



# Γραμμική Άλγεβρα

## 1γ. Πίνακες και Βασικές Πράξεις (συνέχεια)

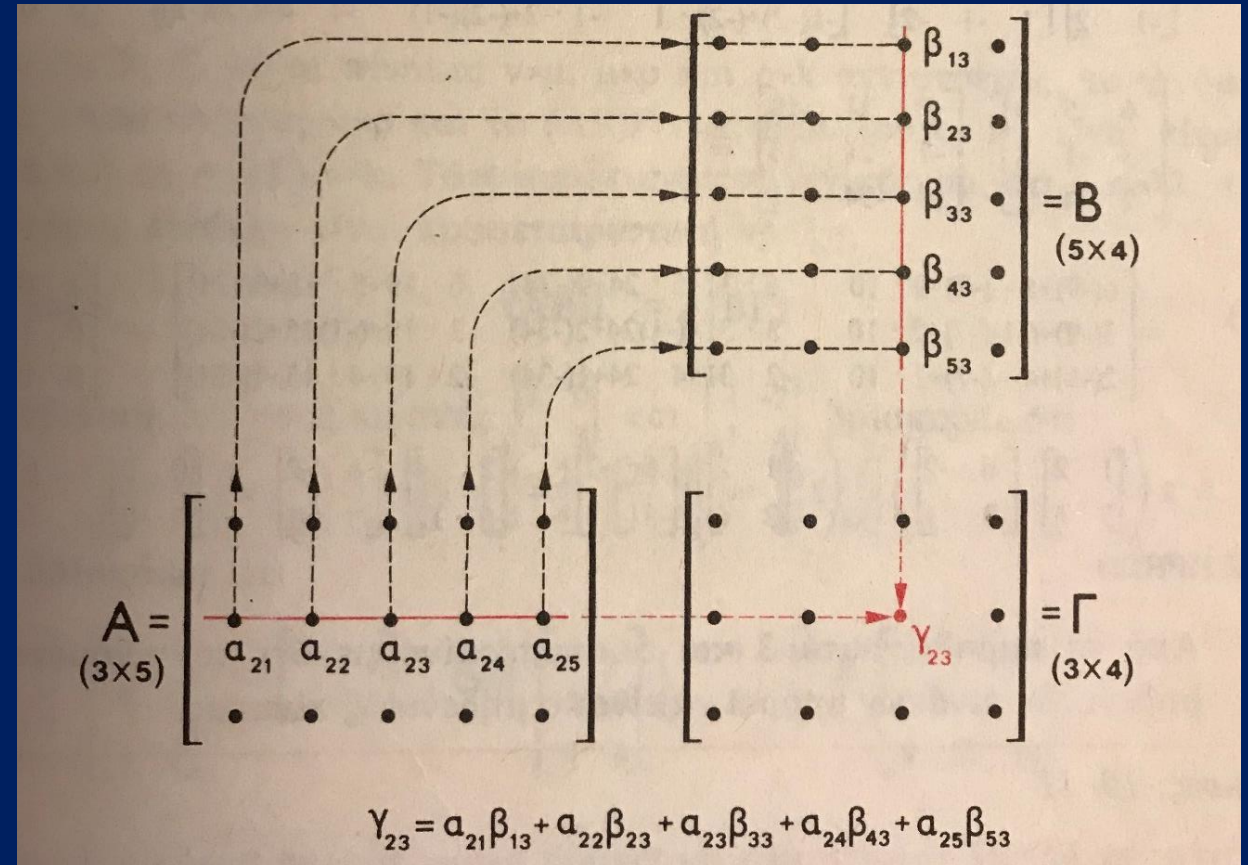
Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

# Πολλαπλασιασμός πινάκων

Παράδειγμα πινάκων  $[3 \times 5] \cdot [5 \times 4]$

Το γινόμενο  
ενός πίνακα  $A = [a_{ij}]$  τύπου  $3 \times 5$   
με τον πίνακα  $B = [\beta_{jk}]$  τύπου  $5 \times 4$   
είναι ο πίνακας  $\Gamma = [\gamma_{ik}]$  τύπου  $3 \times 4$



## Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων $[2 \times 3] \cdot [3 \times 2]$

Προσοχή! Δεν μπορώ να πολλαπλασιάσω πίνακες οποιασδήποτε μορφής. Για να πολλαπλασιαστούν δύο πίνακες πρέπει να είναι της μορφής:  $A_{\mu \times \rho} \cdot B_{\rho \times \nu}$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{2 \times 3} & \boxed{3 \times 2} & \boxed{2 \times 2} \\ \cdot A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} = 1(-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} = 4(-1) + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2 & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Για να υπολογίσω το στοιχείο  $\gamma_{21}$  πολλαπλασιάζω τα στοιχεία της 2<sup>ης</sup> γραμμής του πίνακα  $A$  με τα αντίστοιχα στοιχεία της 1<sup>ης</sup> στήλης του πίνακα  $B$ .

# Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων

## Παράδειγμα 1

Για την κατασκευή **δύο ειδών γλυκισμάτων**  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  χρειαζόμαστε τα **υλικά σε kg** που φαίνονται στον παρακάτω 2 x 3 πίνακα:

	Αλεύρι	Ζάχαρη	Βούτυρο		
$A =$	1,2	0,6	0,3	$\Gamma_1$	γλύκισμα
	1,4	0,8	0,4	$\Gamma_2$	γλύκισμα

Το **κόστος** σε δρχ. των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 1992 και 1993, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω 3 x 2 πίνακας:

	1992	1993	
$B =$	160	180	αλεύρι
	170	200	ζάχαρη
	900	1200	βούτυρο

Για να βρούμε το **κόστος σε δραχμές των υλικών του γλυκίσματος  $\Gamma_1$** , πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά.

Δηλαδή, το κόστος του  $\Gamma_1$  το 1992 ήταν

$$1,2 \cdot 160 + 0,6 \cdot 170 + 0,3 \cdot 900 = 564$$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη **βοήθεια των πινάκων** ως εξής:

$$[1,2 \quad 0,6 \quad 0,3] \begin{bmatrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{bmatrix} = [1,2 \cdot 160 + 0,6 \cdot 170 + 0,3 \cdot 900] = [564]$$

Ο πίνακας 1x1 [564] λέγεται γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B.

# Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων

## Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Ανάλογα, **το κόστος του  $\Gamma_1$  το 1993** ήταν  $1,2 \cdot 180 + 0,6 \cdot 200 + 0,3 \cdot 1200 = 696$

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την δεύτερη στήλη του B

$$[1,2 \quad 0,6 \quad 0,3] \begin{bmatrix} 180 \\ 200 \\ 1200 \end{bmatrix} = [696].$$

Ομοίως, **το κόστος του  $\Gamma_2$  το 1992** ήταν:  $1,4 \cdot 160 + 0,8 \cdot 170 + 0,4 \cdot 900 = 720$   
ή σε μορφή πινάκων

$$[1,4 \quad 0,8 \quad 0,4] \begin{bmatrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{bmatrix} = [720].$$

ενώ **το 1993** ήταν:  $1,4 \cdot 180 + 0,8 \cdot 200 + 0,4 \cdot 1200 = 892$  ή

$$[1,4 \quad 0,8 \quad 0,4] \begin{bmatrix} 180 \\ 200 \\ 1200 \end{bmatrix} = [892].$$

# Πρακτική σημασία του πολλαπλασιασμού πινάκων

## Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Άρα, τελικά ο πίνακας  $\Gamma$  δείχνει **το κόστος των δύο γλυκισμάτων κατά τα έτη 1992 και 1993**

