Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση
Μια Εισαγωγή

Νίκος Λαμπρόπουλος

17 Δεκεμβρίου 2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι Banach

Η δομή του διανυσματικού χώρου είναι μια από τις σημαντικές στη Μαθηματική Ανάλυση και αυτό συμβαίνει γιατί αφενός μεν οι διανυσματικοί χώροι παρουσιάζονται σε κάθε κλάδο της Μαθηματικής Ανάλυσης και αφετέρου γιατί παρέχουν μοναδικά κατάλληλους τρόπους για την επίλυση πάρα πολλών προβλημάτων. Το γεγονός ότι προσφέρονται για σχεδόν πλήρη διαισθητική κατανόηση, λόγω της γεωμετρικής δομής που παρουσιάζουν, τους καθιστά ακόμα πιό εύχρηστους. Ωστόσο, στη Συναρτησιακή Ανάλυση παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον εκείνοι οι διανυσματικοί χώροι στους οποίους μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο το οποίο αποτελεί γενίκευση του μήκους ενός διανύσματος στο επίπεδο ή στον τρισδιάστατο χώρο. Αυτό το μέτρο ονομάζεται norm και ο χώρος που προκύπτει ονομάζεται χώρος με norm. Ένας πλήρης χώρος με norm ονομάζεται χώρος Banach και θα αποδείξουμε ότι κάθε χώρος με norm έχει μια πλήρωση που είναι χώρος Banach. Τους χώρους Banach θα τους μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, όμως στα θεμελιώδη θεωρήματα της συναρτησιακής ανάλυσης θα αναφερθούμε διεξοδικά σε επόμενο κεφάλαιο, κάτι που επιβάλλεται, από παιδαγωγικής πλευράς τουλάχιστον, λόγω της λεπτότητας του βάθους των εννοιών αλλά και των θεωρημάτων.

Η θεωρία των χώρων με norm, των χώρων Banach αλλά και των γραμμικών τελεστών που ορίζονται σε αυτούς τους χώρους είναι από τις πιο αναπτυγμένες περιοχές της συναρτησιακής ανάλυσης, ωστόσο, το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στις πιό βασικές έννοιες αυτών των περιοχών.

1.1 Χώροι με Norm

Στους μετρικούς χώρους δώσαμε τον ορισμό της απόστασης που συνδέει κάθε ζεύγος σημείων ενός τέτοιου χώρου μέσω της οποίας μας δόθηκε η δυνατότητα να ”κάνουμε” Ανάλυση μεταφέροντας σημαντικό μέρος εννοιών και ιδιοτήτων από τους Ευκλείδειους διανυσματικούς χώρους σε αυτούς τους πιο αφηρημένους χώρους. Για παράδειγμα, πρέπει να εισάγουμε της έννοια σειράς απείρων όρων σε τέτοιους αφηρημένους γραμμικούς χώρους, οπότε πρέπει να μελετήσουμε και την έννοια της σύγκλισης των σειρών αυτών. Ακόμα και η έννοια της βάσης απαιτεί την έννοια της σύγκλισης, αφού τα στοιχεία του χώρου πρέπει να έχουν μια αναπαράσταση σειράς σε σχέση με ένα σύνολο άπειρου πλήθους στοιχείων του, δηλαδή, ”διανυσμάτων”. Η ανάγκη να αποκτήσουμε κάποια γνώση για το *μέγεθος* ενός γενικού αφηρημένου γραμμικού χώρου αλλά και για την *απόσταση* των στοιχείων του (δηλαδή να γενικεύσουμε την έννοια του μήκους) οδήγησε στην ορισμό της norm σε ένα γραμμικό χώρο.

Ορισμός 1.1.1. **Χώρος με norm** (ή **σταθμητός**) χώρος λέγεται το ζευγάρι $(X, \|\cdot\|)$, όπου $X \neq \emptyset$ είναι ένα γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα Κ, και $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x,\, y \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) να ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Η συνάρτηση $\|\cdot\|$ λέγεται **norm** ή **στάθμη**.
Μια norm στον χώρο X ορίζει μια μετρική d σε αυτόν η οποία δίνεται από τη σχέση

$$d(x, y) = \|x - y\|, \ \forall \ x, y \in X,$$

οποία λέγεται μετρική **επαγόμενη** από τη norm. □

Όπως, θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχουν συναρτήσεις που τις χρησιμοποιούμε σαν norms αλλά δεν ικανοποιούν την πρώτη ιδιότητα της norm, δηλαδή είναι μη αρνητικές αλλά μπορεί να είναι ίσες με το 0 για μη μηδενικά διανύσματα. Αυτές οι συναρτήσεις ονομάζονται seminorms.

Ορισμός 1.1.2. Μια **semi-norm** σε ένα γραμμικό χώρο X είναι μια συνάρτηση $p : X \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε:

(i) $p(0) = 0$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

για κάθε $x,\ y\ \in\ X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$). □

Παρατήρηση 1.1.1. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, σε ένα διανυσματικό χώρο η norm ενός στοιχείου του παρέχει ένα μέτρο του *μεγέθους* αυτού του στοιχείου ή του *μήκους* του, αν δούμε τα στοιχεία του χώρου ως *διανύσματα*. Ωστόσο, για κάθε χώρο χρειαζόμαστε μια norm (την καταλληλότερη) που να ενσωματώνει τις ιδιότητες αυτού του χώρου. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \to \mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty = \max\{f(x)\| : x \in [a,b]\}$ ορίζει μια norm στον $C[a,b]$ (βλ. Παράδειγμα 1.1.6), η οποία όμως δεν είναι κατάλληλη για τον χώρο $C^1[a,b]$. Ωστόσο, είναι φανερό ότι για το χώρο $C^1[a,b]$ μια κατάλληλη norm είναι η $\|f\|_{C^1[a,b]} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Έχουμε ορίσει την έννοια του υπόχωρου ενός μετρικού χώρου, οπότε με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τον υπόχωρο W ενός χώρου X με norm.

