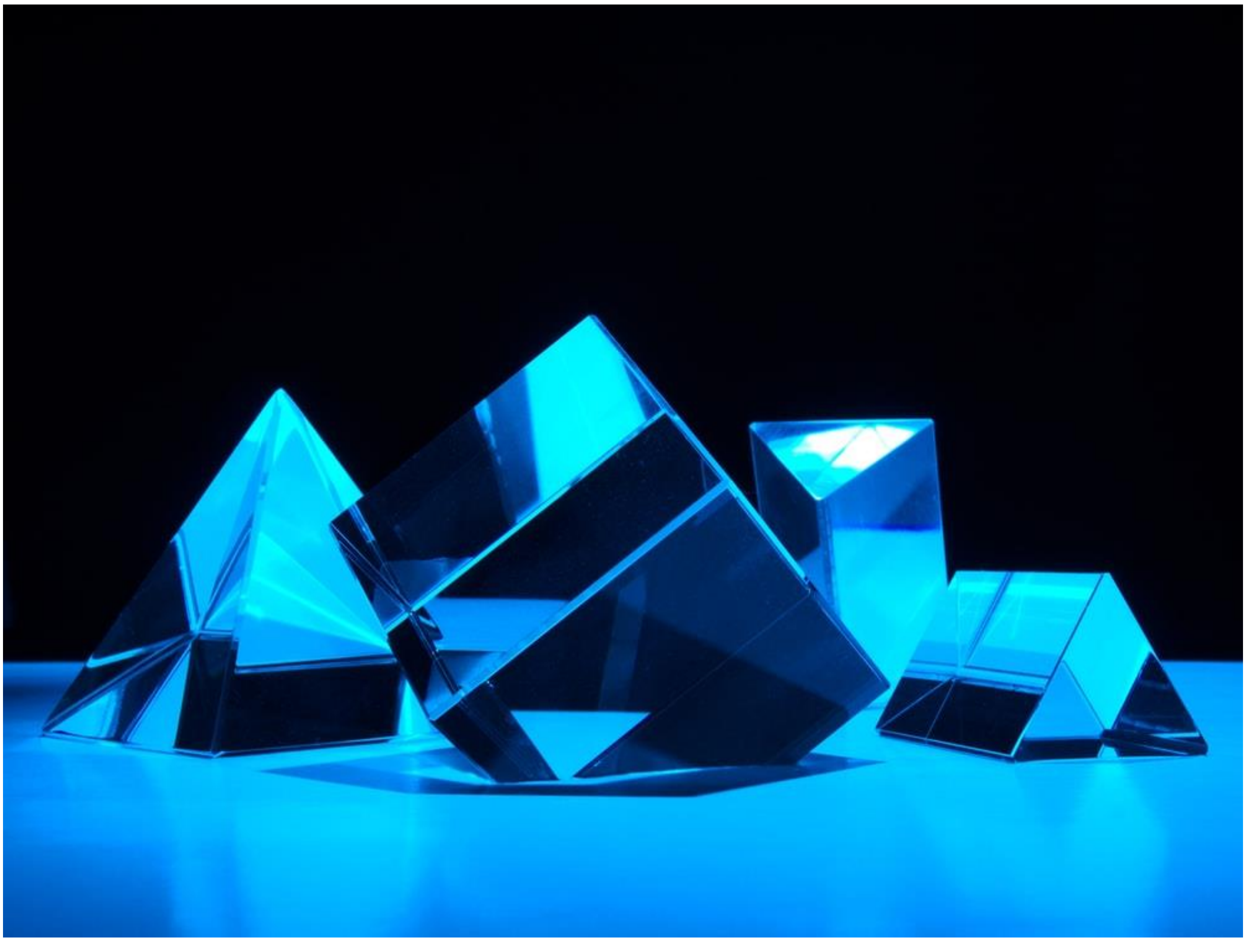

# 12α. Επαναληπτικές Ασκήσεις

Κάλλια Παυλοπούλου| Γραμμική Άλγεβρα | 2023-24

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Για έναν τετραγωνικό πίνακα $3 \times 3$ ισχύει ότι

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $B$. Ο πίνακας $B$ αντιστρέφεται; (δικαιολόγηση) Ο πίνακας $B$ διαγωνοποιείται; (δικαιολόγηση) Αν ναι, ποια είναι η διαγωνοποιημένη του μορφή και ποιος είναι ο πίνακας που τον διαγωνοποιεί; Να υπολογίσετε τον πίνακα $B$.