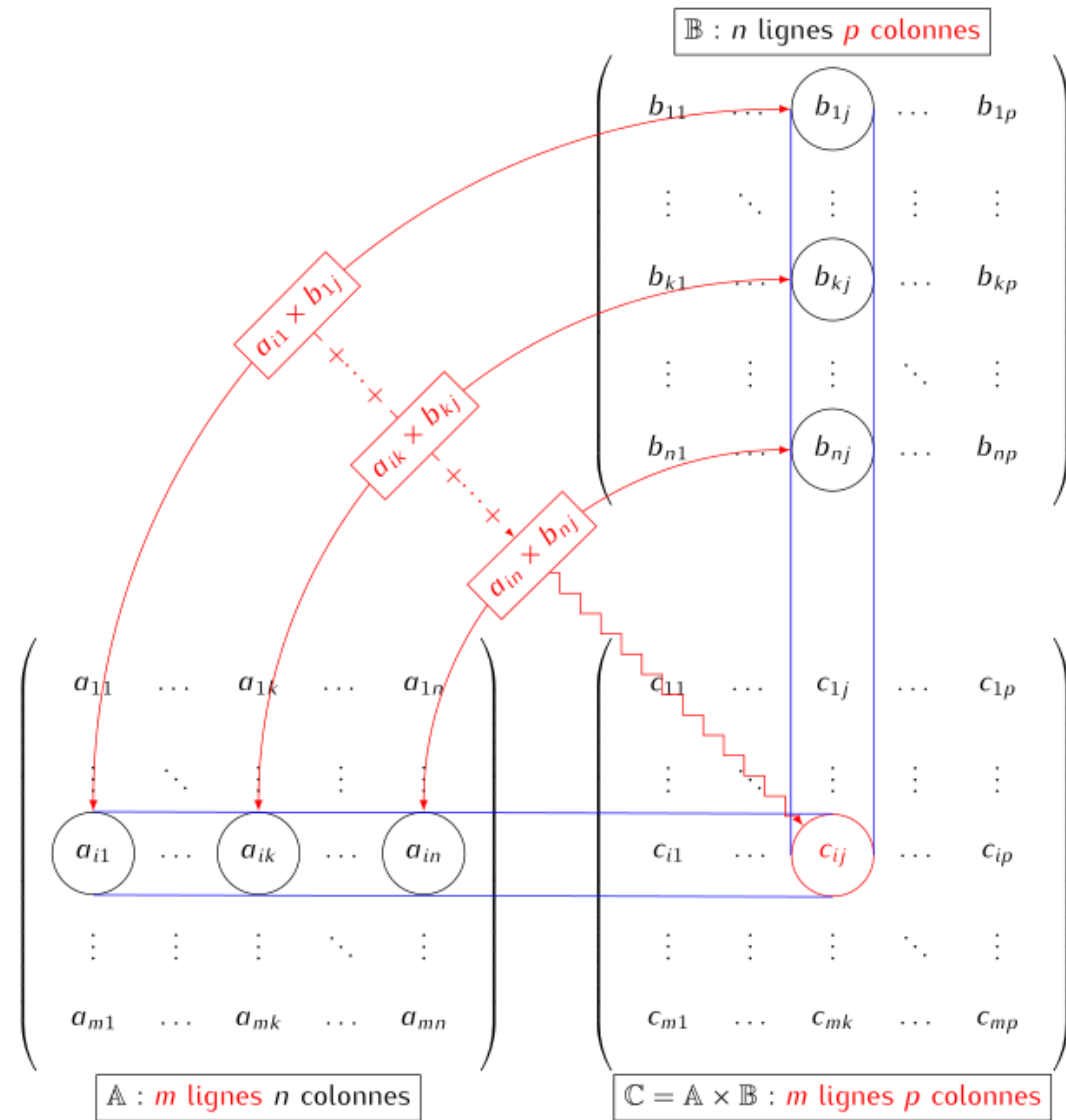
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $\Gamma$  που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα  $A$  με τον πίνακα  $B$**  και συμβολίζεται με  $A \cdot B$  ή  $AB$ , δηλαδή

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,6 & 0,3 \\ 1,4 & 0,8 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 & 180 \\ 170 & 200 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}.$$

Από τα Μαθηματικά (Γ' Λυκείου Θετικών Σπουδών / Οικονομίας & Πληροφορικής)- Βιβλίο Μαθητή, §1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ,  
[http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2732/Mathimatika-G-Lykeiou-ThSp\\_html-apli/indexA1\\_3.html](http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2732/Mathimatika-G-Lykeiou-ThSp_html-apli/indexA1_3.html)

# Αναπαράσταση πολλαπλασιασμού πινάκων



[Gloria Faccanoni, Algèbre linéaire , Recueil d'exercices corrigés et aide-mémoire, Université du Sud Toulon-Var, France 2014.]

# Πολλαπλασιασμός πινάκων

Γινόμενο του πίνακα  $A = [a_{ik}]$  τύπου  $\mu \times \rho$

με τον πίνακα  $B = [\beta_{kj}]$  τύπου  $\rho \times \nu$

λέγεται ο πίνακας  $\Gamma = [\gamma_{ij}]$  ο οποίος είναι τύπου  $\mu \times \nu$  και

κάθε στοιχείο του είναι το άθροισμα των γινομένων των  $\rho$  στοιχείων της  $i$ -γραμμής του  $A$  με τα αντίστοιχα  $\rho$  στοιχεία της  $j$ -στήλης του  $B$ .

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \dots + a_{i\rho}\beta_{\rho j} = \sum_{k=1}^{\rho} a_{ik}\beta_{kj}$$

Άθροισμα για  $k$  από 1 έως  $\rho$



## Παρατηρήσεις

1) Αν ορίζεται το γινόμενο  $A \cdot B$  δεν ορίζεται αναγκαστικά το γινόμενο  $B \cdot A$ .

Π.χ.  $A = [1 \quad 4]$  και  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ , το αποτέλεσμα  $A \cdot B$  είναι διάστασης  $1 \times 2$ ,  
ενώ το γινόμενο  $B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 4]$  δεν πραγματοποιείται!

2) Ακόμη κι αν ορίζονται τα γινόμενα  $A \cdot B$  και  $B \cdot A$  τότε δεν ισχύει πάντα

$A \cdot B = B \cdot A$ . Π.χ.  $A = [1 \quad 4]$  και  $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

τότε  $A \cdot B = [1 \cdot 4 + 4 \cdot 1] = [8]$ , διάστασης  $1 \times 1$

ενώ  $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 4] = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 = 4 & 4 \cdot 4 = 16 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 4 = 4 \end{bmatrix}$ , διάστασης  $2 \times 2$ !

