



# Γραμμική Άλγεβρα

## 12. Θεώρημα Cayley-Hamilton- Ελάχιστο Πολυώνυμο

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

## Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

1) Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

2) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $A$  «ικανοποιεί» την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλαδή μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο:

$$X_A(A) = A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_A(A) = \mathbf{0}_{2 \times 2}$$

Αυτό δεν είναι τυχαίο. Ισχύει το επόμενο θεώρημα:

# Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κάθε πίνακας  $A \in M_{n \times n}$  μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n), \text{ δηλαδή}$$

$$X_A(A) = \mathbf{0}_{n \times n}$$

## Σημείωση:

Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$  είναι το

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0, \text{ τότε}$$

$$X_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I_n = \mathbf{0}_{n \times n}$$

Προσοχή! Το θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες, όχι μόνο για τους διαγωνοποιήσιμους.

Σημαντικό! Το θεώρημα Cayley-Hamilton μας δίνει τη δυνατότητα να διαχειριζόμαστε δυνάμεις και πολυώνυμα πινάκων υψηλού βαθμού.

# Παράδειγμα 2-μια εφαρμογή του Θεωρήματος Cayley-Hamilton

• Έχουμε τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)^3 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

Σύμφωνα με θεώρημα Cayley-Hamilton:

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow -A^3 + 6 \cdot A^2 - 12A + 8 \cdot I_3 = \mathbf{0}_3$$

$$\Leftrightarrow A \cdot (-A^2 + 6 \cdot A - 12 \cdot I_3) = -8 \cdot I_3$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \left\{ \frac{1}{8} (A^2 - 6 \cdot A + 12 \cdot I_3) \right\} = I_3$$

Ο αντίστροφος  
του A

Κάνοντας πράξεις υπολογίζουμε:  $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

## Παράδειγμα 3

Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ . Να υπολογίσετε τους πίνακες  $A^{-1}, A^5$ .

### Λύση:

1) Υπολογίζουμε την ορίζουσα  $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$ .

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2$$

2) Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι  $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$  έχει μόνο μία πραγματική λύση την  $\lambda_1 = -1$  και  $\lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$ .

3) Μπορούμε να υπολογίσουμε τους ζητούμενους πίνακες αφού βρούμε τα ιδιοδιανύσματα και τον διαγωνοποιήσουμε. Αποφεύγουμε όμως όλη τη διαδικασία των πράξεων με τη βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, ως εξής:

## Παράδειγμα 3 – Λύση (συνέχεια)

- Ισχύει ότι
- $\chi_A(A) = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow$
- $-A^3 + 3A^2 - 4A + 2I_3 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow$
- $A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow$
- $A(A^2 - 3A + 4I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \left[ \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 4I_3) \right] = I_3$

Άρα

$$\bullet A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 4I_3) = \frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A + 2I_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

## Παράδειγμα 3 – Λύση (συνέχεια)

- Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε:

$$A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^3 = 3A^2 - 4A + 2I_3$$

- Για τον υπολογισμό του πίνακα  $A^5$  χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του θεωρήματος Cayley-Hamilton έχουμε:

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = (3A^2 - 4A + 2I_3)A^2 = 3A^4 - 4A^3 + 2A^2 = 3AA^3 - 4A^3 + 2A^2 =$$

$$3A(3A^2 - 4A + 2I_3) - 4(3A^2 - 4A + 2I_3) + 2A^2 =$$

$$9A^3 - 12A^2 + 6A - 12A^2 + 16A - 8I_3 + 2A^2 =$$

$$9(3A^2 - 4A + 2I_3) - 12A^2 + 6A - 12A^2 + 16A - 8I_3 + 2A^2 =$$

$$27A^2 - 36A + 18I_3 - 12A^2 + 6A - 12A^2 + 16A - 8I_3 + 2A^2 =$$

$$5A^2 - 14A + 10I_3$$



## Παράδειγμα 3 – Λύση (συνέχεια)

- Για τον υπολογισμό του πίνακα  $A^5$ , θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την ευκλείδια διαίρεση:

$$\bullet \lambda^5 = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2)(\lambda^2 + 3\lambda + 5) + (5\lambda^2 - 14\lambda + 10).$$

- Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε :

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3 = \mathbf{0}_3$$

Άρα

$$\bullet A^5 = (A^3 - 3A^2 + 4A - 2I_3)(A^2 + 3A + 5I_3) + (5A^2 - 14A + 10I_3) \Leftrightarrow$$

$$\bullet A^5 = \mathbf{0}_3 \cdot (A^2 + 3A + 5I_3) + (5A^2 - 14A + 10I_3) \Leftrightarrow$$

$$\bullet A^5 = 5A^2 - 14A + 10I_3$$

## Παράδειγμα 4

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογίσετε

(α) μία διαγωνοποίηση του πίνακα  $A$ .

(β) Μία διαγωνοποίηση του  $A^5$ .

(γ) Τον  $A^5$ .

(δ) Τον  $A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}$ .

Λύση:

(α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ -2 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) \cdot [(-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4] = \\ &= -(2 + \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = -(\lambda + 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4. \end{aligned}$$

## Παράδειγμα 4– Λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι  $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$  έχει πραγματικές λύσεις τις  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$  και  $\lambda_3 = 1$ .

