ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

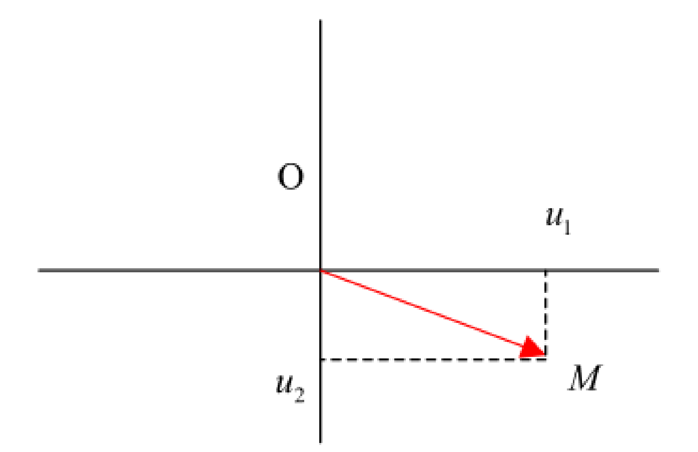
Γραμμική Άλγεβρα
13. Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Ο χώρος R^2

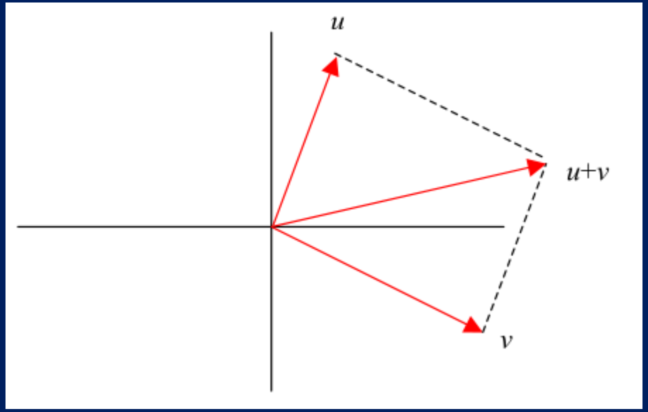
Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο στοιχείο (u_1, u_2) του R^2 το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του επιπέδου που έχει αρχή το σημείο $O = (0,0)$ και πέρας το σημείο $M = (u_1, u_2)$ όπως φαίνεται στο σχήμα



Μπορούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ του επιπέδου να το συμβολίζουμε με έναν πίνακα γραμμή $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$ ή με έναν πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

Οι πράξεις των διανυσμάτων στο R^2

Πρόσθεση



Γεωμετρικά

Το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

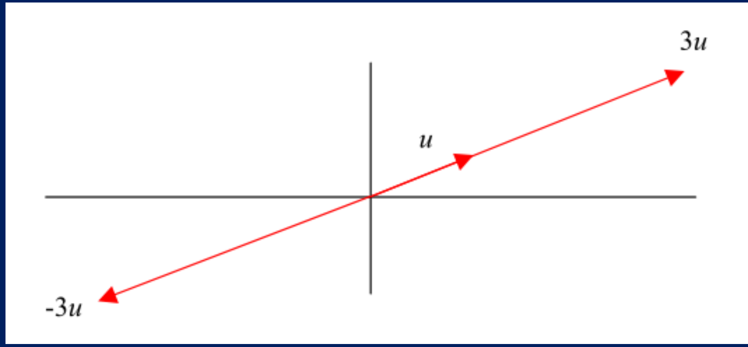
Αλγεβρικά

Αν $\vec{u} = (u_1, u_2)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2)$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Λέμε ότι το $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ είναι το άθροισμα των $\vec{\boldsymbol{u}}$ και $\vec{\boldsymbol{v}}$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός



Γεωμετρικά

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση με το $\vec{u}$. Η φορά του εξαρτάται από το πρόσημο του λ.

Αλγεβρικά

Αν $\vec{u} = (u_1, u_2)$ και $\lambda \in R$ $(\lambda \neq 0)$:

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2)$$

Λέμε ότι το $\boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{\boldsymbol{u}}$

Ο χώρος R^n

Το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, δηλαδή

$$\boxed{\boldsymbol{R^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \colon u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}}}$$

Εφοδιασμένο με :

Α) την εσωτερική πράξη της πρόσθεσης

$$\boxed{(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)}$$

Β) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (επί πραγματικό αριθμό)

$$\boxed{\lambda \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u, \dots, \lambda \cdot u_n)}$$

είναι διανυσματικός χώρος.