Άρα **γενικά** (ακόμα κι αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί της ίδιας διάστασης) ισχύει  $A \cdot B \neq B \cdot A$

## Προσοχή!

- Στη θεωρία των πινάκων **δεν αληθεύει πάντα η συνεπαγωγή**

$$\text{Αν } A \cdot B = O, \text{ τότε } A = O \text{ ή } B = O$$

- Δηλαδή, μπορεί να ισχύει  $A \cdot B = O$  με  $A \neq O$  και  $B \neq O$

Παραδείγμα: Για  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$  ισχύει ότι

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O. \text{ Άρα } A \cdot B = O.$$

Εξάσκηση : Να υπολογίσετε το γινόμενο των πινάκων  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  και  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

- Κατά συνέπεια, ΔΕΝ ισχύει πάντα η συνεπαγωγή:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$$

- Αν όμως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος (θα το δούμε στη συνέχεια) τότε ισχύει

$$A \cdot B = \mathbf{0} \Rightarrow B = \mathbf{0}$$

Γενικά στην απαλοιφή πινάκων πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί

# Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Πινάκων

- Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma, \text{ για πίνακες } A \in \Pi_{\mu \times \rho}, B \in \Pi_{\rho \times \nu}, \Gamma \in \Pi_{\nu \times \kappa}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα:

- Για πίνακες κατάλληλου τύπου ισχύει

$$A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$$

$$\text{και } (A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma$$

- Αντιμεταθετική: Δεν ισχύει πάντα!

# Ο μοναδιαίος ή ταυτοτικός πίνακας $I_n \in \Pi_n$

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$  είναι διαγώνιος πίνακας και έχει τις ιδιότητες:

- $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \forall A \in \Pi_n$
- $B \cdot I_n = B, \forall B \in \Pi_{\mu \times n}$
- $I_n \cdot C = C, \forall C \in \Pi_{n \times \rho}$
- $I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ , όπου  $\delta_{ij} = \delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$  είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker.

## Ο ανάστροφος πίνακας ενός πίνακα $A$ τύπου $\mu \times \nu$

Αν  $A$  είναι ένας  $\mu \times \nu$  πίνακας,  $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\mu \times \nu}$ , τότε ο **ανάστροφος** πίνακας (transpose matrix) του  $A$  συμβολίζεται με  $A^T$  ή  $A^t$  και είναι ο πίνακας που έχει για γραμμές τις στήλες και για στήλες τις γραμμές του  $A$  με την ίδια σειρά, δηλαδή

$$A^T = [a_{ji}] \in \Pi_{\nu \times \mu}$$

## Παραδείγματα:

•  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ , ο ανάστροφός του είναι ο  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ .

•  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , ο ανάστροφός του είναι ο  $B^T = [1 \quad -2 \quad 3]$ .

# Συμμετρικός πίνακας

- Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \Pi_n$  λέγεται
- **Συμμετρικός (symmetric matrix)**, αν ισχύει:  $A^T = A$ , δηλ. παρουσιάζει συμμετρία ως προς την κύρια διαγώνιό του.



## Παραδείγματα:

- Ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  είναι συμμετρικός ( $A^T = A$ ).

# Αντισυμμετρικός πίνακας

- Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \Pi_n$  λέγεται

Αντισυμμετρικός (antisymmetric matrix), αν ισχύει:  $A^T = -A$ .

## Παραδείγματα:

Ο πίνακας  $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  είναι αντισυμμετρικός ( $B^T = -B$ ).

Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι όλα μηδέν!

Δεν είναι τυχαίο:

Σε κάθε αντισυμμετρικό πίνακα, ισχύει:  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n, \alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$

Για  $i = j$ , έχουμε  $\alpha_{ii} = -\alpha_{ii} \Leftrightarrow \alpha_{ii} + \alpha_{ii} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_{ii} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ii} = 0$

Άρα, για  $i = j$  προκύπτει ότι:  $\alpha_{ii} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$

## Ιδιότητες Ανάστροφου πίνακα:

$$1) (A + B)^T = A^T + B^T, \forall A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T, \forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}, \forall \lambda \in R$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \forall A \in \Pi_{\mu \times \rho}, \forall B \in \Pi_{\rho \times \nu}$$

$$4) I_{\nu}^T = I_{\nu}$$

$$5) (A^T)^T = A, \forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}$$

- Ισχύει ότι ένας  $\nu \times \nu$  τετραγωνικός πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \Pi_{\nu}$  γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού κι ενός αντισυμμετρικού πίνακα.