



Γραμμική Άλγεβρα

Ασκήσεις

11α. Διαγωνοποίηση Πίνακα

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Άσκηση 1

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας A τέτοιος ώστε: $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

- I. Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και τις ιδιοτιμές του.
- II. Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που βρήκατε στο (i), μπορείτε να αποφασίσετε αν ο A διαγωνοποιείται και αν αντιστρέφεται; (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)
- III. Αν ο A διαγωνοποιείται, να βρείτε μια διαγωνοποίησή του, δηλαδή, να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον A και έναν διαγώνιο πίνακα D όμοιο με τον A .
- IV. Αν αντιστρέφεται, να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του A^{-1} , χωρίς να βρείτε τον αντίστροφο πίνακα του A .

Άσκηση 1-λύση

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές}$$

(i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -12 & 4 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ \bullet \quad &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} - (-12) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \\ \bullet \quad &= (3 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 10) + 12(\lambda - 1) + 4(-5 - \lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2. \end{aligned}$$

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $x_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$.

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $x_A(\lambda)$ είναι όλες οι ιδιοτιμές του A , δηλαδή

$$x_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

ιδιοτιμές

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{διαγωνοποιείται; αντιστρέφεται;}$$

(ii) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται διότι έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, άρα έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- Ο πίνακας A αντιστρέφεται διότι έχει μη μηδενική ορίζουσα, αφού:
- $\det(A) = x_A(0) = -2 \neq 0$ ή αλλιώς $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$.

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ιδιοδιανύσματα}$$

(iii) Για να βρούμε τον πίνακα P ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα A , αρκεί να βρούμε τα ιδιοδιανύσματά του.

• Α) Για $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2 \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -12 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & -12 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα, } \vec{u}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -16/7 \\ 1/7 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in R$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ ιδιοδιανύσματα}$$

$$\text{Β) } \lambda_2 = 1$$

$$(A - 1 \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Άρα, } \vec{u}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{Γ) Για } \lambda_3 = -1$$

$$(A - (-1) \cdot I_3) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bullet \text{ Άρα, } \vec{u}_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -5/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}.$$

• Επομένως:

$$P = \begin{bmatrix} -16 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 1-λύση (συνέχεια)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P .

$$\bullet \left[\begin{array}{ccc|ccc} -16 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -21 & 1 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\bullet \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -21 & 1 & 16 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & 5 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & & \\ -1 & 7 & & \\ -2/3 & -2/3 & & \end{array} \right].$$

$$\text{Άρα } P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 7 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \text{ και μία διαγωνοποίηση του } A \text{ είναι η εξής: } A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

(iv) Αφού ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν λ μια ιδιοτιμή του A , τότε $\frac{1}{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^{-1} .

Άρα, οι τρεις ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι εξής: $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$

Άσκηση 2

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_{3 \times 3}$, τέτοιος ώστε: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιοι ώστε $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

β) Να βρείτε τον πίνακα $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$ για τον πίνακα P που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα (α).

γ) Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιοι ώστε $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$.

Άσκηση 2α-λύση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

α) Ιδιοτιμές : 2, -1, 3 (στοιχεία της κυρίας διαγωνίου ενός άνω τριγωνικού πίνακα)

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• Άρα: $P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

- Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις 3 διαφορετικές ιδιοτιμές και δημιουργούμε τον πίνακα P :

$$P = \begin{bmatrix} -1/3 & 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2β-λύση

Να βρείτε τον πίνακα $P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$ για τον πίνακα P του ερωτήματος (α).

$$\beta) \quad P^{-1} \cdot A \cdot P = D \Leftrightarrow (P^{-1} \cdot A \cdot P)^{-1} = D^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = D^{-1}$$

Άρα,

$$P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = D^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2γ-λύση

Να βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα Q τέτοιον ώστε $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$

γ) Ο πίνακας $Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$Q^{-1} \cdot A^3 \cdot Q = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^3 = (D_1)^3$$

- Επομένως ο πίνακας Q αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A τοποθετημένα σε άλλη σειρά. Η σειρά αυτή υποδεικνύεται από τον πίνακα D_1 .

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$