Ορισμός 1.1.3. Ένας **υπόχωρος** W ενός χώρου X με τη norm να λαμβάνεται ως ο περιορισμός της norm του X στο υποσύνολό του W. Αύτή η norm λέγεται **επαγόμενη από τη norm** του X. Αν το W είναι κλειστό, τότε ο υπόχωρος W λέγεται κλειστός υπόχωρος του X. □

Παράδειγμα 1.1.1. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\|x\| = |x|$, (όπου $|x|$ είναι η απόλυτη τιμή του x), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι μια norm στο $\mathbb{R}$.

Όμοια:

Η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\|x\| = |x|$, (όπου εδώ $|x|$ είναι το μέτρο του x), για κάθε $x \in \mathbb{C}$ είναι μια norm στο $\mathbb{C}$.

Η $\|\cdot\|$ λέγεται **συνήθης norm του** $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.1.2. Οι συναρτήσεις $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$, όπου γιά κάθε $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|,\ \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2},\ \ \|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, 2, \cdots, n\},$$

είναι norms στον $\mathbb{R}^n$, οι αντίστοιχες των μετρικών d_1, d_2 και d_∞ του Παραδείγματος **??**.

Η $\|\cdot\|_2$ λέγεται **Ευκλείδεια norm** του $\mathbb{R}^n$.

Γενικότερα:

Η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \geq 1$ με

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,$$

είναι μια norm στον $\mathbb{R}^n$ και οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της.

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η $\|\cdot\|_p$ norm στον $\mathbb{C}^n$.

Παράδειγμα 1.1.3. Η συνάρτηση $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \ \forall\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p,$$

είναι norm στον ℓ^p.

Οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι οι αντίστοιχες των μετρικών d_1 και d_2 του Παραδείγματος **??**.

Παρατήρηση 1.1.2. Στα Παραδείγματα 1.1.2 και 1.1.4 οι ιδιότητες (i) και (ii) της norm (βλ. Ορισμός 1.1.1) αποδεικνύονται εύκολα και η (iii) αποδεικνύεται με τη βοήθεια της ανισότητας του Minkowski.

Παράδειγμα 1.1.4. Θεωρούμε το χώρο c_0 των μηδενικών ακολουθιών. Η συνάρτηση

$$\|x\|_{c_0} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}, \ \forall\ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0,$$

ορίζει μια norm στο χώρο αυτό.

Όμοια:

Η $\|\cdot\|$ είναι norm και στους χώρους c και ℓ^∞.

Παράδειγμα 1.1.5. Οι συναρτήσεις $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ του $C[a,b]$ στο $\mathbb{R}$, όπου για κάθε $f \in C[a,b]$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx},$$

αντίστοιχα, είναι norms στον $C[a,b]$, οι αντίστοιχες των μετρικών d_1, d_2 του Παραδείγματος **??**.

Γενικότερα:
Η συνάρτηση $\|f\|_p$ του $C[a,b]$ στο $\mathbb{R}$ με

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \ \forall \ f \ \in \ C[a,b],$$

είναι norm στον $C[a,b]$.

Οι norms $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της $\|\cdot\|_p$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται αντίστοιχες norms από το $C[a,b]$ στο $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση 1.1.3. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ασυνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Για παράδειγμα, οι σημειακά ασυνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a,b]$ με πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών που οφείλονται σε πεπερασμένα άλματα είναι ολοκληρώσιμες. Επομένως, η απαίτηση της συνέχειας μιας συνάρτησης στον ορισμό του ολοκληρώματος μέσω του οποίου ορίζεται η norm δεν είναι αναγκαία για την ολοκληρωσιμότητα της συνάρτησης. Άρα, θα ήταν φυσικό αντί του $C[a,b]$ να θεωρήσουμε το χώρο των ολοκληρώσιμων κατά Riemann συναρτήσεων με norm την $\|\cdot\|_p$. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση η $\|\cdot\|_p$ δεν είναι norm αλλά semi-norm γιατί υπάρχουν συναρτήσεις $f \neq 0$ με $\|f\|_p = 0$.

Παράδειγμα 1.1.6. Η συνάρτηση $\|f\|_\infty$ του $C[a,b]$ στο $\mathbb{R}$, όπου για κάθε $f \in C[a,b]$,

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : t \in [a,b]\},$$

είναι norm στον $C[a,b]$, η αντίστοιχη της μετρικής d_∞ του Παραδείγματος **??**.

Πρόταση 1.1.1. Μια μετρική επαγόμενη από μια norm σε ένα χώρο με norm έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$, (*η d είναι αναλλοίωτη ως προς τις μετατοπίσεις*)

(ii) $d(ax, ay) = |a| d(x,y)$,

για όλα τα $x, y \in X$ και κάθε βαθμωτό $a \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).

Απόδειξη. Έχουμε

$$d(x+a, y+a) = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

και

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = |a|\|x-y\| = |a| d(x,y).$$

Παρατήρηση 1.1.4. Η Πρόταση 1.1.1 χαρακτηρίζει τις μετρικές που λαμβάνονται από μια norm και δίνει αρνητική απάντηση στο ακόλουθο ερώτημα, αν δηλαδή, κάθε μετρική ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να λαμβάνεται από μια norm. Ένα παράδειγμα αποτελεί ο χώρος s που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες (φραγμένες ή μη φραγμένες) των μιγαδικών αριθμών εφοδιασμένος με τη μετρική

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|},$$

όπου $x=\{x_j\}_{j=1}^{\infty}, y=\{y_j\}_{j=1}^{\infty}\in s$.
Η d είναι μια μετρική στο s (αποδείξτε το ή Άσκηση, βλ. σελ 63 $Kreyszig$), ωστόσο δεν επάγεται από κάποια norm γιατί δεν ικανοποιεί την Πρόταση **??** (αποδείξτε το).

