ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

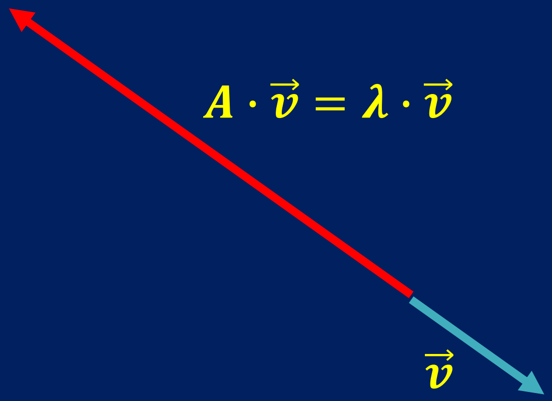
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα
10. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Σε αυτήν την ενότητα μελετάμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τετραγωνικού πίνακα. Θα δούμε δηλαδή πώς εντοπίζουμε μη μηδενικά διανύσματα τα οποία όταν πολλαπλασιαστούν με έναν τετραγωνικό πίνακα προκύπτουν διανύσματα παράλληλα προς αυτά. Τα διανύσματα αυτά θα τα ονομάσουμε ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .



Σημείωση: στο σχήμα με μπλε χρώμα απεικονίζεται ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}$ του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ $(\lambda < 0)$, ενώ με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται το διάνυσμα $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Παράδειγμα 1

- Το διάνυσμα $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ όταν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, προκύπτει

$$A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot \vec{x}$$

- Λέμε πως το $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι <u>ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα</u> $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. Επειδή τριπλασιάζεται όταν πολλαπλασιάζεται από αριστερά με τον πίνακα A, λέμε πως έχει <u>ιδιοτιμή</u> $\lambda = 3$.

Ιδιοτιμές

Αν ο A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$, τότε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \vec{0}$ του χώρου R^n θα ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του A αν το γινόμενο $A \cdot \vec{x}$ είναι πολλαπλάσιο του $\vec{x}$, δηλαδή

αν υπάρχει $\lambda \in R$ τέτοιο ώστε: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$, για $\lambda \in R$.

και ο αριθμός λ ονομάζεται αντίστοιχη ιδιοτιμή (eigenvalue) του A. Λέμε ότι το $\vec{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Εύρεση ιδιοτιμών

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα A κάνουμε το εξής:
- $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow$
- $A\vec{x} = \lambda I_n\vec{x} \Leftrightarrow$
- $\boxed{(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}}$

Πότε υπάρχει ιδιοτιμή λ;

- Για να είναι το λ μία ιδιοτιμή του A, από τον ορισμό θέλουμε $\vec{x} \neq \vec{0}$. Άρα:
- Το λ είναι μία ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν το σύστημα $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ έχει κι άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής λύσης (τετριμμένης λύσης). Να έχει δηλαδή άπειρες λύσεις, το οποίο συμβαίνει αν και μόνον αν

$$\boxed{det(A - \lambda I_n) = 0}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο-Χαρακτηριστική Εξίσωση

- Ο υπολογισμός της ορίζουσας $det(A - \lambda I_n) = 0$ δίνει ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ, το οποίο ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και συμβολίζεται ως $X_A(\lambda)$. Δηλαδή:

$$\boxed{X_A(\lambda) \equiv det(A - \lambda I_n).}$$

- Η εξίσωση $\boxed{X_A(\lambda) = 0}$ ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του A και η επίλυσή της μας δίνει τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Συνοπτικά:

- Ο λ είναι μια ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το σύστημα $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις
- Ο λ είναι μια ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $det(A - \lambda I_n) = 0$

Παρατήρηση:

- Η τιμή του $X_A(0)$ είναι ίση με την ορίζουσα του A, διότι αντικαθιστώντας όπου $\lambda = 0$, προκύπτει:

$$X_A(0) = det(A - 0 \cdot I_n) = detA$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Λύση:

1) Δημιουργούμε τον πίνακα $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$

2) Υπολογίζουμε την ορίζουσά του $det(A - \lambda I_2)$. Άρα το <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u> του A είναι $X_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$$X_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (3-\lambda)(-\lambda) - 2(-1) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

3) Και η <u>χαρακτηριστική του εξίσωση</u> είναι

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

4) Και οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι

$$\lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = 2$$

Ιδιοτιμές του A

Ας βρούμε και τα ιδιοδιανύσματα:

4Α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 4 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές το πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Λύση:

1) Δημιουργούμε τον πίνακα $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix}$

2) Υπολογίζουμε την ορίζουσά του $det(A - \lambda I_3)$. Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$

3) Η χαρακτηριστική του εξίσωση είναι $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = 0$

4) Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$

- Διαιρέτες του σταθερού όρου -4, άρα $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
- Παρατηρούμε ότι η λ=4 είναι μια ακέραια λύση. Άρα: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$
- Και οι λύνοντας το τριώνυμο έχουμε λ=4 ή λ=2+$\sqrt{3}$ ή λ=2-$\sqrt{3}$
- Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$

Ιδιοτιμές του A

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του μοναδιαίου πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση:

- Είναι προφανές ότι ο πίνακας A έχει το 1 για ιδιοτιμή , ενώ κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u} \neq \vec{0}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1. Είναι φανερό ότι ο μοναδιαίος πίνακας δεν έχει άλλη ιδιοτιμή.

$$A \cdot \vec{u} = I_3 \cdot \vec{u} = \vec{u} = 1 \cdot \vec{u}$$

- Αλλιώς, αν υπολογίσουμε τον πίνακα $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

το <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u> του A είναι

$$X_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3$$

Η επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης δίνει $(1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$

η οποία είναι η ιδιοτιμή του I_3 .

