ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο X που συγκλίνει στο σημείο x. Δείξτε ότι κάθε υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{n_k=1}^{\infty}$ της $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει επίσης στο x.

2. Είναι το «φραγμένο» μιας ακολουθίας σε έναν μετρικό χώρο αρκετό για να είναι η ακολουθία Cauchy; Είναι αρκετό για να συγκλίνει;

3. Αν οι $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθίες Cauchy σε έναν μετρικό χώρο (*X*, *d*), δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ όπου $a_n = d(x_n, y_n)$ συγκλίνει. Δώστε παραδείγματα για να διευκρινίσετε.

4. Χρησιμοποιώντας την πληρότητα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε την πληρότητα του $\mathbb{C}$.

5. Αποδείξτε ότι το σύνολο X όλων των ρητών αριθμών με τη συνήθη μετρική που δίνεται από τη σχέση $d(x,y)=|x-y|$ όπου $x,y\in\mathbb{Q}$, δεν είναι πλήρες. Ποιο είναι το συμπλήρωμά του ώστε να γίνει πλήρης μετρικός χώρος;

6. Στο χώρο X όλων των πολυωνύμων που θεωρούνται ως συναρτήσεις του t σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα $J=[a,b]$, ορίζουμε τη μετρική *d* ως εξής:

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|$$

Να δειχτεί ότι ο μετρικός χώρος (*X*, *d*) δεν είναι πλήρης.

7. Δείξτε ότι το σύνολο *X* των ακέραιων αριθμών με μετρική *d*, η οποία ορίζεται με την:

$$d(m,n)=|m-n|$$

είναι πλήρης μετρικός χώρος.

8. Έστω ότι το X είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων αριθμών και η μετρική d που ορίζεται ως εξής:

$$d(x,y)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|.$$

Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (*X*, *d*) δεν είναι πλήρης.

9. Δείξτε ότι αν ένας υπόχωρος *Y* ενός μετρικού χώρου αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε το *Y* είναι πλήρης.

10. Αν *Y* και *Z* είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου *X*, δείξτε ότι η τομή $Y\cap Z$ είναι υπόχωρος του *X*, αλλά η ένωση $Y\cup Z$ δεν είναι απαραίτητα υπόχωρος. Δώστε παραδείγματα.

11. Έστω ότι *Y* είναι υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου *X* και έστω $x \in X$ ως προς το *Y*. Συμβολίζουμε με $x + Y$ το σύνολο

$$x+Y=\{z\in X \mid z=x+y, y\in Y\}$$

(α) Δείξτε ότι τα σύνολα *x + Y* αποτελούν μια διαμέριση του *X* (δηλαδή, είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους αποτελεί το *X*).
(β) Δείξτε ότι με τις αλγεβρικές πράξεις που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$(x_1+Y)+(x_2+Y)=(x_1+x_2)+Y$$

$$a(x+Y)=ax+Y$$

το σύνολο $\{x+Y, x\in X\}$ είναι διανυσματικός χώρος.

Αυτός ο χώρος ονομάζεται ο **χώρος πηλίκο** του Χ με το Υ και συμβολίζεται με Χ/Υ. Η διάστασή του ονομάζεται η **υποδιάσταση** του Υ και συμβολίζεται με $\operatorname{codim} Y$, δηλαδή: $\operatorname{codim} Y=\dim(X/Y)$.

(γ) Θεωρήστε ότι ο χώρος *X* είναι το $\mathbb{R}^2$ και το Υ είναι ένας μονοδιάστατος υπόχωρος και δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του χώρου πηλίκο *x + Y*, της διανυσματικής πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (όπως τις ορίσαμε παραπάνω).
(δ) Έστω $X=\mathbb{R}^3$ και $Y=\{\xi_1,0,0\}|\xi_1\in\mathbb{R}$. Βρείτε τους Χ/Υ, Χ/Χ και Χ/{0}.

12. (α) Έστω Χ ο διανυσματικός χώρος όλων των διατεταγμένων ζευγών $x=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_1,\eta_2)$, …. από πραγματικούς αριθμούς. Δείξτε ότι οι $\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|$, $\|x\|_2=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ και $\|x\|_\infty=\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}$ ορίζουν νόρμες στον Χ.