Παρατήρηση 1.1.5. Από την ανισότητα (iii) του Ορισμού 1.1.1 προκύπτει η ανισότητα $|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$, από την οποία συνεπάγεται η ακόλουθη σημαντική ιδιότητα της norm.

Θεώρημα 1.1.1. Η norm είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή η απεικόνιση $x\to\|x\|$ απο το X στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. (Άσκηση).

Θεώρημα 1.1.2. Αν θεωρήσουμε τους γραμμικούς χώρους $X_1, X_2, \cdots, X_n, n\in\mathbb{N}$ πάνω στο ίδιο σώμα K ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) με μετρικές τις $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \cdots, \|\cdot\|_n$, αντίστοιχα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ είναι χώρος με norm και η norm κάθε στοιχείου του $x=(x_1,x_2,\cdots x_n),\ x_i\in X_i,\ i=1,2,\cdots,n$ ορίζεται από την $\|x\|_X=\|\cdot\|_1\cdot\|\cdot\|_2\cdots\|\cdot\|_n$.

Απόδειξη. (Άσκηση).

Από την πλευρά της Ανάλυσης η έννοια της σύγκλισης μια ακολουθίας σε ένα χώρο με norm, καθώς και όλες οι σχετικές έννοιες, ορίζονται με βάση τις αντίστοιχες έννοιες στους μετρικούς χώρους και το γεγονός ότι

$$\|x-y\|=d(x,y),\ \forall x,y\in X.$$

Ορισμός 1.1.4. Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο X με norm είναι **συγκλίνουσα** αν το X περιέχει ένα στοιχείο x τέτοιο ώστε

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

Τότε, γράφουμε $x_n \to x$ και το x λέγεται **όριο** της $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο X με norm είναι **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \ \forall \ m, n > N.$$

Γνωρίζουμε ότι ακόμα και σε ένα γενικό μετρικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία σημείων του, ωστόσο σε ένα χώρο με norm μπορούμε να ορίσουμε και μια άπειρη σειρά με όμοιο τρόπο όπως και στην Ανάλυση. Πραγματικά:

Ορισμός 1.1.5. Αν $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία σε ένα χώρο X με norm, ορίζουμε την ακολουθία των μερικών της αθροισμάτων

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, \ \forall \ n = 1, 2, \cdots,$$

και αν η $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, δηλαδή, υπάρχει $s \in X$, τέτοιο ώστε

$$s_n \to s \Leftrightarrow \|s_n - s\| \to 0,$$

τότε η άπειρη σειρά

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x_1 + x_2 + \cdots$$

λέγεται **συγκλίνουσα** (ή λέμε ότι συγκλίνει), το s λέγεται **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} x_j = x_1 + x_2 + \cdots.$$

Αν επιπλέον η πραγματική σειρά $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $x_1 + x_2 + \cdots$ είναι **απολύτως συγκλίνουσα**. $\square$

Σχετικά με τα οφέλη της απόλυτης σύγκλισης είναι πολύ σημαντική η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.1.6. Σε ένα χώρο με norm η απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται σύγκλιση μόνο όταν ο χώρος είναι πλήρης (βλ. Θεώρημα 1.2.2).

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ σημαντικό από την πλευρά της τοπολογίας.

Θεώρημα 1.1.3. Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με norm, $a \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), τότε οι συναρτήσεις $\mathrm{T}_a : X \to X$ και $D_\lambda : X \to X$ με $\mathrm{T}_a(x) = x + a$ και $D_\lambda(x) = \lambda x$, αντίστοιχα, είναι ομοιομορφισμοί.

Απόδειξη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις T_a και D_λ είνα 1-1 και επί καθώς και ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις τους είναι οι $\mathrm{T}_a^{-1} = \mathrm{T}_{-\alpha}$ και $D_\lambda^{-1} = D_{1/\lambda}$, αντίστοιχα. Η συνέχεια των T_a και D_λ προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση ότι για τυχόν $x_0 \in X$ και για κάθε $x_0 \in X$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\|\mathrm{T}_a(x) - \mathrm{T}_a(x_0)\| = \|x - x_0\|, \quad \|D_\lambda(x) - D_\lambda(x_0)\| = |\lambda|\|x - x_0\|.$$

Η συνέχεια των αντίστροφων $\mathrm{T}_{-\alpha}$ και $D_{1/\lambda}$ προκύπτει από την παρατήρηση ότι αυτές είναι της ίδιας μορφής με τις T_a και D_λ.

Παρατήρηση 1.1.7. Επειδή, για κάθε $x_0 \in X$, η απεικόνιση T_{x_0} είναι ομοιομορφισμός, επομένως, συνεχής και ανοικτή, έπεται ότι για κάθε ανοικτό υποσύνολο Α του X και για κάθε $x_0 \in X$ το $x_0 + \mathrm{A}$ είναι ανοικτό και αντίστροφα, (αφού $x_0 + \mathrm{A} = T_{x_0}(\mathrm{A})$ και $\mathrm{A} = T_{-x_0}(x_0 + \mathrm{A})$). Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε τα ανοικτά υποσύνολα του X που περιέχουν ένα οποιοδήποτε σημείο του, τότε μπορούμε να βρούμε όλα τα ανοικτά υποσύνολα του ($X, \|\cdot\|$), δηλαδή την τοπολογία της $\|\cdot\|$.
Για παράδειγμα, αν Α είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X που περιέχουν το μηδενικό του στοιχείο 0, τότε η τοπολογία της $\|\cdot\|$ είναι η $\mathcal{T} = \{x + A : x \in X, A \in \mathrm{A}\}$.
Παραμένοντας στο ίδιο θέμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η τοπολογία ενός χώρου με norm καθορίζεται πλήρως από την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του. Γνωρίζουμε, ωστόσο, ότι ένα σύνολο είναι ανοικτό αν και μόνο αν είναι ένωση από ανοικτές μπάλες του X. Όμως, για κάθε ανοικτή μπάλα $B(x, r)$ του $(X, \|\cdot\|$ αποδεικνύεται εύκολα (αποδείξτε το) ότι

