ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

Γραμμική Άλγεβρα

1α. Πίνακες και Βασικές Πράξεις

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένα σύστημα δύο εξισώσεων α’ βαθμού με δύο αγνώστους, π.χ.

$$\begin{cases} \mathbf{2}x + \mathbf{3}y = \mathbf{1} \\ \mathbf{3}x - \quad y = \mathbf{7} \end{cases}$$

<u>Χαρακτηρίζεται πλήρως</u>

από τους έξι αριθμούς: 2, 3, 1, 3, -1, και 7.

Ο καθένας έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή *συντελεστής του x* ή *συντελεστής του y* ή *σταθερός όρος*, και
- ανήκει ή στην *πρώτη* ή στη *δεύτερη εξίσωση*.

Το σύστημα θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

Συντελεστής x	Συντελεστής y	Σταθερός όρος		
↓	↓	↓		
2	**3**	**1**	←	Της α΄ εξίσωσης
3	**-1**	**7**	←	Της β΄ εξίσωσης

- Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται <u>πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών</u> ή απλά <u>πίνακας 2×3</u>.
- Γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{Vmatrix}$$

Ορισμός Πίνακα

- Γενικά κάθε <u>ορθογώνια διάταξη $\mu \cdot \nu$ αριθμών</u> ($\mu, \nu \in N^*$) σε μ γραμμές και ν στήλες λέγεται **πίνακας $\mu \times \nu$** (matrix) και συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right], 1 \leq i \leq \mu \, , 1 \leq j \leq \nu.$$

- Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα (elements of a matrix) .
- Το στοιχείο που ανήκει στην i -γραμμή ($1 \leq i \leq \mu$) και j -στήλη ($1 \leq j \leq \nu$) συμβολίζεται συνήθως a_{ij}.
- Οι θετικοί ακέραιοι μ, ν ονομάζονται **διαστάσεις** του πίνακα.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\mu \times \nu$ συμβολίζεται με $M_{\mu\times\nu}$ ή $\Pi_{\mu\times\nu}$.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\nu \times \nu$ συμβολίζεται με M_ν ή Π_ν (τετραγωνικοί πίνακες διάστασης ν).

Παράδειγμα:

Δίνεται ο πίνακας $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Το στοιχείο α_{32} του πίνακα A είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην 3η γραμμή και τη 2η στήλη, δηλαδή ο αριθμός 8.

Σημείωση:

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλων διαστάσεων, μπορούμε να διαχωρίσουμε τον αριθμό που προσδιορίζει τη γραμμή από τη στήλη με ένα κόμμα.

- Σε έναν πίνακα 100×50 το στοιχείο $\alpha_{84,3}$ ανήκει στην $84^{η}$ γραμμή και την $3^{η}$ στήλη ενώ το $\alpha_{8,43}$ ανήκει στην $8^{η}$ γραμμή και την $43^{η}$ στήλη.

Η σχέση της ισότητας στο σύνολο $\Pi_{\mu\times\nu}$

Δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ **ίδιου τύπου** $\mu \times \nu$ είναι **ίσοι** (equal) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu, \alpha_{ij} = \beta_{ij}.}$$

Για κάθε (∀), για όλες τις τιμές του i και για όλες τις τιμές του j τα στοιχεία του πίνακα A να είναι ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του B.

Χρήση Πινάκων

1) Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και κατά τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα 2×3. Π.χ.

$$\begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ τάξης είναι 57, κτλ.

Α	Β	Γ	
125	82	60	Αγόρια
101	85	57	Κορίτσια

2) Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ. 3×5:

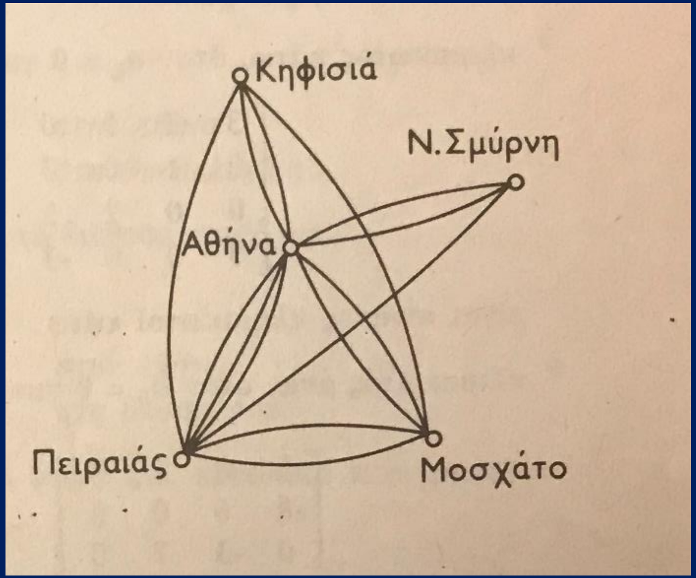
$$\begin{bmatrix} 128 & 205 & 316 & 107 & 156 \\ 250 & 318 & 354 & 285 & 204 \\ 400 & 389 & 425 & 376 & 158 \end{bmatrix}$$

που μας πληροφορεί ότι

στο 4^{ο} τμήμα της 2^{ης} κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες,

στο 3^{ο} τμήμα της 3^{ης} κατηγορίας 425 εργάτες κ.τ.λ.