- Όλα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ μαζί με το μηδενικό διάνυσμα, αποτελούν τον ιδιόχωρο του A ως προς την ιδιοτιμή λ και συμβολίζεται με $V_\lambda(A)$.

Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

1) Δημιουργούμε του πίνακα $[A - \lambda I_n]$, ο οποίος προκύπτει αν από την κύρια διαγώνιο του A αφαιρέσουμε την παράμετρο λ.

2) Υπολογισμός της ορίζουσας $de\,t(A - \lambda I_n) = X_A(\lambda)$.

3) Επίλυση της εξίσωσης $de\,t(A - \lambda I_n) = 0$. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A.

4) Για κάθε ιδιοτιμή λύνουμε το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ και βρίσκουμε μία βάση του συνόλου λύσεων του συστήματος (μια βάση του ιδιόχωρου $V_\lambda(A)$).

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Λύση:

1) $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

2) $det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$

3) $det(A - \lambda I_2) = X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

4A) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_1 I_2)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 4 & 3-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αναγωγή σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1]{\gamma_1 \to \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{array}{ccc} x & y & \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \end{array} = U_1 \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x = -y} \\ 0 = 0 \end{array}$$

x βασικός άγνωστος (pivot)

y ελεύθερη μεταβλητή (n-rankA=2-1=1)

Παράδειγμα 5 – λύση (συνέχεια)

Ή αλλιώς περνώντας από τη μορφή του συστήματος, οι λύσεις είναι της μορφής:

$$(A-\lambda_1 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}, y\in R \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x=-y} \\ 0=0 \end{cases}, y\in R$$

Επομένως:

- Ο ιδιοχώρος $V_{-1}(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}, y\in R$.
- Και μια βάση B_{-1} του ιδιοχώρου $V_{-1}(A)$ είναι η $B_{-1}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$.

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1 είναι όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 5 – λύση (συνέχεια)

Ή αλλιώς περνώντας από τη μορφή του συστήματος, οι λύσεις είναι της μορφής:

$$(A-\lambda_1 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow U_1\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0\\ 0x+0y=0\end{cases}, y\in R \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x=-y}\\ 0=0\end{cases}, y\in R$$

Επομένως:

- διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}, y\in R.$
- Και μια βάση $\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right\}.$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1 είναι όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 5 – λύση (συνέχεια)

4Β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε:

$$(A-\lambda_2 I_2)\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αναγωγή του επαυξημένου σε ανηγμένο κλιμακωτό

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2+\gamma_1]{\gamma_1 \to \frac{1}{-4}\gamma_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = U_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}y \\ 0 = 0 \end{array}$$

x βασικός άγνωστος (pivot)

y ελεύθερη μεταβλητή (n-rankA=2-1=1)

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα διανύσματα $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ τέτοια ώστε $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{bmatrix}=y\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R$ και ο ιδιοχώρος $V_5(A)$ έχει διανύσματα της μορφής: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{y}{2} \\ y \end{bmatrix}=y\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, y \in R$. Μια βάση B_5 του ιδιοχώρου $V_5(A)$ είναι η $B_5=\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 5 είναι όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 6

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές των πινάκων $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Λύση:

1) $A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$

2) $\det(A - \lambda I_3) = X_A(\lambda) = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-3-\lambda)$

3) $\det(A - \lambda I_3) = X_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \; \eta \; \lambda_2 = -3 \; \eta \; \lambda_3 = -3$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

1) $B - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{bmatrix}$

2) $\det(B - \lambda I_3) = X_B(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(-5-\lambda)$

3) $\det(B - \lambda I_3) = X_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \; \eta \; \lambda_2 = 1 \; \eta \; \lambda_3 = -5$ είναι οι ιδιοτιμές του B.

Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου ή τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου

Ιδιότητες ιδιοτιμών

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in R_{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

1) $\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = tr(A)}$, δηλ. το άθροισμα των ιδιοτιμών είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του πίνακα A.

2) $\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = detA}$, δηλ. το γινόμενο των ιδιοτιμών είναι ίσο με την ορίζουσα του A.

3) $\boldsymbol{detA = 0}$ αν και μόνο αν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή είναι ίση με 0.

4) Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου ή τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.

5) Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι και ιδιοτιμές του A^T.

Ιδιότητες ιδιοτιμών

6) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ και

$V_{\frac{1}{\lambda_1}}\left(A^{-1}\right) \equiv V_{\lambda_1}(A), \forall \lambda_i$. (δηλαδή αν $\vec{u}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην

ιδιοτιμή λ, τότε θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\frac{1}{\lambda}$.

7) Ο A^k με $k \in N$ έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1{}^k, \lambda_2{}^k, \dots, \lambda_n{}^k$. Επίσης, αν $\vec{u}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, τότε θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^k που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i{}^k$.

8) Αν $k \in R$, τότε οι $k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα kA. Επίσης, αν $\vec{u}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, τότε θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του kA που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $k\lambda_i$.

<u>Προσοχή!</u>

- Αν λ μια ιδιοτιμή του A, τότε το σύστημα $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ έχει άπειρες λύσεις!
- Έτσι, όταν λύνετε μια άσκηση και δεν βρίσκετε άπειρες λύσεις για ένα σύστημα $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$, πιθανόν να έχετε βρει λάθος ιδιοτιμές...
- Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ($\lambda_i \neq \lambda_j$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.