$$B(x, r) = x + rB(0, 1),$$

οπότε η οικογένεια που αποτελείται από όλες τις ανοικτές μπάλες του X είναι η

$$\mathrm{B} = \{x + rB(0, 1) : x \in X, r > 0\}.$$

Επομένως, η τοπολογία του $(X, \|\cdot\|)$ καθορίζεται πλήρως από τη μοναδιαία μπάλα $B(0, 1)$.

1.2 Χώροι Banach

Η γενίκευση των Ευκλείδειων χώρων σε χώρους με άπειρη διάσταση αποτελεί βασικό κίνητρο για τον ορισμό και τη μελέτη των χώρων Banach. Οι Ευκλείδειοι χώροι έχουν κάποια χαρακτηριστικά που τους κάνουν ιδιαίτερα δημοφιλείς. Είναι γραμμικοί χώροι, είναι μετρικοί χώροι και είναι πλήρεις. Αυτές οι τρεις βασικές ιδιότητες είναι πολλοί σημαντικές για ένα χώρο. Οι χώροι με norm είναι γραμμικοί και είναι μετρικοί χώροι ωστόσο δεν είναι απαραίτητα πλήρεις. Η έννοια της πληρότητας ενός μετρικού χώρου είναι πολύ σημαντική και καθιστά ένα τέτοιο χώρο πολύ χρήσιμο. Υπενθυμίζουμε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει μέσα στον X. Οι τρεις αυτές βασικές ιδιότητες περιέχονται στον ορισμό των χώρων Banach, γιαυτό αυτοί οι χώροι παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Ορισμός 1.2.1. Χώρος Banach λέγεται κάθε γραμμικός χώρος με norm ο οποίος είναι πλήρης ως προς την απόσταση που επάγει η norm. $\square$

Παράδειγμα 1.2.1. Ο χώρος $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, όπου η norm $\|\cdot\|$ είναι η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\|x\| = |x|$, η απόλυτη τιμή του x, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι ένας χώρος Banach (βλ. Παράδειγμα **??**).

Όμοια:
Ο χώρος $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$, όπου η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\|x\| = |x|$, το μέτρο του x, γιά κάθε $x \in \mathbb{C}$ είναι είναι ένας χώρος Banach (βλ. Παράδειγμα **??**).

Παράδειγμα 1.2.2. Οι χώροι $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, όπου οι norms $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι αντίστοιχα οι

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|, \ \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \ \|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, 2, \cdots, n\},$$

δηλαδή, είναι οι αντίστοιχες των μετρικών d_1, d_2 και d_∞ του Παραδείγματος **??** είναι χώροι Banach.
Γενικότερα, ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, όπου η norm $\|\cdot\|_p$ είναι η

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n,$$

είναι χώρος Banach.
Οι norms $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ του παραδείγματος αποτελούν ειδική περίπτωση της $\|\cdot\|_p$

για $p = 1$ και $p = 2$, αντίστοιχα.
Όμοια, ορίζεται και η $\|\cdot\|_p$ norm στον $\mathbb{C}^n$.
Όλοι οι $\mathbb{R}^p$, $1 \leq p \leq \infty$ είναι χώροι Banach.

Παράδειγμα 1.2.3. Οι χώροι $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, και $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, όπου οι norms είναι αντίστοιχα οι

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|, \ \forall \ x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{1/2}, \ \forall \ x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

και

$$\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_n| : n \in \mathbb{N}\}, \ \forall \ x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty,$$

δηλαδή, είναι οι αντίστοιχες των μετρικών d_1, d_2 του Παραδείγματος **??** για $p = 1$ και $p = 2$ και της d_∞ του Παραδείγματος **??**, είναι χώροι Banach.
Γενικότερα, ο $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, όπου η όπου η norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$ είναι η

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}, \ \forall \ x = \{x_n\} \in \ell^p,$$

είναι χώρος Banach.
Όλοι οι ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$ είναι χώροι Banach.

Παράδειγμα 1.2.4. Ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$, όπου η norm $\|x\|_\infty$ είναι η

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\},$$

δηλαδή, η αντίστοιχη της μετρικής d_∞ του Παραδείγματος **??** είναι ένας χώρος Banach.

Παράδειγμα 1.2.5. Οι συναρτήσεις $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ του $C[a,b]$ στο $\mathbb{R}$, όπου για κάθε $x \in C[a,b]$,

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$

αντίστοιχα, είναι norms στον $C[a,b]$, οι αντίστοιχες των μετρικών d_1, d_2 του Παραδείγματος **??**.
Έχουμε αποδείξει ότι ο $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης επομένως δεν είναι χώρος Banach (βλ. Παράδειγμα **??**). Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία του ιδίου παραδείγματος είναι ακολουθία Cauchy και στον $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ η οποία δεν συγκλίνει (αποδείξτε το), οπότε ούτε και ο $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση 1.2.1. Ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ μπορεί να γίνει πλήρης σύμφωνα με το Θεώρημα **??**. Η πλήρωση συμβολίζεται με $L^2[0,1]$. Γενικότερα, ο χώρος $L^p[a,b]$ είναι χώρος Banach, για κάθε $p \geq 1$, (βλ. Θεώρημα **??**) και είναι η πλήρωση του χώρου που αποτελείται από όλες τις πραγματικών τιμών συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ όπου η norm ορίζεται από τη σχέση

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Στους L^p χώρους είναι αφιερωμένο το επόμενο κεφάλαιο, όπου εκεί όμως ορίζονται με φυσικό τρόπο ως οι χώροι των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$.