Σημείωση: Τα στοιχεία του συνόλου R^n μπορούν να θεωρηθούν και πίνακες μεγέθους $1 \times n$, δηλαδή πίνακες-γραμμή και τα στοιχεία του τα λέμε διανύσματα. Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο R^n μαζί με τις προηγούμενες πράξεις θα χρησιμοποιούμε την έκφραση ο χώρος R^n ή ο δ.χ. R^n.

Διανυσματικός χώρος V

Έστω ένα μη κενό σύνολο V και K το σύνολο των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Το σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις, μία εσωτερική + (πρόσθεση) και μία εξωτερική $\cdot$ (βαθμωτό πολλαπλασιασμό), ονομάζεται K-διανυσματικός χώρος όταν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- 1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- 2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- 3) $\exists \mathbf{0} \in V: \forall \vec{u} \in V, \ \vec{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- 4) $\forall \vec{u} \in V, \quad \exists(-\vec{u}) \in V: \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \mathbf{0}$
- 5) $\forall \lambda \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \boldsymbol{\lambda} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{u} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{v}$
- 6) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V, (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) \cdot \vec{u} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{u} + \boldsymbol{\mu} \cdot \vec{u}$
- 7) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \vec{u} \in V, (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \vec{u} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\boldsymbol{\mu} \cdot \vec{u})$
- 8) $\exists 1 \in K : \forall \vec{u} \in V, \mathbf{1} \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Οι ιδιότητες των πράξεων ενός K-δ.χ. V

Τα στοιχεία του V ονομάζονται διανύσματα.

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων στον R^n

Αν έχουμε m διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ του χώρου του R^n, τότε θα λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ του R^n είναι ένας **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων αυτών, αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\boxed{\vec{x} = \underbrace{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{v_m}, \lambda_i}_{\text{άθροισμα πολλαπλασίων αυτών των διανυσμάτων}} \in R}$$

Παράδειγμα 1

Το διάνυσμα $\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ είναι <u>γραμμικός συνδυασμός</u> των διανυσμάτων $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$;

<u>Λύση</u>:

- Πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\kappa\\2\cdot\kappa+\lambda\\-\kappa+2\cdot\lambda\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\kappa = 1\\2\kappa+\lambda = 4\\-\kappa+2\lambda = 3\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\kappa = 1}\\\boldsymbol{\lambda = 2}\end{matrix}\right\}$$

- Άρα το διάνυσμα $\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο ως εξής:

$$\boxed{\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}}$$

Διανυσματικός Υπόχωρος

Ορισμός:

Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος. Ένα μη κενό υποσύνολο W του V θα λέγεται K-διανυσματικός υποχώρος του V αν είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον V.

Θεώρημα:

Ένα μη κενό υποσύνολο W ενός K-διανυσματικού χώρου V θα είναι διανυσματικός υποχώρος του V αν και μόνο αν ισχύουν για το W οι επόμενες δύο ιδιότητες:

i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W, \vec{u} + \vec{v} \in W$, δηλ. να είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση

ii) $\forall \vec{u} \in W, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot \vec{u} \in W$, δηλ. να είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό

Τα διανύσματα παράγουν τον χώρο…

Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ παράγουν τον χώρο R^n, αν κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του R^n μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Δηλαδή, θα εξετάζουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε να ισχύει η επόμενη σχέση για όλα τα διανύσματα $\vec{x}$ του R^n

$$\boxed{\vec{x} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{v_m}, \lambda_i \in R}$$

Π.χ.

Προφανώς τα διανύσματα $\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)$ παράγουν τον χώρο R^2 .

Ομοίως τα n διανύσματα $\overrightarrow{e_1} = (1,0, \dots, 0), \overrightarrow{e_2} = (0,1, \dots, 0), \dots, \overrightarrow{e_n} = (0,0, \dots, 1)$ παράγουν τον χώρο R^n .

Παράδειγμα 2

Θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ παράγουν τον χώρο R^2 .

