



Γραμμική Άλγεβρα

11. Διαγωνοποίηση Πίνακα

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Ορισμοί

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα $D \in M_{n \times n}$.

Λέμε ότι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα D , αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D$$

Σημ: Σημαντική εφαρμογή της διαγωνοποίησης είναι ο υπολογισμός δυνάμεων!

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D \text{ ή αλλιώς } A = PDP^{-1}$$

όπου D διαγώνιος πίνακας $D \in M_{n \times n}$.

Ο πίνακας P διαγωνοποιεί τον A .

Ο πίνακας D είναι ο όμοιος διαγώνιος του A .

Ιδιότητες ομοίων πινάκων

Αν $A, B \in M_{n \times n}$ όμοιοι πίνακες, δηλ. υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$P^{-1}AP = B, \text{ τότε } \begin{cases} \det A = \det B \\ X_A(\lambda) = X_B(\lambda) \\ B^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Απόδειξη 1

$$A) P^{-1}AP = B \Rightarrow \det(P^{-1}AP) = \det B \Rightarrow$$

$$(\det P^{-1}) \cdot (\det A) \cdot (\det P) = \det B \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\det P} \cdot (\det A) \cdot (\det P) = \det B \Rightarrow \det A = \det B.$$

- Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει!

Δηλαδή, αν δύο πίνακες $A, B \in M_{n \times n}$ έχουν $\det A = \det B$, αυτό δεν σημαίνει ότι είναι και όμοιοι!!!!

Απόδειξη 1

$$\Gamma) P^{-1}AP = B \Rightarrow (P^{-1}AP)^k = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdot \dots \cdot (P^{-1}AP) = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet P^{-1}A(P P^{-1})A(P P^{-1}) \dots (P P^{-1})AP = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet P^{-1}AIAI \dots IAP = B^k \Rightarrow$$

$$\bullet P^{-1}AA \dots AP = B^k \Rightarrow P^{-1}A^kP = B^k$$

Παρατήρηση

Αφού $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$, αυτό σημαίνει ότι οι δυο πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Πρόταση

Αν ο $A \in M_{n \times n}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε ο P που τον διαγωνοποιεί έχει ως στήλες n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A και ο διαγώνιος D έχει στη διαγώνιό του τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A , δηλαδή:

$$P = [\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \dots | \vec{x}_n] \text{ και } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές λ_i , $1 \leq i \leq n$ είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P .

Και επομένως ισχύει: $A = PDP^{-1}$

Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων

- 1) Δημιουργία του πίνακα $[A - \lambda I_n]$, ο οποίος προκύπτει από τον A με την αφαίρεση της παραμέτρου λ από την κύρια διαγώνιο.
 - 2) Υπολογισμός της $\det(A - \lambda I_n) = X_A(\lambda)$, δηλ. του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A ως προς λ .
 - 3) Επίλυση της εξίσωσης $X_A(\lambda) = 0$, δηλ. της $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Οι διαφορετικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ (με $\rho \leq n$) αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A .
 - 4) Βρίσκουμε μια βάση B_{λ_1} του χώρου $V_{\lambda_1}(A)$.
- Βρίσκουμε μια βάση B_{λ_2} του χώρου $V_{\lambda_2}(A)$
- ⋮
- Βρίσκουμε μια βάση B_{λ_ρ} του χώρου $V_{\lambda_\rho}(A)$

Βήματα για τη διαγωνοποίηση πινάκων (συνέχεια)

5) Θεωρούμε το σύνολο $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \dots \cup B_{\lambda_p}$.

6) Αν το B έχει n διανύσματα τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, αλλιώς όχι.

7) Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή αν $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ τότε:

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{array} \right] \text{ και } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Πίνακας με στήλες τις συνιστώσες των ιδιοδιανυσμάτων

Όπου οι ιδιοτιμές λ_i , $1 \leq i \leq n$ είναι τοποθετημένες στον D με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P .

Παράδειγμα 1

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3 \times 3}$ με $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A .

B) Να δείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα P που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D .

Γ) Να βρείτε τον A^{80} .

Δ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα $\det A$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Παράδειγμα 1α-λύση

Α) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A :

$$\begin{aligned} X_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3 - \lambda) \cdot [-\lambda(3 - \lambda) - 4] - 2[2(3 - \lambda) - 8] + 4(4 + 4\lambda) = \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 2(-2\lambda - 2) + 16(\lambda + 1) = \\ &= (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 4) + 20(\lambda + 1) = (\lambda + 1)[(3 - \lambda)(\lambda - 4) + 20] = \\ &= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = \boxed{-(\lambda + 1)^2(\lambda - 8)}. \end{aligned}$$

Δηλαδή: $X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8.$

• Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ (διπλη)} \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$$

• Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι εξής: $\lambda_1 = -1$ (διπλη) και $\lambda_2 = 8.$

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Β) Για να δούμε αν ο A διαγωνοποιείται, πρέπει να βρούμε μια βάση B_{λ_1} του ιδιόχωρου του A ως προς κάθε ιδιοτιμή του $V_{\lambda_1}(A)$, άρα πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή.

1) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε :

$$(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow [A - (-1)I_3]\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_1}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow \frac{1}{4}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

y, z ελεύθερες μεταβλητές

x βασική μεταβλητή

Επίλυση ομογενούς συστήματος

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε λοιπόν:

$$(A - \lambda_1 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{cases}, y \in R, z \in R.$$

- Άρα ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R, z \in R.$$

Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι:

$$B_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

2) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε :

$$(A - \lambda_2 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow [A - 8 \cdot I_3] \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - 2\gamma_2]{\gamma_1 \rightarrow -\frac{1}{5}\gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 2 & -8 & 2 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος

x, y βασικές μεταβλητές

z ελεύθερη μεταβλητή

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ έχουμε λοιπόν:

$$(A - \lambda_2 I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow U_2 \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}z, z \in R. \\ z \end{cases}$$

Λύση ομογενούς συστήματος

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Άρα ο ιδιοχώρος $V_8(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}.$

Και μια βάση B_8 του ιδιοχώρου $V_8(A)$ είναι:

$$B_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Εύρεση του συνόλου } B = B_{-1} \cup B_8 = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Άρα το B έχει 3 διανύσματα και άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Επειδή $n = 3$ συνεπάγεται ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα 1β-λύση (συνέχεια)

Εύρεση διαγώνιου πίνακα :

- Άρα ο πίνακας P που διαγωνοποιεί τον A είναι ο εξής:

Ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα του B .

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ο αντίστοιχος διαγώνιος όμοιος με τον A είναι ο εξής:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ και } A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο τοποθετημένες με την ίδια σειρά που είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα στον P .

Παράδειγμα 1γ-λύση (συνέχεια)

Γ) Υπολογισμός του A^{80} : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

- Γνωρίζουμε ότι $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1}$.

Επομένως:

$$D^{80} = \begin{bmatrix} (-1)^{80} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{80} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix}$$

- Με απαλοιφή Gauss-Jordan βρίσκουμε:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Αν $A, B \in M_{n \times n}$ όμοιοι πίνακες δηλ.

$P^{-1}AP = B$ τότε ισχύει

$B^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in \mathbb{N}$

Αν D διαγώνιος πίνακας η νιοστή δύναμη του D είναι ίση με τον πίνακα με υψωμένα εις την n μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου.

Παράδειγμα 1γ-λύση (συνέχεια)

Επομένως: • $A^{80} = P \cdot D^{80} \cdot P^{-1} =$

$$\bullet = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{240} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \dots =$$

$$A^{80} = \begin{bmatrix} \frac{5 + 2^{242}}{9} & \frac{2^{241} - 2}{9} & \frac{2^{242-4}}{9} \\ \frac{2^{241} - 2}{9} & \frac{2^{240} + 8}{9} & \frac{2^{241} - 2}{9} \\ \frac{2^{242} - 4}{9} & \frac{2^{241} - 2}{9} & \frac{5 + 2^{242}}{9} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1δ-λύση (συνέχεια)

Δ) Υπολογισμός $\det A$

Α' τρόπος: $\det A = X_A(0) = -0^3 + 6 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 8 = 8$. Άρα $\det A = 8$.

Β' τρόπος:

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A ως **γινόμενο των ιδιοτιμών**:

• A, D ομοιοι πίνακες $\Rightarrow \det A = \det D \xrightarrow{D \text{ διαγώνιος}}$

$\det D = \text{γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων} \Rightarrow \det D = \text{γινόμενο των ιδιοτιμών του } A!$

Άρα $\det A = (-1) \cdot (-1) \cdot 8 = 8$ 

ΠΡΟΣΟΧΗ! Την ιδιοτιμή $\lambda = -1$ η οποία είναι διπλή (έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2) την χρησιμοποιούμε 2 φορές! Αντίστοιχα, αν είχαμε μια τριπλή ιδιοτιμή θα τη χρησιμοποιούσαμε τρεις φορές, κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2 (για λύση)

- Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3 \times 3}$ με $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- Α) Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και τις ιδιοτιμές του A .
- Β) Να δείξετε ότι ο A διαγωνοποιείται και να βρείτε έναν πίνακα P που τον διαγωνοποιεί καθώς και τον αντίστοιχο διαγώνιο D .
- Γ) Να υπολογίσετε άμεσα την ορίζουσα $\det A$ με χρήση του $X_A(\lambda)$ που βρήκατε.

Παράδειγμα 2α-Λύση

Α) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(\lambda)$ και ιδιοτιμές του A :

$$\begin{aligned} \bullet X_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) \cdot [(1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2] = (2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2) \\ &= (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (2 - \lambda) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3). \end{aligned}$$

$$X_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

• Για να βρούμε τις ιδιοτιμές θέτουμε:

$$X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (διπλη)} \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ (διπλη) και $\lambda_2 = 3$.

Συνεχίστε την επίλυση του 2β και 2γ όπως στο παράδειγμα 1.

Πρόταση

- Ο πίνακας $A \in M_{n \times n}$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\dim V_{\lambda_1}(A) + \dim V_{\lambda_2}(A) + \cdots + \dim V_{\lambda_\rho}(A) = n$$

- Όπου όλες $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ με $\rho \leq n$ όλες οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του A .

Παρατήρηση

- Έχουμε δει ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Άρα αν ο $A \in M_{n \times n}$ έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές τότε διαγωνοποιείται.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν όμως κάποια ιδιοτιμή είναι διπλή, τριπλή κ.τ.λ. τότε το αν ο A διαγωνοποιείται ή όχι εξαρτάται από το πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να βρούμε συνολικά για όλες τις ιδιοτιμές.