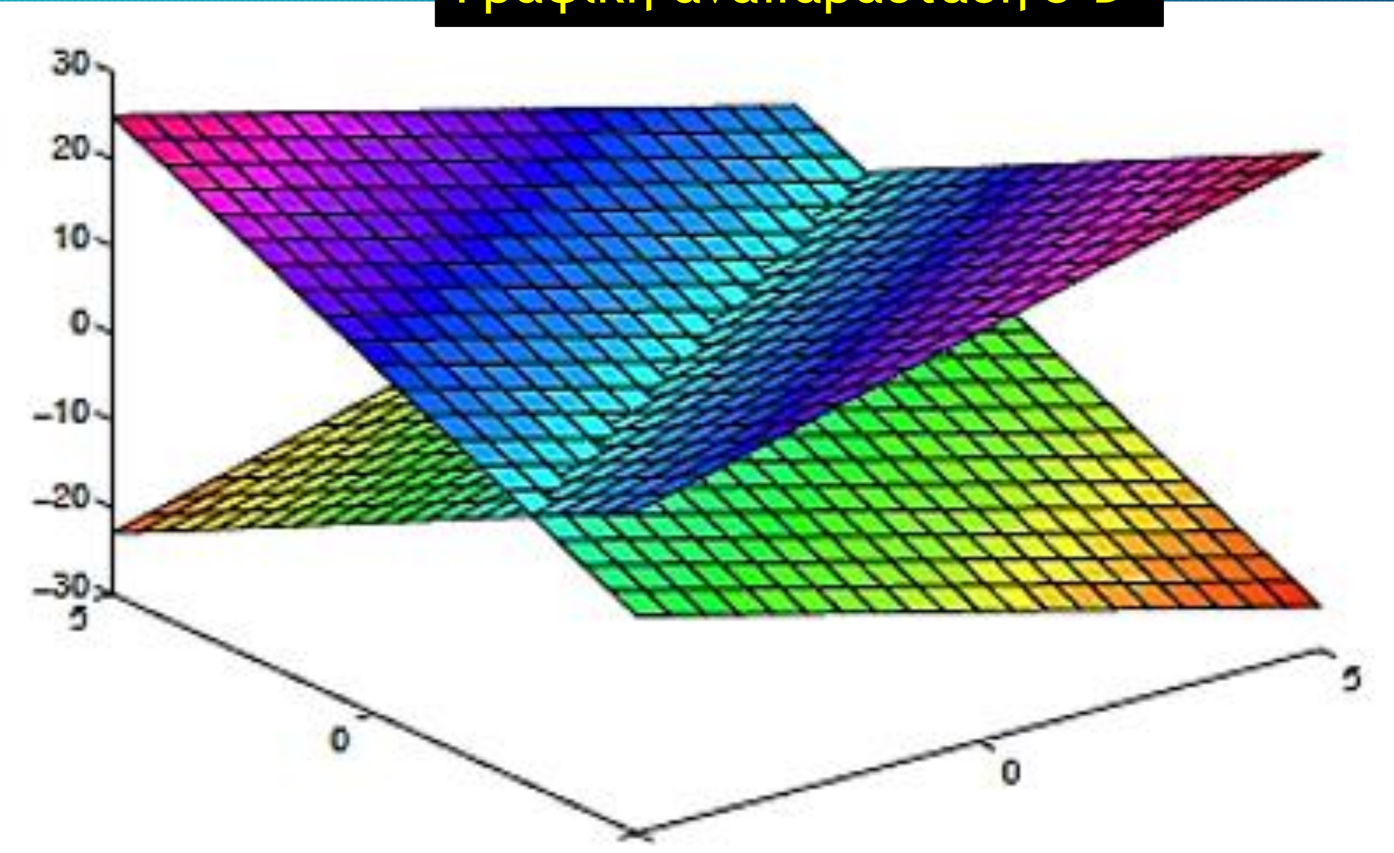
$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Δύο επίπεδα στον χώρο R^3

… που τέμνονται σε μία ευθεία

Το σύστημα άπειρες λύσεις

Γραφική αναπαράσταση 3-D




```
[x,y] = meshgrid(-5:0.5:5);
z = 2*x - 3*y + 2;
surf(x,y,z)
hold
z = -2*x + 3*y;
surf(x,y,z)
```

MATLAB

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2×3 , δύο εξισώσεις και τρεις άγνωστοι

Παράδειγμα 3 :

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 2 \\ 2x - 3y - z = -24 \end{cases}$$

Δύο επίπεδα στον χώρο R^3

Δύο επίπεδα παράλληλα

Το σύστημα αδύνατο

MATLAB

```
[x,y] = meshgrid(-5:0.5:5);
z = 2*x - 3*y + 2;
surf(x,y,z)
hold
z = 2*x - 3*y + 24;
surf(x,y,z)
```

Γραφική αναπαράσταση 3-D