Για την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$  υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα:  $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  και  $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Για την ιδιοτιμή  $\lambda_3 = 1$  υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα:  $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Άρα ο  $A$  διαγωνοποιείται (αφού στην διπλή ιδιοτιμή αντιστοιχούν 2 ιδιοδιανύσματα) ως εξής:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

## Παράδειγμα 4– Λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(β) Άρα ο  $A$  διαγωνοποιείται (αφού στην διπλή ιδιοτιμή αντιστοιχούν 2 ιδιοδιανύσματα) ως εξής:

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(γ) Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε:  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 - 4I_3 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^4 + 3A^3 - 4A = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^4 = -3A^3 + 4A$$

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 - 4I_3 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^5 + 3A^4 - 4A^2 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^5 = -3A^4 + 4A^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^5 = -3(-3A^3 + 4A) + 4A^2 \Leftrightarrow A^5 = 9A^3 + 4A^2 - 12A$$

$$\Leftrightarrow A^5 = 9(-3A^2 + 4I_3) + 4A^2 - 12A \Leftrightarrow A^5 = -27A^2 + 36I_3 + 4A^2 - 12A$$

$$\Leftrightarrow A^5 = -23A^2 - 12A + 36I_3$$

## Παράδειγμα 4- Λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(δ) Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε :

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 - 4I_3 = \mathbf{0}_3 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 = 4I_3 \Leftrightarrow A(A^2 + 3A) = 4I_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \frac{1}{4}(A^2 + 3A) = I_3 \quad \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 + 3A) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 + 3A) \Leftrightarrow A^{-2} = \frac{1}{4}(A^2 + 3A) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^{-2} = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$$

$$\Leftrightarrow A^{-2} \cdot A^{-1} = \frac{1}{4}(A + 3I_3) \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^{-3} = \frac{1}{4}(I_3 + 3A^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} A^{-3} = \frac{1}{4} \left[ I_3 + 3 \cdot \frac{1}{4}(A^2 + 3A) \right] \Leftrightarrow A^{-3} = \frac{1}{4}I_3 + \frac{3}{16}(A^2 + 3A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{-3} = \frac{1}{4}I_3 + \frac{3}{16} \cdot A^2 + \frac{9}{16} \cdot A$$

## Ελάχιστο πολυώνυμο

Έστω  $A$  ένας πίνακας  $n \times n$ . Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο  $p(x)$  λέγεται ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  αν ισχύουν τα παρακάτω:

- 1)  $p(A) = 0$
- 2) Έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα
- 3) Κάθε άλλο πολυώνυμο  $q(x)$  με  $q(A) = 0$  έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με του  $p(x)$ .
- 4) Το  $p(x)$  διαιρεί ακριβώς κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον  $A$ .

- Το ελάχιστο πολυώνυμο (the minimum polynomial) είναι το μοναδικό μη μηδενικό πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού, που μηδενίζεται από τον τετραγωνικό πίνακα κι έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με 1. Συμβολίζεται  $m_A(\lambda)$ .

# Ελάχιστο πολυώνυμο

Ισχύουν τα εξής:

1) Το ελάχιστο πολυώνυμο  $m_A(\lambda)$  είναι μοναδικό.

2) Κάθε ιδιοτιμή του  $A$  είναι ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου  $m_A(\lambda)$

Σημ: πιθανώς με μικρότερες πολλαπλότητες.

3) Εάν το  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{\alpha_n}$

τότε το  $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{b_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{b_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{b_n}$

Όπου  $1 \leq b_1 \leq \alpha_1, 1 \leq b_2 \leq \alpha_2, \dots, 1 \leq b_n \leq \alpha_n$ .

4) Το  $m_A(\lambda)$  διαιρεί πάντα το  $\chi_A(\lambda)$ .

5) Αν το  $\chi_A(\lambda)$  έχει  $n$  διακεκριμένες ρίζες πολλαπλότητας 1 τότε

$$\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$$

## Ελάχιστο πολυώνυμο-διαγωνοποίηση

- Ισχύει το εξής:

- Ο τετραγωνικός  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν όλες οι ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου του  $m_A(\lambda)$  είναι απλές (πολλαπλότητας 1), δηλαδή

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$



## Θεώρημα

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος

2) Υπάρχουν  $n$  το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του  $A$

3) Το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλαδή της μορφής :

$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$ , όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  είναι ανά δύο διάφοροι.

## Παράδειγμα 5

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

### Λύση:

$$1) \det(A - \lambda I_3) = X_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8)$$

2) Πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 8) \text{ ή } (\lambda + 1)(\lambda - 8)$$

3) Παρατηρούμε ότι:

$$(A + I_3)(A - 8I_3) = \begin{bmatrix} 3 + 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 + 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 - 8 & 2 \\ 4 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_3$$

$$\text{Άρα } m_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 8) = \lambda^2 - 7\lambda - 8$$

Επομένως ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

## Παράδειγμα 6

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Λύση:

1)  $\det(A - \lambda I_3) = X_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$

2) Πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) \text{ ή } (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

3) Παρατηρούμε ότι:

$$(A - 2I_3)(A - I_3) \neq 0_3$$

$$\text{Άρα } m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Επομένως ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.