Ορισμός 1.2.2. Ένας **υπόχωρος** W ενός χώρου Banach X είναι ένας υπόχωρος του X θεωρούμενου ως χώρος με norm.
Επομένως:
Ένας υπόχωρος W ενός χώρου Banach X *δεν είναι βέβαιο ότι είναι πλήρης.* □

Ωστόσο ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.1. Ένας υπόχωρος W ενός χώρου Banach X είναι πλήρης αν και μόνο αν το σύνολο W είναι κλειστό στον X.

Απόδειξη. (βλ. Θεώρημα **??**).

Ένα σημαντικό κριτήριο πληρότητας χώρων με norm αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.2. Ένας χώρος με norm $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach αν και μόνο αν κάθε απολύτως συγκλίνουσα ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη. (σελ. 63 Καρυοφ).

Το θεώρημα που ακολουθεί αναφέρεται στο πρόβλημα της πλήρωσης ενός χώρου με norm και αποτελεί ειδική περίπτωση του Θεωρήματος **??**.

Θεώρημα 1.2.3. (Πλήρωση) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με norm. Τότε, υπάρχει ένας χώρος Banach $\widehat{X}$ και μία ισομετρία Is από τον X σε ένα υπόχωρο W του $\widehat{X}$, ο οποίος είναι πυκνός στον $\widehat{X}$. Ο χώρος $\widehat{X}$ είναι μοναδικός, εκτός από τις ισομετρίες.

Απόδειξη. (βλ. Θεώρημα 2.3-2 [Kreyszig])

1.3 Χώροι Πεπερασμένης Διάστασης

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να αναφερθούμε σε σημαντικές έννοιες που έχουμε παρουσιάσει καθώς και σε κάποιες ακόμα που πρέπει να ορίσουμε. Συνοπτικά, ένας χώρος με norm είναι ένας γραμμικός χώρος με μετρική ορισμένη από μια νόρμα. Τα στοιχεία του χώρου αποτελούν γενίκευση της έννοιας του διανύσματος στο επίπεδο ή στον τρισδιάστατο χώρο και η norm γενικεύει την έννοια του μήκους του. Ένας χώρος Banach είναι ένας χώρος με norm ο οποίος είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ένας χώρος με norm έχει μια πλήρωση η οποία είναι χώρος Banach. Ωστόσο, δεν έχουμε ασχοληθεί με το ρόλο της διάστασης ενός μετρικού χώρου. Στη συναρτησιακή ανάλυση οι χώροι με norm άπειρης διάστασης είναι αυτοί που την ενδιαφέρουν ως αντικείμενο μελέτης αλλά πολύ περισσότερο λόγω της χρησιμότητάς τους στην επίλυση προβλημάτων. Οι χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι απλούστεροι από τους χώρους άπειρης διάστασης, όμως παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αυτό το εδάφιο θα το αφιερώσουμε σε αυτούς. Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των γραμμικών χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι το ότι όλες οι norms ενός τέτοιου μετρικού χώρου ορίζουν την ίδια τοπολογία (βλ. Ορισμός **??**), δηλαδή, τα ανοικτά σύνολα του χώρου είναι τα ίδια ανεξάρτητα από την επιλογή της τοπολογίας. Για μια πιο λεπτομερή προσέγγιση, θεωρούμε το ίδιο σύνολο X εφοδιασμένο με δύο διαφορετικές μετρικές τις $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υπενθυμίζουμε ότι παρόλο που και οι μετρικοί χώροι $(X, \|\cdot\|_1)$ και $(X, \|\cdot\|_2)$ αποτελούνται από το ίδιο σύνολο σημείων είναι διαφορετικοί εφόσον οι norms $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι διαφορετικές. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορεί να υπάρξει κάποιος συσχετισμός αυτών των μετρικών χώρων και κάτω από ποιες προϋποθέσεις αυτό μπορεί να συμβεί. Η απάντηση είναι καταφατική όταν η διάσταση του χώρου είναι πεπερασμένη. Θα δώσουμε πρώτα τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.3.1. Έστω οι χώροι $(X, \|\cdot\|_1)$ και $(X, \|\cdot\|_2)$. Αν η ταυτοτική απεικόνιση $i : X \to X$, (δηλαδή, $i(x) = x$, για κάθε $x \in X$) είναι ομοιομορφισμός, τότε οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ λέγονται **ισοδύναμες** norms. Ή εναλλακτικά, οι norms $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες, αν και μόνο αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί a

και b έτσι ώστε γιά κάθε $x \in X$

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

□

Παρατήρηση 1.3.1. Από τον Ορισμό 1.3.1 προκύπτει ότι αν οι norms $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες, τότε κάθε ανοικτό σύνολο του $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης ανοικτό και του $(X, \|\cdot\|_2)$ και αντίστροφα. Επομένως οι μετρικοί χώροι έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα. Αντίστροφα, αν οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα, τότε οι norms $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες, γιατί η ταυτοτική απεικόνιση είναι 1-1 και συνεχής, οπότε η εικόνα κάθε ανοικτού του $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι ανοικτό σύνολο του $(X, \|\cdot\|_2)$.