<u>Λύση</u>:

Πρέπει να εξετάσουμε αν για κάθε διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}$$

Άγνωστοι κ, λ

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\kappa\\\kappa\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\lambda\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\kappa\\\kappa+\lambda\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\kappa = x\\\kappa+\lambda = y\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\kappa = x\\\lambda = y - x\end{Bmatrix}}$$

Άρα <u>κάθε</u> διάνυσμα του R^2 μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών διανυσμάτων: $\boldsymbol{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (y-x) \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}$

Επομένως τα διανύσματα $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ <u>ΠΑΡΑΓΟΥΝ ΤΟΝ ΧΩΡΟ R^2.</u>

Παράδειγμα 3- γεωμετρικός τρόπος λύσης

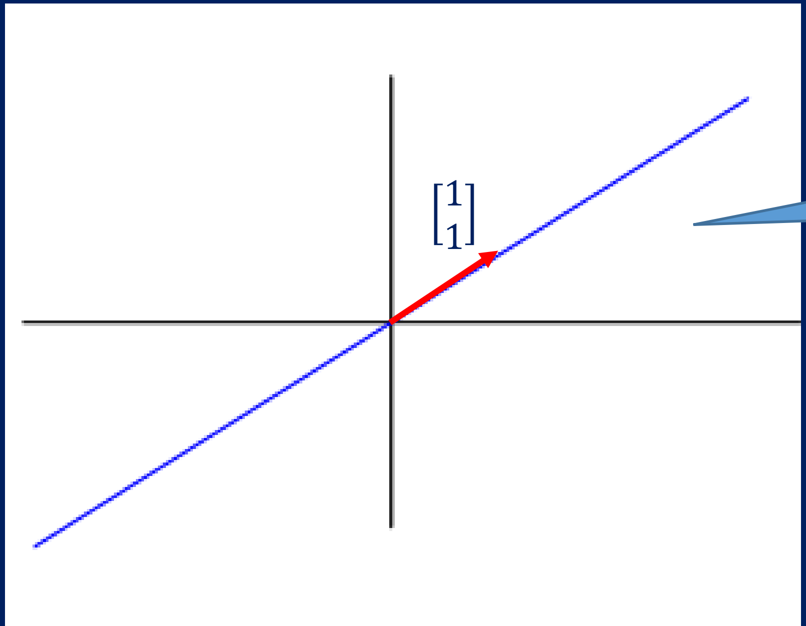
Τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ δεν παράγουν τον χώρο R^2 .

Λύση: Πράγματι, τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ είναι συγγραμμικά αφού $\boldsymbol{\overrightarrow{v_2}} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \boldsymbol{2 \cdot \overrightarrow{v_1}}$

Άρα όλα τα διανύσματα $\vec{\boldsymbol{x}}$ που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{2} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix} = (\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\lambda}) \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}$$

είναι συγγραμμικά με το $\overrightarrow{v_1}$, και το $\overrightarrow{v_2}$, δηλαδή ανήκουν σε μία ευθεία και δεν «καλύπτουν» όλο το επίπεδο!



Δηλαδή όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ ανήκουν σε μία ευθεία και <u>δεν</u> καλύπτουν όλο το επίπεδο!

Παράδειγμα 3-αλγεβρικός τρόπος λύσης

Τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ δεν παράγουν τον χώρο R^2 .

<u>Λύση</u>:

Πρέπει να εξετάσουμε αν για κάθε διάνυσμα $\vec{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix} \in R^2$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{2}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}\\\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x}\\\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{y}\end{cases}$$

Άγνωστοι κ, λ

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση αν και μόνον αν $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Αν $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x} = (x, y) \in R^2$ με $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, δεν μπορούν ν γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$.

Επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}$ και $\overrightarrow{v_2}$ <u>δεν</u> παράγουν το χώρο R^2!

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον R^n

- Αν έχουμε m διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ του χώρου του R^n, τότε
- θα τα ονομάζουμε γραμμικά ανεξάρτητα αν
- από τη σχέση $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{v_3} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \vec{0}, \lambda_i \in R$, έπεται αναγκαστικά ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

$$\boxed{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \vec{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2} = \cdots = \boldsymbol{\lambda_m} = \mathbf{0}}$$

- Διαφορετικά τα ονομάζουμε γραμμικά εξαρτημένα.

Άλλος ορισμός: Τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ ενός διανυσματικού χώρου R^n είναι γραμμικά εξαρτημένα ανν τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Παράδειγμα 4-γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, του χώρου R^4, είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Λύση:

Θα διερευνήσουμε για ποιους συντελεστές κ, λ, μ ο γραμμικός συνδυασμός $\kappa \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ δίνει το $\vec{0}$.

$$\kappa \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ \kappa + \lambda + \mu = 0 \\ \kappa - \lambda + 3\mu = 0 \\ -\kappa - 2\mu = 0 \end{cases}$$

Σύστημα

Άγνωστοι κ, λ, μ

$$A_E = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Επαυξημένος

$$A_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Επαυξημένος σε ανηγμ. κλιμ. μορφή

$$\begin{cases} \kappa = -2\mu \\ \lambda = \mu \end{cases}, \quad \mu \in R$$

Άπειρες Λύσεις

$rank(A_R) = 2 < 3$

Άρα υπάρχουν **άπειροι συνδυασμοί που μας δίνουν το $\vec{0}$.**

Επομένως τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα!**

Πράγματι:
$\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$

Παρατήρηση: Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον R^n

Η σχέση $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \vec{0}$, γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{v_m} = \vec{0} \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left[\overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \middle| \ldots \middle| \overrightarrow{v_m}\right]} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A_{n\times m} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}}}$$

Ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες

των διανυσμάτων $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$

Άρα το πρόβλημα διερεύνησης της γραμμικής ανεξαρτησίας m διανυσμάτων στο $\boldsymbol{R^n}$ ανάγεται στην επίλυση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος.

Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα $A_{n\times m} = \left[\overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_2} \middle| \ldots \middle| \overrightarrow{v_m}\right]$ και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα $A_{n\times m} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{\lambda} = \vec{0}$ (ανεξάρτητα) ή αν έχει άπειρες λύσεις (εξαρτημένα).

Αν $\boldsymbol{rank(A_{n\times m}) = m}$ τότε το σύστημα έχει μία κ αι μοναδική λύση τη μηδενική, άρα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Αν $\boldsymbol{rank(A_{n\times m}) < m}$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, άρα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

Παράδειγμα 5-γραμμική ανεξαρτησία

Τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\7\\6\\3\end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\-1\\5\\4\end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix}-3\\-3\\0\\-1\end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix}0\\4\\2\\1\end{bmatrix}$, του χώρου R^4, είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Λύση:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\7 & -1 & -3 & 4\\6 & 5 & 0 & 2\\3 & 4 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Έχουμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$,

όπου A ο πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$.

1) Μπορούμε να υπολογίσουμε την τάξη $\boldsymbol{r(A) = 4}$ μετατρέποντάς τον σε κλιμακωτό πίνακα, και να συμπεράνουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

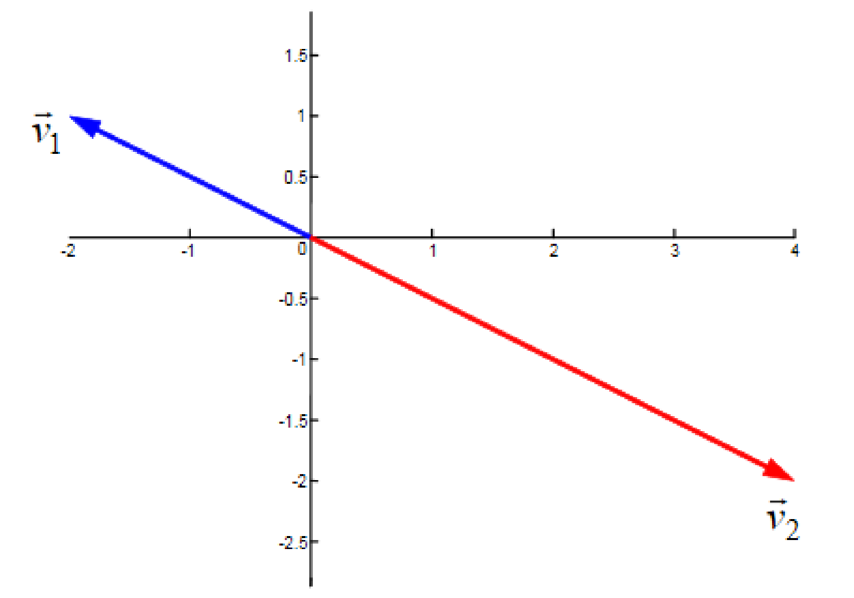
2) Εναλλακτικά, επειδή ο A είναι τετραγωνικός, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την ορίζουσά του: $\boldsymbol{det(A) = -56 \neq 0}$.

