



Γραμμική Άλγεβρα

1γ. Πίνακες και Βασικές Πράξεις (συνέχεια)

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Ο αντίστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_n$ ονομάζεται **αντιστρέψιμος** (non-singular ή invertible) αν υπάρχει πίνακας $B \in \Pi_n$ τέτοιος ώστε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

και ο B είναι ο **αντίστροφος** (inverse) πίνακας του A .

Γράφουμε $B = A^{-1}$.

Σημείωση: Μιλάμε για αντίστροφο μόνο τετραγωνικού πίνακα!

Πρόταση: μοναδικότητα αντιστρόφου

Αν $A, B \in \Pi_n$ και ο B ικανοποιεί τη σχέση $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ τότε είναι **μοναδικός!**

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του A , ο B και ο Γ τέτοιοι ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

και $A \cdot \Gamma = \Gamma \cdot A = I_n$.

Τότε

$$B \cdot (A \cdot \Gamma) = B \cdot I_n = B \text{ και } (B \cdot A) \cdot \Gamma = I_n \cdot \Gamma = \Gamma.$$

Λόγω της προσεταιριστικής έχουμε $B = \Gamma$.

Πρόταση:

Αν οι $A, B \in \Pi_n$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε ισχύουν:

$$\alpha) (A^{-1})^{-1} = A \quad \beta) (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Απόδειξη:

α) Προφανώς από ορισμό

$$\beta) (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) =$$

$$A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} =$$

$$A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n .$$

Και ομοίως αποδεικνύεται ότι $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n .$

Ο αντίστροφος του πίνακα AB είναι ο πίνακας $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Άρα ο πίνακας αυτός επί τον αντίστροφό του θα μας δώσει τον μοναδιαίο.

Προσοχή!

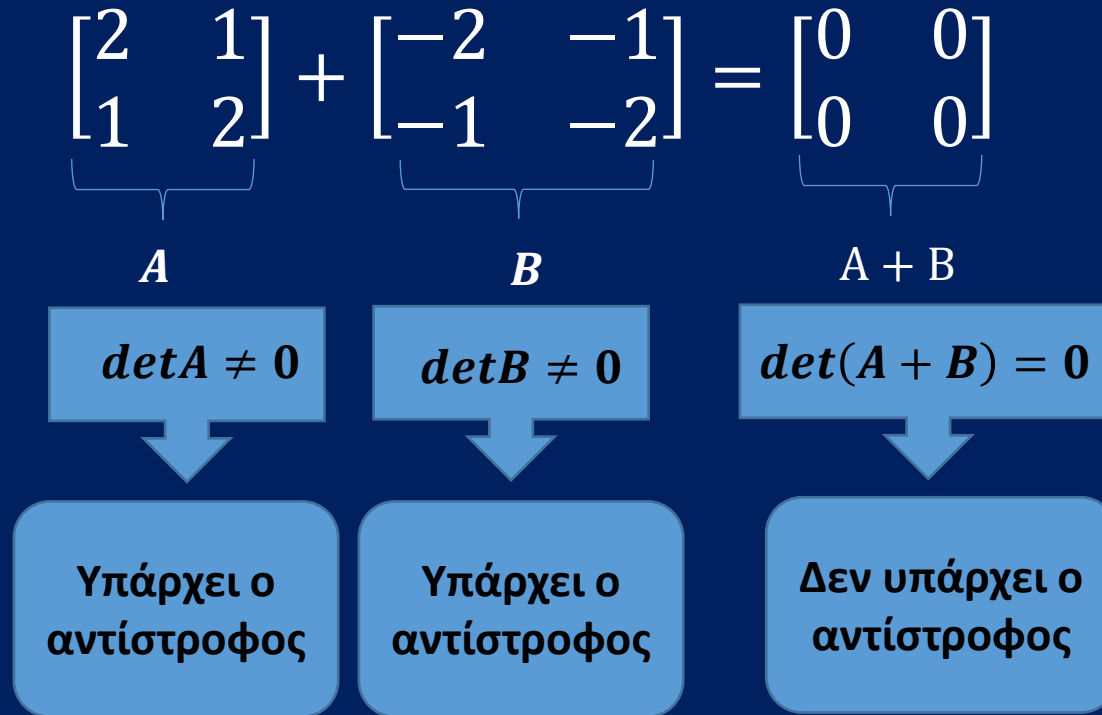
- ΔΕΝ έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο!
- Ισχύει στον πολλαπλασιασμό η σχέση:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- Αλλά δεν ισχύει και για την πρόσθεση, δηλαδή

$$(A + B)^{-1} \neq B^{-1} + A^{-1}$$

Μπορεί να υπάρχει ο αντίστροφος του A και ο αντίστροφος του B ,
αλλά να μην υπάρχει του $A + B$



Σημείωση: Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο πως ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός. Υπενθυμίζεται πως για πίνακα 2×2 η ορίζουσά του δίνεται από τον τύπο $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Τύπος υπολογισμού αντιστρόφου πίνακα 2×2

Αν είναι $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ είναι ο ζητούμενος αντίστροφος πίνακας του A , τότε από ισότητες $A \cdot B = B \cdot A = I_2$ και με τη βοήθεια επίλυσης γραμμικού συστήματος 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους, προκύπτει:

- Αν $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,
τότε ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα αντιστρόφου 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

$$\det A \neq 0$$

Υπάρχει ο
αντίστροφος

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Σχέση αντίστροφου πίνακα και ανάστροφου

Έστω τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_n$. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος. Και ισχύει:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Απόδειξη:

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^T = (I_n)^T \Leftrightarrow (A^{-1})^T \cdot (A)^T = I_n.$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε πως ο A^T είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Ομοίως αποδεικνύουμε και το αντίστροφο:

Αν ο A^T είναι αντιστρέψιμος, τότε επειδή $A = (A^T)^T$, λόγω του τελευταίου προηγούμενου βήματος.

Οι δυνάμεις ενός $n \times n$ πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τύπου $n \times n$ ορίζουμε τις δυνάμεις του A ως εξής:

- $A^0 = I_n$,
- $A^1 = A$ και
- $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, με $n \geq 2$.
- Αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος ορίζουμε

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Παράδειγμα:

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες

$$1) A^m \cdot A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_m \cdot \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n = A^n \cdot A^m = A^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) (A^m)^n = A^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) (\lambda \cdot A)^n = \lambda^n \cdot A^n, \forall n \in \mathbb{Z}, \lambda \neq 0.$$

$$4) (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$5) (A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Επειδή γενικά ισχύει ότι $A \cdot B \neq B \cdot A$, εν γένει αληθεύει:

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \text{ και } (A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$

Άρα αν γνωρίζουμε πως A, B αντιμεταθετικοί ($A \cdot B = B \cdot A$)

τότε ισχύουν:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$