Επομένως:

Σε ένα μετρικό χώρο X με norm οι ισοδύναμες norms ορίζουν την ίδια τοπολογία στον X.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποιες από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των γραμμικών χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.3.1. Έστω X ένας γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $\dim X = n$ και $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ μια τυχούσα βάση του. Έστω επίσης τυχόν $x \in X$ και $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ η μοναδική του αναπαράσταση ως προς τη δοθείσα βάση. Τότε, η συνάρτηση $\|x\|_0 = \max\{|a_i| : i = 1, 2, \cdots, n\}$ ορίζει μια norm στον X και ο χώρος $(X, \|x\|_0)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη. Εύκολα φαίνεται ότι η $\|x\|_0$ είναι μια norm στον X, καθώς επίσης ότι ο γραμμικός χώρος $(X, \|x\|_0)$ είναι ισομετρικός με τον $(\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty)$. Για παράδειγμα μια ισομετρία είναι η $f : X \to \mathbb{R}^n$ με $f(x) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Επίσης, επειδή ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty)$ είναι πλήρης, έπεται ότι και ο $(X, \|x\|_0)$ είναι πλήρης. □

Πρόταση 1.3.1. Έστω $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός γραμμικού χώρου X με norm (οποιασδήποτε διάστασης). Τότε υπάρχει ένας αριθμός $c > 0$ τέτοιος ώστε για οποιοσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ισχύει η ανισότητα:

$$\|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\| \geqslant c\left(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\right). \quad (1)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $s = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Αν $s = 0$, τότε η (1) ισχύει για κάθε c, οπότε υποθέτουμε ότι $s > 0$. Τότε, αν διαιρέσουμε κατά μέλη την (1) με

$b_i = a_i/s$ παίρνουμε την ανισότητα

$$\|b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n\| \geqslant c, \qquad \sum_{i=1}^{n} |b_i| = 1, \quad (2)$$

Ας υποθέσουμε ότι η (2) δεν ισχύει. Τότε, θα υπάρχει ακολουθία $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ διανυσμάτων

$$y_m = b_1^{(m)}x_1 + b_2^{(m)}x_2 + \cdots + b_n^{(m)}x_n, \ \sum_{i=1}^{n} \left|b_i^{(m)}\right| = 1$$

τέτοια ώστε $\|y_m\| \to 0$ καθώς το $m \to \infty$.
Επειδή, $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|b_i^{(m)}\right| = 1$, έπεται ότι $\left|b_i^{(m)}\right| \leq 1$, για κάθε i σταθερό, οπότε η ακολουθία $\left(b_i^{(m)}\right) = \left(b_i^{(1)}, b_i^{(2)}, \cdots\right)$ είναι φραγμένη.
Από το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass, η ακολουθία $(b_1^{(m)})$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω b_1 το όριο της υπακολουθίας της $(b_1^{(m)})$ και $(y_{1,m})$ η αντίστοιχη υπακολουθία της (y_m). Όμοια, η $(y_{1,m})$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(y_{2,m})$ για την οποία η αντίστοιχη υπακολουθία $(b_2^{(m)})$ συγκλίνει. Έστω b_2 το όριό της.
Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο ύστερα από n βήματα παίρνουμε μια υπακολουθία $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \cdots)$ από (y_m) της οποίας οι όροι είναι της μορφής $y_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(m)} x_i$ με $\sum_{i=1}^{n} \left|c_i^{(m)}\right| = 1$, όπου η $c_i^{(m)} \to b_i$ καθώς το $m \to \infty$.
Άρα, καθώς το $m \to \infty$, $y_{n,m} \to y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ και επειδή $\sum_{i=1}^{n} |b_i| = 1$ έπεται ότι δεν είναι όλα τα b_i ίσα με 0. Αυτό συνεπάγεται ότι $y \neq 0$ (επειδή τα $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα).
Εξάλλου, αφού $y_{n,m} \to y$ έπεται ότι $\|y_{n,m}\| \to \|y\|$ (από τη συνέχεια της norm) και $\|y_m\| \to 0$ (από την υπόθεση) και επειδή η $(y_{n,m})$ είναι μια υπακολουθία της (y_m) έπεται ότι $\|y_{n,m}\| \to 0$, δηλαδή, $y = 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 1.3.2. Σε ένα γραμμικό χώρο X πεπερασμένης διάστασης όλες οι norms είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Έστω $\|\cdot\|$ μια οποιαδήποτε norm στον X. Θα αποδείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|x\|_0$ (βλ. Θεώρημα 1.3.1). Έστω ότι $\dim X = n$ και $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ μια τυχούσα βάση του. Τότε κάθε $x \in X$ έχει μοναδική αναπαράσταση

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Από την Πρόταση 1.3.1 υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε

$$\|x\| \geq c(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|).$$

Εξ άλλου είναι

$$\|x\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|e_i\|_0 \leq k \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \quad k = \max_i \|e_i\|_0$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι $\alpha\|x\|_0 \geq \|x\|$, όπου $a = c/k > 0$. Αν αλλάξουμε τους ρόλους των $\|x\|_0$ και $\|x\|$ παίρνουμε την δεύτερη ανισότητα του Ορισμού 1.3.1 οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Παρατήρηση 1.3.2. Το προηγούμενο θεώρημα από πρακτικής πλευράς είναι πολύ σημαντικό γιατί συνεπάγεται ότι σε ένα χώρο X πεπερασμένης διάστασης μια ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει ανεξάρτητα από την επιλογή της norm στο χώρο. Με άλλα λόγια, αν μια ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει ως προς μία norm τότε το ίδιο θα συμβαίνει ως προς οποιαδήποτε norm στον X.

Θεώρημα 1.3.3. Κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος W ενός γραμμικού χώρου X είναι πλήρης. Ειδικότερα, κάθε πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος X με norm είναι πλήρης.

Απόδειξη. (βλ. Θεωρ 2.4-2 σελ. 73 [Kreyszig])

Θεώρημα 1.3.4. Κάθε πεπερασμένης διάστασης γραμμικός υπόχωρος W ενός χώρου X με norm είναι κλειστός στον X.