Επειδή $detA \neq 0$, το ομογενές σύστημα $A \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την μηδενική. Άρα τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στον R^2

- Δύο διανύσματα στον R^2 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι **συνευθειακά**

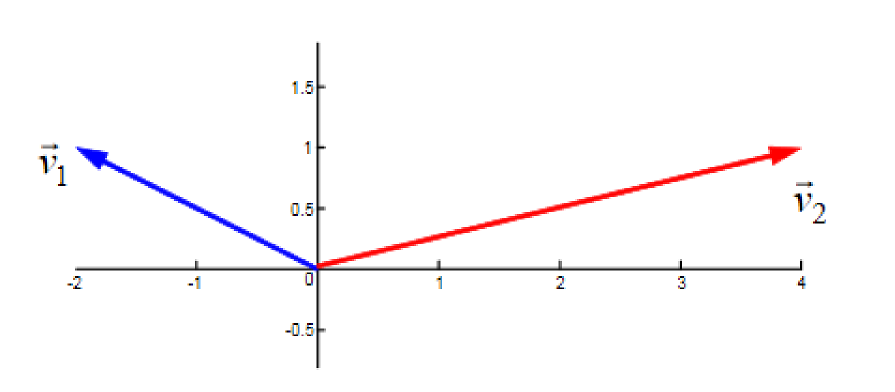
<u>Παράδειγμα</u>: Τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι $\overrightarrow{v_2} = -2 \cdot \overrightarrow{v_1}$



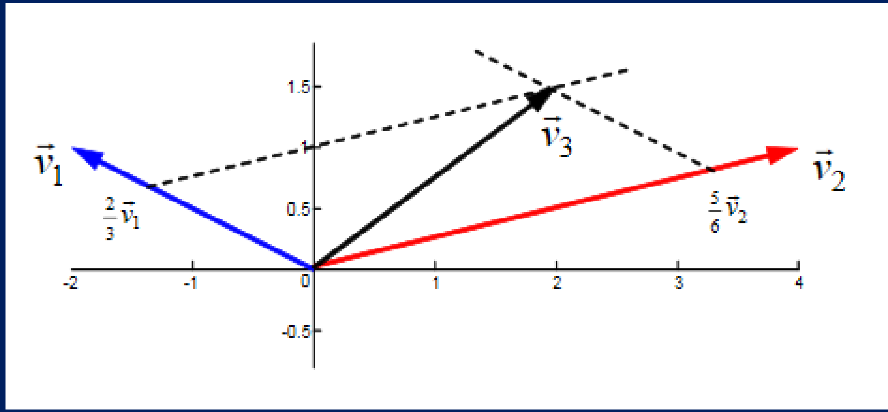
Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων στον R^2

- Επομένως, **δύο μη συνευθειακά** διανύσματα του R^2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Παράδειγμα</u>: Για τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, δεν υπάρχει $\lambda \in R$: $\overrightarrow{v_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_1}$



- Τρία και πλέον διανύσματα του R^2 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα



<u>Παράδειγμα</u>: Για τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ ισχύει:

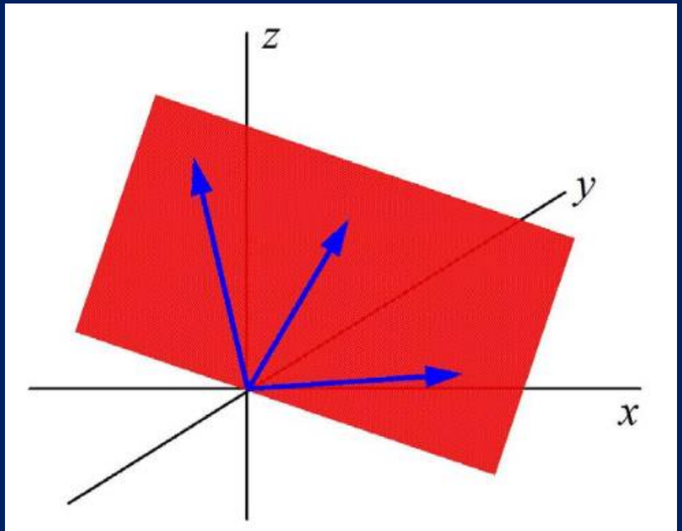
$$\overrightarrow{v_3} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{v_1} + \frac{5}{6} \cdot \overrightarrow{v_2}$$

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων στον R^3

- Δύο διανύσματα στον R^3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν είναι συνευθειακά

<ins>Παράδειγμα</ins>: Τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ και $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι $\overrightarrow{v_2} = -3 \cdot \overrightarrow{v_1}$

- Τρία συνεπίπεδα διανύσματα του R^3 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.



- Τέσσερα και πλέον διανύσματα του R^3 είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

Βάση του R^n

Το <u>σύνολο</u> $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}\}$ των m στοιχείων του R^n ονομάζεται <u>βάση</u> του R^n αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- 1) Τα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ <u>παράγουν</u> το χώρο R^n και
- 2) Τα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_m}$ είναι <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u>.

Π.χ.

Προφανώς τα διανύσματα $\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου R^2 .

Ομοίως τα n διανύσματα $\overrightarrow{e_1} = (1,0,\dots,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,\dots,0), \dots, \overrightarrow{e_n} = (0,0,\dots,1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου R^n .

Παρατηρήσεις για τη βάση ενός δ.χ. V

- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει άπειρες βάσεις. Δηλαδή υπάρχουν άπειρα σύνολα γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το χώρο V.

- Καθεμιά από τις άπειρες βάσεις ενός δ.χ. V έχει το ίδιο πλήθος διανυσμάτων.

Διάσταση ενός δ.χ. V είναι το πλήθος των διανυσμάτων κάθε βάσης του V και συμβολίζεται με $dim(V)$.

Σημείωση:

- $dim(V)$=μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V.
- $dim(R^n) = n$
- Το R^n έχει άπειρο πλήθος βάσεων οι οποίες έχουν όλες n το πλήθος διανύσματα.
- Αν k−το πλήθος διανύσματα του R^n με $k > n$, τότε αποδεικνύεται ότι αυτά είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.

Βάση στον R^2

- Αναφέραμε πως δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ του R^2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι μη παράλληλα. Ας δούμε πότε θα αποτελούν βάση.

- Σχηματίζουμε λοιπόν τον πίνακα $A_{2\times2} = [\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2}]$ και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα $A_{2\times2} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{\lambda} = \vec{0}$ (ανεξάρτητα) ή αν έχει άπειρες λύσεις (εξαρτημένα).

- Άρα αν $\boldsymbol{rank(A_{2\times2}) = 2}$ τότε τα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και στην προκειμένη περίπτωση αποτελούν και βάση του R^2.

- Εναλλακτικά, επειδή ο $A_{2\times2}$ είναι τετραγωνικός, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και την ορίζουσά του $\boldsymbol{det(A_{2\times2})}$. **Άρα θα αποτελούν βάση του $\boldsymbol{R^2}$ αν και μόνο αν $\boldsymbol{detA_{2\times2} \neq 0}$.**

Βάση στον R^3

- Δύο οποιαδήποτε μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ του R^3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά δεν αποτελούν βάση του R^3.

- Τρία οποιαδήποτε μη συνεπίπεδα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ του R^3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του R^3 αν και μόνο αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή αν το ομογενές σύστημα $A_{3\times3} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$, όπου $A_{3\times3} = [\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}]$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{\lambda} = \vec{0}$.

- Δηλαδή αν $\boldsymbol{rank(A_{3\times3}) = 3}$ τότε τα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ αποτελούν και βάση του R^3.

- Ή αλλιώς, αν $\boldsymbol{det(A_{3\times3}) \neq 0}$ τότε τα $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ αποτελούν και βάση του R^3.