**Λύση**

Εύκολα προκύπτει ότι ιδιοτιμές είναι οι 3, 0, -2, αφού παρατηρούμε ότι:

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(3-\lambda)$

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι όλες διαφορετικές, ο πίνακας $B$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα είναι ο P.

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ο $B$ είναι διαγωνοποιήσιμος διότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές.

Ο $B$ δεν αντιστρέφεται διότι $detB = 3 \cdot 0 \cdot (-2)$=0 (γινόμενο ιδιοτιμών).

Άρα αρκεί να βρούμε τον αντίστροφο του $P$ για να υπολογίσουμε στη συνέχεια τον πίνακα $B$, από τη σχέση $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$$D = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Δίνεται ο $3 \times 3$ τετραγωνικός πίνακας $\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 1{,}00001 & 1 \\ 1{,}00001 & 1 & 1{,}00001 \\ 1 & 1{,}00001 & 1 \end{bmatrix}$. Να δείξετε ότι ο πίνακας $\Pi$ έχει μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή.

**Λύση**

Θέτουμε α=1,00001 . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Π είναι:

$$\chi_\Pi(\lambda) = det(\Pi - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 1 \\ \alpha & 1-\lambda & a \\ 1 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ \alpha & 1-\lambda & a \\ 1 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & 2a \\ 1 & \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot [(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - \alpha \cdot 2\alpha] = -\lambda \cdot (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2\,\alpha^2) =$$

$$= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\,\alpha^2)$$

Σημείωση:

1) Οι πράξεις που έγιναν για τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής $\Gamma 1 \to \Gamma 1 - \Gamma 3, \Sigma 3 \to \Sigma 3 + \Sigma 1$.
2) Για τον υπολογισμό της διακρίνουσας του τριωνύμου $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\,\alpha^2$ έχουμε $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 2\alpha^2) = 9 - 8 + 8\alpha^2 = 1 + 8\alpha^2 > 0$.

Επομένως μία ιδιοτιμή είναι το 0 και έστω $\lambda_1$ και $\lambda_2$ οι άλλες δύο ιδιοτιμές του $\Pi$. Άρα:

$$\chi_\Pi(\lambda) = det(\Pi - \lambda \cdot I_3) = -\lambda\, \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = -\lambda\, \cdot [\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\, \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2]\,.$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 - 2\,\alpha^2 = 2 \cdot\, (1 - \alpha^2) < 0\,, \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \alpha = 1{,}00001 > 1$ .
Αφού το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ είναι αρνητικό, συμπεραίνουμε πως **υπάρχουν δύο λύσεις ετερόσημες, μία θετική και μία αρνητική**.

**ΑΣΚΗΣΗ 3**

Αν το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 2 \\ d & e & f \end{bmatrix}, a, b, c, d, e, f \in R$ , τότε είναι και ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $M^3$ ;

Αν ναι, να δικαιολογήσετε την απάντησή σας και να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές των $M$ και $M^3$ που αντιστοιχούν στο $\vec{u}$ .

**Λύση**

Αφού $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $M$ τότε θα ισχύει:

$$M \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \Leftrightarrow = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 2 \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 4 - 2 + 2 \\ d - 2e + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 4 \\ d - 2e + f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Από όπου συμπεραίνουμε πως πρέπει να ισχύει $4 = -2\lambda$ , επομένως $\boldsymbol{\lambda = -2}$.