3) Στο επόμενο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας:



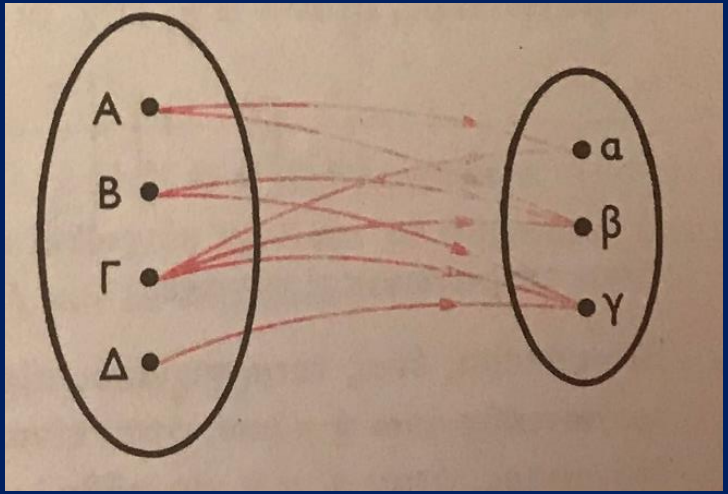
Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να δοθούν και στην μορφή του επόμενου πίνακα. Σε κάθε κουτάκι σημειώνεται το πλήθος των συγκοινωνιακών συνδέσεων μεταξύ των αντίστοιχων περιοχών της πρωτεύουσας:

	ΑΘΗΝΑ	ΠΕΙΡΑΙΑΣ	ΜΟΣΧΑΤΟ	Ν. ΣΜΥΡΝΗ	ΚΗΦΙΣΙΑ
ΑΘΗΝΑ	0	3	2	2	2
ΠΕΙΡΑΙΑΣ	3	0	2	1	1
ΜΟΣΧΑΤΟ	2	2	0	0	1
Ν. ΣΜΥΡΝΗ	2	1	0	0	0
ΚΗΦΙΣΙΑ	2	1	1	0	0

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 5×5 : $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δύο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0, για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.

Π.χ. η διμελής σχέση που δίνεται με το βελοδιάγραμμα



Μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα

	α	β	γ
Α	1	1	0
Β	0	1	1
Γ	1	1	1
Δ	0	0	1

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα $4 \times 3 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Είδη Πινάκων $\boldsymbol{\mu \times \nu}$

- Πίνακας-**γραμμή**, όταν μ=1, (τύπου $1 \times \nu$)

  π.χ. $A = [3 \quad -6 \quad 7] \in \Pi_{1\times 3}, B = [0 \quad 1] \in \Pi_{1\times 2}$.

- Πίνακας-**στήλη** , όταν ν=1 , (τύπου μ × 1)

  π.χ. $\Gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{2\times 1}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times 1}$.

- Πίνακας-**στοιχείο** , όταν μ=ν=1, (τύπου 1 × 1)

  π.χ. *E*=[-5], *Z*=[7], *H*=[0].

- **Τετραγωνικός (square matrix)** , όταν μ=ν , π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Γενική μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

- Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$ λέγονται στοιχεία της **κύριας ή πρωτεύουσας διαγωνίου**
- Τα στοιχεία $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2(\nu-1)}, \dots, \alpha_{\nu 1}$ λέγονται στοιχεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου**
- Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται **ίχνος** του πίνακα A

$$\boxed{\boldsymbol{trA = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{\nu\nu}}}$$

Σημείωση: Σε μη τετραγωνικό πίνακα $A \in \Pi_{\mu\times\nu}$, τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{kk}$ όπου $k = min\{\mu, \nu\}$ καλούνται στοιχεία **της κυρίας διαγωνίου** του πίνακα A.

- Για παράδειγμα στους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$,
- το στοιχείο $\alpha_{11} = 2$ είναι το μόνο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του A,
- ενώ τα στοιχεία $\beta_{11} = 1, \beta_{22} = 5, \beta_{33} = 9$ είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του B.