Απόδειξη. (βλ. Θεωρ 2.4-3 σελ. 74 [Kreyszig])

Ορισμός 1.3.2. Ένας μετρικός χώρος είναι **συμπαγής** αν κάθε ακολουθία στον X έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Ένα υποσύνολο M του X λέγεται **συμπαγές** αν το M θεωρούμενο ως υπόχωρος του X είναι **συμπαγές**, δηλαδή, αν κάθε ακολουθία στο M έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία της οποίας το όριο είναι στοιχείο του M. □

Θεώρημα 1.3.5. Ένα συμπαγές υποσύνολο M ενός μετρικού χώρου X είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \overline{M}$ υπάρχει μια ακολουθία $(x_n) \in M$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ (βλ. Θεώρημα **??**(i)) και επειδή το M είναι συμπαγές το $x \in M$. Άρα, το M είναι κλειστό γιατί το $x \in \overline{M}$ είναι τυχαίο. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι φραγμένο. Αν το Μ δεν ήταν φραγμένο θα υπήρχε μια μη φραγμένη ακολουθία του (y_n) τέτοια ώστε $d(y_n, x_0) > n$, όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο. Τότε, η ακολουθία αυτή δεν θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία αφού μια συγκλίνουσα υπακολουθία θα πρέπει να είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο γιατί το Μ είναι συμπαγές. □

Παρατήρηση 1.3.3. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.3.5 γενικά δεν ισχύει. Ιδιαίτερα, σε χώρους με άπειρη διάσταση ένα υποσύνολο κλειστό και φραγμένο δεν είναι αναγκαία συμπαγές (βλ. Παράδειγμα 1.3.1).

Παράδειγμα 1.3.1. Θεωρούμε το χώρο $(\ell^2, \|\cdot\|)$. Θα αποδείξουμε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα

$$B = \left\{ x = \{\xi_1, \cdots, \xi_n \cdots\} \in \ell^2 : \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|^2 \right)^{1/2} \leqslant 1 \right\}$$

του χώρου αυτού που είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο δεν είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων της B για την οποία είναι $x_n = \{0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots\}$, δηλαδή, όλοι οι όροι είναι ίσοι με 0 εκτός από το $n-$οστό όρο που είναι ίσος με 1. Τότε, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$ έχουμε

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{2},$$

επομένως η $\{x_n\}$ και κάθε δεν είναι ακολουθίες Caushy. Αυτό σημαίνει ότι η $\{x_n\}$ δεν περιέχει υπακολουθία η οποία να συγκλίνει σε σημείο της B, οπότε η B δεν είναι συμπαγές σύνολο.

Θεώρημα 1.3.6. Σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο X με norm, κάθε υποσύνολο Μ του X είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι το Μ είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο (βλ. Θεώρημα 1.3.5). Έστω ότι το Μ είναι κλειστό και φραγμένο. Θα αποδείξουμε ότι είναι συμπαγές. Έστω ότι $\dim X = n$ και $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ μια τυχούσα βάση του. Θεωρούμε την ακολουθία κάθε $(x_m) \in M$. Τότε κάθε x_m έχει μοναδική αναπαράσταση

$$x_m = a_1^{(m)} e_1 + a_2^{(m)} e_2 + \cdots + a_n^{(m)} e_n.$$

Επειδή το M είναι φραγμένο, θα είναι και η (x_m), δηλαδή θα υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε $\|x_m\| \leq k$ για όλα τα m, οπότε από τη Πρόταση **??** έχουμε

$$k \geq \|x_m\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} e_i\| \geq c \sum_{i=1}^{n} |a_i^{(m)}|, \ c > 0.$$

Άρα, η ακολουθία των αριθμών $(a_i^{(m)})$ (i σταθερό) είναι φραγμένη, οπότε από θα έχει ένα σημείο συσσώρευσης a_i (Θεώρημα Bolzano – Weierstrass). Τότε, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.1 συμπεραίνουμε ότι η (x_m) έχει μια υπακολουθία (y_m) η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $y = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ και επειδή το M είναι κλειστό, το $y \in M$. Αποδείξαμε ότι μια οποιαδήποτε ακολουθία του M έχει συγκλίνουσα υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο M. Άρα, το M είναι συμπαγές. $\square$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.6, αν η διάσταση ενός χώρου με norm είναι πεπερασμένη, τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα είναι συμπαγής. Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο (βλ. Θεώρημα 1.3.7).

Θεώρημα 1.3.7. Σε ένα χώρο X με norm αν η κλειστή μοναδιαία μπόλα $\bar{B} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμπαγής, τότε ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.

Απόδειξη. (βλ. Θεώρ. 2.5-4 $Kreyszig$)

Παρατήρηση 1.3.4. Από τα Θεωρήματα 1.3.6 και 1.3.7 προκύπτει ότι σε ένα χώρο X με norm, η τοπολογία που παράγεται από τη norm του έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα:

Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\bar{B} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.

Η ιδιότητα αυτή αφενός χαρακτηρίζει τους χώρους με πεπερασμένη διάσταση και αφετέρου οδηγεί στη αναγκαιότητα να εφοδιάσουμε τους χώρους με μια άλλη τοπολογία ασθενέστερη (με λιγότερα ανοικτά σύνολα ή ακριβέστερα με τα ελάχιστα ανοικτά) από αυτή (βλ. Κεφ. 14).