Αν λ ιδιοτιμή του $\vec{u}$ , τότε $M \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$. Τότε:

$$M^3 \cdot \vec{u} = (M^2 \cdot M) \cdot \vec{u} = M^2 \cdot (M \cdot \vec{u}) = M^2 \cdot (\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot (M^2 \cdot \vec{u}) =$$
$$= \lambda \cdot [M \cdot (M \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [M \cdot (\lambda \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [\lambda \cdot (M \cdot \vec{u})] = \lambda \cdot [\lambda \cdot (\lambda \cdot \vec{u})] = \lambda^3 \cdot \vec{u} .$$

Επομένως $\boldsymbol{M^3 \cdot \vec{u} = \lambda^3 \cdot \vec{u}}$ , δηλαδή το $\vec{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $M^3$ με ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda^3 = -8}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 4**

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & x & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Για ποια τιμή του $x$ ο $A$ διαγωνοποιείται;

**Λύση**

Ας υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ :

$$x_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & x & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)^2(1-\lambda).$$

Κατά συνέπεια, οι ιδιοτιμές του $A$ είναι :

$\lambda_1 = 2\ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda \acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1)$,

$\lambda_2 = 3\ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda \acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 2)\ \kappa\alpha\iota\ \lambda_3 = 1\ (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda \acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ 1)$

Για να διαγωνοποιείται ο $A$ θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου $V_3$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 3 να είναι ίση με 2.

Ας βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ , λύνοντας το σύστημα:

$$(A - 3 \cdot I_4) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & x & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_1 \to (-1) \cdot L_1}]{L_4 \to L_4 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Για να έχει ο ιδιόχωρος $V_3$ διάσταση 2 θα πρέπει $x = 0$ διότι το σύστημα θα έχει δύο ελεύθερες μεταβλητές, αφού από την κλιμακωτή μορφή συμπεραίνουμε ότι $rankC = 2$.

**ΑΣΚΗΣΗ 5**

**(i) Για ποιες τιμές των $\alpha, b \in R$ ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;**

**Λύση**

**(i)** Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $B$:

$$\chi_B(\lambda) = det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(b-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)^2 \cdot (b-\lambda).$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Αν $b = 2$ , τότε ο πίνακας $B$ έχει ιδιοτιμή $\lambda$=2 με πολλαπλότητα 3. Για να είναι ο $B$ διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου με ιδιοτιμή 2 να είναι ίση με 3, δηλαδή $dimV_2 = 3$. Ας δούμε το ομογενές σύστημα:

$$(B - 2\cdot I)\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & a \\ 3 & 0 & 2-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας μελετήσουμε το βαθμό του πίνακα του συστήματος:

$$rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2, \alpha\nu\ \alpha \neq 0 \\ 1, \alpha\nu\ \alpha = 0 \end{cases}. \quad \text{Επομένως} \begin{cases} dimV_2 = 3-2 = 1 \neq 3, \alpha\nu\ \alpha \neq 0 \\ dimV_2 = 3-1 = 2 \neq 3, \alpha\nu\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Άρα για $b = 2$ και $a \in R$, δεν διαγωνοποείται ο $B$ .

2) Αν $b \neq 2$ , τότε ο πίνακας $B$ έχει ιδιοτιμή $\lambda$=2 με πολλαπλότητα 2 και ιδιοτιμή $\lambda = b$ με πολλαπλότητα 1. Σε αυτή την περίπτωση για να είναι ο πίνακας διαγωνοποιήσιμος θα πρέπει $dimV_2 = 2$. Ας δούμε το ομογενές σύστημα:

$$(B - 2\cdot I)\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ας μελετήσουμε το βαθμό του πίνακα του συστήματος:

$$rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2, \alpha\nu\ \alpha \neq 0 \\ 1, \alpha\nu\ \alpha = 0 \end{cases}. \quad \text{Επομένως} \begin{cases} dimV_2 = 3-2 = 1 \neq 2, \alpha\nu\ \alpha \neq 0 \\ dimV_2 = 3-1 = 2, \alpha\nu\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & b-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

Άρα για $\alpha = 0\ και$ και $b \neq 2$, ο πίνακας $B$ διαγωνοποείται.

**(ii) Για $\boldsymbol{a = 0}$ και για $\boldsymbol{b = 1}$, να βρείτε τον διαγώνιο πίνακα $\boldsymbol{D}$ που είναι όμοιος με τον $\boldsymbol{B}$ καθώς και τον πίνακα $\boldsymbol{P}$ που τον διαγωνοποιεί.**

<u>**Λύση (ii)**</u> Για $a = 0$ και για $b = 1$ έχουμε $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές του (από το πρώτο σκέλος της άσκησης) είναι *λ=2* με πολλαπλότητα 2 και ιδιοτιμή $\lambda = b = 1$ με πολλαπλότητα 1. Άρα ο όμοιος πίνακας με τον $B$ είναι ο $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα με ιδιοτιμή λ=2 λύνουμε το σύστημα:

$$(B - 2 \cdot I) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 3 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε δηλαδή την εξίσωση: $3x - z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{z}{3}$. Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι: $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y, z \in R \right\}$.

- Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ=1 λύνουμε το σύστημα:

$$(B - 1 \cdot I) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα έχει τη μορφή: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in R \end{cases}$.

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι: $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R \right\}$.

Και ο πίνακας $P$ που διαγωνοποιεί τον $B$ είναι ο εξής: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 6**

**(i)** **Για ποιες τιμές του $\boldsymbol{b \in R}$ ο πίνακας $\boldsymbol{\Gamma = \begin{bmatrix} b-6 & 0 & 2-b \\ 6 & -1 & -6 \\ b-2 & 0 & -b-2 \end{bmatrix}}$ είναι διαγωνοποιήσιμος;**

**Λύση**

(i) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\Gamma$:

$$\chi_\Gamma(\lambda) = \det(\Gamma - \lambda I) = \begin{vmatrix} b-6-\lambda & 0 & 2-b \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ b-2 & 0 & -b-2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} b-6-\lambda & 2-b \\ b-2 & -b-2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot [(b-6-\lambda) \cdot (-b-2-\lambda) - (2-b)(b-2)] =$$

$$= -(\lambda+1)(-b^2 - 2b - b\lambda + 6b + 12 + 6\lambda + b\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + b^2 + 4 - 4b)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2 + 8\lambda + 16) = -\boldsymbol{(\lambda+1)(\lambda+4)^2}.$$

Κατά συνέπεια, οι ιδιοτιμές του $\Gamma$ είναι :

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -1\ (πολλαπλότητα\ 1)\ και\ \lambda_2 = \lambda_3 = -4\ (πολλαπλότητα\ 2)}$$

Για να δούμε αν διαγωνοποείται ή όχι ο πίνακας $\Gamma$ μπορούμε να το ελέγξουμε με δύο τρόπους:

1ος) Με τη γεωμετρική πολλαπλότητα, δηλαδή η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα 2, να είναι και αυτή 2 [dim$V_{-4}$=$n - rank(\Gamma - \lambda I)$ ]

Για να διαγωνοποιείται ο $\Gamma$ θα πρέπει η διάσταση του ιδιόχωρου $V_{-4}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -4 να είναι ίση με 2.

$$[\Gamma - (-4) \cdot I_3] \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{b-2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2-b} \\ \boldsymbol{6} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-6} \\ \boldsymbol{b-2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2-b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)x - (b-2)z = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \\ (b-2)x - (b-2)z = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

- Αν $b \neq 2$ τότε

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0, z \in R. \\ x = z \end{cases}$$

Άρα

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R \right\}$$

Δηλαδή αν $b \neq 2$ έχουμε ένα ιδιοδιάνυσμα , $dimV_{-4} = 1$ και ο $Γ$ δεν διαγωνοποιείται.

- Αν $b = 2$ τότε

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases} 0=0 \\ 6x+3y-6z=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z=0 \Leftrightarrow y=-2x+2z, x,y\in R \\ 0=0 \end{cases}$$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-2x+2z\\z\end{bmatrix}=x\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+z\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, x,z\in R\right\}$$

Δηλαδή αν $b = 2$ έχουμε $dimV_{-4} = 2$ και ο $Γ$ διαγωνοποιείται.

2ος) Ο Γ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.
Αν $m_Γ(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+4)$. Θα ελέγξουμε αν ο $Γ$ το μηδενίζει.
Κάνοντας πράξεις:

$$(Γ+I_3)(Γ+4I_3)=0_3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b^2-7b+10 & 0 & 3b-6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3b+6 & 0 & 3b-6 \end{bmatrix}=0_3 \Leftrightarrow b=2$$

**(ii) Για τις τιμές που υπολογίσατε να βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα Γ.**

- **<u>Λύση (ii)</u>** Για $b = 2$ έχουμε για την ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda_3 = -4}$ ($\boldsymbol{πολλαπλ}$**ό**$\boldsymbol{τητα\ 2}$) έχουμε τα ιδιοδιανύσματα $\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$ και $\overrightarrow{u_3} = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