- **Τριγωνικός κάτω** όταν είναι τετραγωνικός $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\boxed{\forall i < j\,, \alpha_{ij} = 0}$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

- **Τριγωνικός άνω** όταν είναι τετραγωνικός $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\boxed{\forall i > j\,, \alpha_{ij} = 0}$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

Μπορεί να έχει 0 σε άλλες θέσεις, δεν είναι απαγορευτικό

Κύρια διαγώνιος

- **Διαγώνιος** (diagonal matrix), όταν είναι <u>τετραγωνικός</u> $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και ισχύει

$$\boxed{\forall\, i \neq j, 1 \leq i,j \leq \nu, \alpha_{ij} = 0}$$

Δηλαδή τετραγωνικός όπου <u>όλα</u> τα στοιχεία που <u>δεν</u> ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι όλα μηδέν.

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Συμβολίζεται:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \text{ ή } \Delta = diag(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu})$$

- **Παρατήρηση:**

Αν ένας πίνακας $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ είναι ταυτόχρονα τριγωνικός άνω και τριγωνικός κάτω, τότε θα είναι **διαγώνιος** πίνακας και αντίστροφα.

Πράξεις Πινάκων: Πρόσθεση Πινάκων

- Μία βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διέθετε σε ένα μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18	35	21	Στην Αθήνα
13	29	22	Στη Θεσσαλονίκη

- Και τον επόμενο μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
22	19	12	Στην Αθήνα
25	18	31	Στη Θεσσαλονίκη

- Τότε τους δύο αυτούς μήνες η βιομηχανία διέθεσε συνολικά:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18+22	35+19	21+12	Στην Αθήνα
13+25	29+18	22+31	Στη Θεσσαλονίκη

- Η κίνηση της βιομηχανίας κάθε μήνα αλλά και συνολικά περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 35 & 21 \\ 13 & 29 & 22 \end{bmatrix}$$ η κίνηση της βιομηχανίας τον 1ο μήνα

$$B = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 12 \\ 25 & 18 & 31 \end{bmatrix}$$ η κίνηση της βιομηχανίας τον 2ο μήνα

Η κίνηση της βιομηχανίας συνολικά τους δύο μήνες:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 18+22 & 35+19 & 21+12 \\ 13+25 & 29+18 & 22+31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 54 & 33 \\ 38 & 47 & 53 \end{bmatrix} = A + B$$

- Ο πίνακας Γ λέγεται **άθροισμα των πινάκων** A και B. Γενικά ορίζουμε:

Άθροισμα των $\mu \times \nu$ πινάκων $A = [\alpha_{ij}], B = [\beta_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $\Gamma = A + B = [\gamma_{ij}]$, διάστασης $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B, δηλαδή:

$$\forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

Παράδειγμα:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο σύνολο $\mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu}$ η πρόσθεση είναι μια **εσωτερική πράξη** που ορίζεται ως εξής:

$$+: \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu} \times \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu} \to \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu}, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \to \mathbf{A} + \mathbf{B} := [\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{ij}} + \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{ij}}]$$

Ιδιότητες Πρόσθεσης Πινάκων

Αντιμεταθετική: $\forall A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + B = B + A$

Προσεταιριστική: $\forall A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu\times\nu}, (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$

Ουδέτερο στοιχείο: $\forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \exists\, \boldsymbol{O} \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + A = A$

Το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbf{O} = [0]_{\mu\times\nu}$, που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0.

Αντίθετος Πίνακας (opposite):

$$\forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \exists -A \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + (-A) = (-A) + A = \boldsymbol{O}.$$

Ο αντίθετος πίνακας είναι ο $-A = [-\alpha_{ij}]$, που στη θέση (i, j) έχει το στοιχείο $-\alpha_{ij}$.

Παράδειγμα αντίθετου πίνακα:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

- $-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- $A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_{2\times 3}$

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Αν ο πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$ είναι τύπου $\mu \times \nu$, ονομάζουμε βαθμωτό γινόμενο του πραγματικού (ή μιγαδικού) αριθμού λ με τον πίνακα A ή πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα τον πίνακα τύπου $\mu \times \nu$ τον οποίο λαμβάνουμε αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με λ. Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με $\lambda \cdot A$ και ισχύει ότι:

$$\boxed{\lambda \cdot A = \lambda \cdot [\alpha_{ij}] = [\lambda \cdot \alpha_{ij}]}$$

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\kappa\alpha\iota \;\; 4 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 12 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

$\forall \lambda, \mu \in \mathrm{R}\ \forall A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}$, ισχύουν:

i) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$

iv) $1 \cdot A = A$, όπου 1 είναι η μονάδα των πραγματικών αριθμών

v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = (\mathrm{A}\lambda)\mathrm{B} = A(\lambda B)$, $\lambda \in \mathrm{R}$, $A \in \Pi_{\mu\times\nu}$, $B \in \Pi_{\nu\times\rho}$

Παρατήρηση: Θα δούμε αργότερα πως το σύνολο $\Pi_{\mu\times\nu}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα, αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου.