



Γραμμική Άλγεβρα

3. Εύρεση Αντίστροφου Πίνακα με Ορίζουσα

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Ορισμός προσαρτημένου ή συμπληρωματικού πίνακα (adjoint)

Δίνεται ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n \times n}$.

Ο πίνακας μεγέθους $n \times n$ ο οποίος στη θέση του στοιχείου (i, j) έχει το στοιχείο $(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$, ονομάζεται προσαρτημένος (adjoint) ή συμπληρωματικός πίνακας του A και συμβολίζεται με $\mathbf{adj}(A)$.

Υπενθύμιση: Ο πίνακας A_{ji} , είναι ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον A , αν διαγράψουμε την j -γραμμή και την i -στήλη και είναι μεγέθους $(n - 1) \times (n - 1)$. Ονομάζεται ελάσσων πίνακας (βλ. ενότητα 7).

Εύρεση αντίστροφου πίνακα (με χρήση προσαρτημένου πίνακα)

Δίνεται ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$.

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

Αν $\det A \neq 0$, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A , αν υπάρχει, με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

Λύση:

1ο Βήμα

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 11 \neq 0$$

Αφού $\det A = 11 \neq 0$, υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας.

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2ο Βήμα Υπολογίζουμε τις ορίζουσες των ελάσσονων πινάκων.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{11} = 11$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{12} = 0$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{13} = 0$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{21} = -3$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{22} = 4$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{23} = 3$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{31} = -2$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{32} = -1$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & 3 & 4 \end{bmatrix} \right), \det A_{33} = 2$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3ο Βήμα

Τοποθετούμε τα στοιχεία του προσαρτημένου πίνακα $adjA$ στη σωστή θέση:

$$adjA = \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι τα πρόσημα εμφανίζονται εναλλάξ σύμφωνα με τη διάταξη της σκακιέρας

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Άρα ο προσαρτημένος πίνακας του A είναι ο

$$adjA = \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Και ο αντίστροφός του A είναι ο εξής:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A , αν υπάρχει, με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

Λύση:

1ο Βήμα

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 - 1) = -1 \neq 0$$

2ο Βήμα

Υπολογίζουμε τον προσαρτημένο πίνακα:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\det A_{21} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \det A_{31} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ -\det A_{12} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \det A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\det A_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \det A_{13} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & -\det A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \det A_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2-συνέχεια

3ο Βήμα

Άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα A , αν υπάρχει, με

τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

Λύση:

1ο Βήμα

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 0 + 12 = 18 \neq 0$$

2ο Βήμα

Υπολογίζουμε τον προσαρτημένο πίνακα:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3ο Βήμα

Άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$