Τα συμπαγή σύνολα, γενικότερα, είναι σημαντικά λόγω της πολύ καλής συμπεριφοράς τους. Έχουν, για παράδειγμα, κάποιες ιδιότητες όμοιες με εκείνες των κλειστών διαστημάτων της ευθείας των πραγματικών αριθμών, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.3.8. Έστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε η εικόνα ενός συμπαγούς υποσυνόλου M του X μέσω του f είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του συμπαγούς συνόλου αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $(y_n) \in f(M) \subset Y$ περιέχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει μέσα στο $f(M)$. Αφού το $y_n \in f(M)$ υπάρχει $x_n \in M$ έτσι ώστε $y_n = f(x_n)$ για κάποιο $x_n \in M$. Επειδή το M είναι συμπαγές, η (x_n) περιέχει μια υπακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει στο M και λόγω της συνέχειας της f η εικόνα της (x_{n_k}) μέσω της f είναι μια υπακολουθία της (y_n) η οποία συγκλίνει μέσα στο $f(\mathrm{M})$. Άρα, το $f(\mathrm{M})$ είναι συμπαγές. □

Πόρισμα 1.3.1. Μια συνεχής απεικόνιση f ενός συμπαγούς υποσυνόλου M ενός μετρικού X στο $\mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε κάποια σημεία του M.

Απόδειξη. Εφόσον το $f(M)$ είναι συμπαγές θα είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε $f(M) = [\min f(M), \max f(M)]$. Άρα υπάρχουν $x_1 \in M, x_2 \in M$ στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της. □

1.4 Βάσεις σε Χώρους Banach

Ορισμός 1.4.1. (Hamel Βάση) Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Μια ακολουθία διανυσμάτων $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μια βάση Hamel για τον X, αν

(i) κάθε πεπερασμένο υποσύνολο της $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και

(ii) κάθε γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι στοιχείο του X. □

Παρατήρηση 1.4.1. Σημειώνουμε ότι δεν απαιτείται το σύνολο δεικτών I μιας βάσης Hamel να είναι αριθμήσιμο.

Για την βάση Hamel μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ισοδύναμο ορισμό:

Ορισμός 1.4.2. **(Βάση Hamel)** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Μια ακολουθία διανυσμάτων $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι μια Hamel βάση για τον X, αν και μόνο αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in X$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $x = \sum_{k=1}^{N} a_k x_{i_k}$ για μια μοναδική επιλογή δεικτών $i_1, i_2, \cdots, i_N \in I$ και βαθμωτών $a_1, a_2, \cdots, a_N$ ή αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in X$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $x = \sum_{i\in I} a_i(x) x_i$ για μια μοναδική επιλογή των βαθμωτών $a_i(x)$ από τα οποία το πολύ ένας πεπερασμένος αριθμός είναι μη μηδενικά. □

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης (όπως για παράδειγμα συμβαίνει στη Γραμμική Άλγεβρα) μια Hamel βάση λέγεται απλά <βάση>, ωστόσο, σε χώρους Banach ο όρος <βάση> έχει διαφορετική έννοια (βλ. Ορισμός 1.4.2). Ένα επιχείρημα βασισμένο στο Αξίωμα της επιλογής (Λήμμα του Zorn) δείχνει ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια Hamel βάση, καθώς κα ότι όλες οι Hamel βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν τον ίδιο πλήθος στοιχείων το οποίο είναι ίσο με την διάσταση του χώρου. Για ένα χώρο Banach άπειρης διάστασης αποδεικνύεται ότι μια Hamel βάση είναι υπεραριθμήσιμη, οπότε δεν υπάρχει κατασκευαστικός τρόπος θα πάρουμε μια τέτοια βάση, με συνέπεια τέτοιες βάσεις να μη μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρέως σε τέτοιους χώρους. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμες, όπως στο Παράδειγμα **??** όπου χρησιμοποιούμε βάσεις Hamel για να αποδείξουμε ότι σε έναν άπειρης διάστασης χώρο Banach υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή τα οποία δεν είναι φραγμένα.

Επανερχόμαστε στους απειροδιάστατους χώρους Banach και ειδικότερα στους διαχωρίσιμους χώρους (βλ. Ορισμός **??**). Σε αυτούς τους χώρους έχουμε norm και επομένως έχουμε την έννοια της σύγκλισης οπότε μπορούμε να εξετάσουμε διάφορους τύπους τοπολογικών βάσεων στις οποίες επιτρέπονται αθροίσματα άπειρων όρων. Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμη η έννοια της σύγκλισης μιας σειράς σε ένα χώρο με norm (βλ. Ορισμός 1.1.4).

Ορισμός 1.4.3. (**Βάση Schauder**) Έστω X ένας χώρος με norm. Μια ακολουθία $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια **βάση** Schauder στον X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία βαθμωτών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} \|x - (a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n)\| = 0.$$

$\square$

Παράδειγμα 1.4.1. Ο ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$ έχει μια Schauder βάση την

$$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots)$$

όπου

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots) \\ &\cdots \\ e_n &= (\cdots, 0, 1, 0, \cdots) \\ &\cdots. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x \in \ell^p$ υπάρχει μοναδική ακολουθία βαθμωτών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$.

Παρατήρηση 1.4.2. Η έννοια της βάσης Schauder δεν είναι τόσο απλή όσο ίσως φαίνεται, ωστόσο, οι βάσεις αυτές παίζουν σημαντικό ρόλο στη γεωμετρία των χώρων Banach και σχεδόν όλοι οι συνήθεις χώροι της Ανάλυσης έχουν μια βάση Schauder. Αποδεικνύεται, ότι:

Αν ένας χώρος με norm έχει μια Schauder βάση, τότε είναι διαχωρίσιμος.

Το γεγονός αυτό οδήγησε τον Banach στο ερώτημα αν κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει μια βάση Schauder. Η απάντηση ερώτημα αυτό είναι αρνητική και δόθηκε από τον Enflo το 1973 ο οποίος κατασκεύασε ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach που δεν έχει καμία βάση Schauder.