Θα υπολογίσουμε το ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ ($\boldsymbol{πολλαπλ}$**ό**$\boldsymbol{τητα\ 1}$):

- Για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ λύνουμε το σύστημα:

$$(Γ+1\cdot I)\cdot\overrightarrow{u_1}=0$$

$$[Γ-(-1)\cdot I_3]\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{-4+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-1+1} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-4+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x=0\\6x+0y-6z=0\\-3z=0\end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y \in R \right\}$$

Και βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως μία διαγωνοποίηση του $\Gamma$ είναι η εξής:

$$\Gamma = P \cdot D \cdot P^{-1} = [\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_3}] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot [\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_3}]^{-1}.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 7**

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu\times\nu$ αντιστρέψιμο πίνακα $A$, ισχύει $|\boldsymbol{adjA}| = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{\nu-1}}$ και $\boldsymbol{adj(adjA) = |A|^{\nu-2} \cdot A}$.

**Λύση**

**(α) Για οποιονδήποτε $\nu\times\nu$ πίνακα $A$, ισχύει**

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{detA} \cdot adjA \Leftrightarrow I = A \cdot adjA \cdot \frac{1}{detA} \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{A \cdot adjA = detA \cdot I \Leftrightarrow A \cdot adjA = |A| \cdot I}$$

$\boldsymbol{A \cdot adjA = |A| \cdot I \Rightarrow |A \cdot adjA| = \big||A| \cdot I\big| \Rightarrow |A| \cdot |adjA| = |A|^{\nu}}$***(αριθμός επί ορίζουσα του μοναδιαίου)***

**Αφού ο $\boldsymbol{A}$ είναι αντιστρέψιμος και $\boldsymbol{|A| \neq 0}$ προκύπτει**

$$\boldsymbol{|adjA| = |A|^{\nu} \cdot \frac{1}{|A|} \Leftrightarrow |adjA| = |A|^{\nu-1}}$$

**Άρα**

$$\boldsymbol{|adjA| = |A|^{\nu-1}} \textbf{ (1)}$$

**(β) Για το δεύτερο σκέλος, έχουμε**

$$\boldsymbol{A \cdot adjA = |A| \cdot I \Rightarrow adjA = |A| \cdot A^{-1} \Rightarrow (adjA)^{-1} = |A|^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{|adjA|} \cdot adj(adjA) = |A|^{-1} \cdot A \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{|A|^{\nu-1}} \cdot adj(adjA) = |A|^{-1} \cdot A \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{adj(adjA) = |A|^{\nu-1} \cdot |A|^{-1} \cdot A \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{adj(adjA) = |A|^{\nu-2} \cdot A}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Έστω δύο τετραγωνικοί πίνακες $A$ και $B$ τέτοιοι ώστε ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, $AB = BA$ και $\lambda_0$ μια απλή ιδιοτιμή του $B$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\overrightarrow{x_0}$. Να αποδείξετε ότι το $\overrightarrow{x_0}$ είναι ιδιοδιάνυσμα και του $A$.

**Λύση**

Από τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, έχουμε $\overrightarrow{x_0} \neq \vec{0}$ και

$$B \cdot \overrightarrow{x_0} = \lambda_0 \cdot \overrightarrow{x_0} \Rightarrow A \cdot B \cdot \overrightarrow{x_0} = A \cdot \lambda_0 \cdot \overrightarrow{x_0} \Rightarrow B \cdot (A \cdot \overrightarrow{x_0}\,) = \lambda_0 \cdot (A \cdot \overrightarrow{x_0}\,)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $A \cdot \overrightarrow{x_0}$ (το οποίο είναι μη μηδενικό διότι ο πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος και $\overrightarrow{x_0} \neq \vec{0}$) είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $B$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0$.

Επειδή όμως αυτή η ιδιοτιμή είναι απλή, έχει πολλαπλότητα 1 και πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{x_0}$ και $A \cdot \overrightarrow{x_0}$ να είναι συγγραμμικά.

Άρα υπάρχει αριθμός $\mu_0$ τέτοιος ώστε $A \cdot \overrightarrow{x_0} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{x_0}$ και το $\overrightarrow{x_0}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\mu_0$ του $A$ .