(β) Το σύνολο $S(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|=1\}$ σε έναν χώρο Χ με νόρμα ονομάζεται **μοναδιαία σφαίρα**. Δείξτε ότι η $\|x\|_4=\sqrt[4]{\xi_1^4+\xi_2^4}$ ορίζει μια νόρμα στην *S*.

(γ) Σχεδιάστε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τις μοναδιαίες σφαίρες του Χ όπως ορίζονται από τις νόρμες $\|x\|_1$, $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_4$, $\|x\|_\infty$.
Σε πιο συμπέρασμα καταλήγετε;

13. Ένα υποσύνολο Α ενός διανυσματικού χώρου *X* είναι **κυρτό** αν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y\in A$ το «ευθύγραμμο τμήμα» που συνδέει τα σημεία *x* και *y* είναι επίσης μέσα στο σύνολο *A*. Δηλαδή, αν $x, y\in A$, τότε για κάθε $\alpha\in[0,1]$, το σημείο $z=\alpha x+(1-\alpha)y$ ανήκει στο σύνολο *A*.

(α) Δείξτε ότι η κλειστή μονάδα σφαίρα μπάλα $B(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|\le 1\}$ σε έναν χώρο με νόρμα Χ είναι κυρτό σύνολο.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=\left(\sqrt{|\xi_1|}+\sqrt{|\xi_2|}\right)^2$ δεν ορίζει νόρμα στον διανυσματικό χώρο όλων των διατεταγμένων ζευγών $x=(\xi_1,\xi_2)$, όπου $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$

Σχεδιάστε την καμπύλη φ(x)=1 θεωρείστε το σύνολο $B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \varphi(x)\le 1\}$.
Τι παρατηρείτε;

14. (α) Δείξτε ότι το σύνολο C_0 των ακολουθιών του ℓ^∞ που έχουν πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων καθώς επίσης και το σύνολο c_0 των μηδενικών ακολουθιών του ℓ^∞ είναι διανυσματικοί υπόχωροι του ℓ^∞.
(β) Εξετάστε του παραπάνω υπόχωρους ως προς την κλειστότητα.

(γ) Έστω Y το υποσύνολο όλων των ακολουθιών του ℓ^∞ που έχουν μόνο πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων. Δείξτε ότι το Y είναι υπόχωρος του ℓ^∞ αλλά δεν είναι κλειστός υπόχωρος.

15. (α) Δείξτε ότι σε έναν χώρο X με νόρμα, η πρόσθεση διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτά $(x, y) \to x + y$ και $(a, x) \to ax$ είναι συνεχείς πράξεις σε σχέση με τη νόρμα.
(β) Δείξτε ότι αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ τότε $x_n + y_n \to x + y$ καθώς και ότι αν $a_n \to a$ και $x_n \to x$ τότε $a_n x_n \to ax$.
(γ) Δείξτε ότι το κάλυμμα $\overline{Y}$ ενός υπόχωρου Y ενός χώρου X με νόρμα είναι ξανά διανυσματικός υπόχωρος.

16. Δείξτε ότι σε ένα χώρο X με νόρμα η σύγκλιση της σειράς $\|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \cdots$ μπορεί να μην συνεπάγεται τη σύγκλιση της σειράς $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$.
(β) Αν σε έναν χώρο X με νόρμα, η απόλυτη σύγκλιση κάθε σειράς συνεπάγεται πάντα σύγκλιση αυτής της σειράς, να δείξετε ότι το X είναι πλήρης.
(γ) Δείξτε ότι σε έναν χώρο Banach, μια απόλυτα συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα.

17. Δείξτε (με κάθε λεπτομέρεια) ότι ο χώρος $C[a,b]$ των συνεχών συναρτήσεων σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ με νόρμα $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ είναι χώρος Banach.

18. Δείξτε (με κάθε λεπτομέρεια) ότι ο χώρος ℓ^∞ των φραγμένων ακολουθιών (x_n) με νόρμα $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ είναι χώρος Banach.

19. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και $Y \subset X$ ένας γραμμικός υπόχωρος. Δείξτε ότι αν ο Y είναι κλειστός υπό την τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα του X τότε είναι και ο ίδιος χώρος Banach.

20. Έστω $\alpha>0$ και $\beta>0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|^{-\alpha} \log|x|^{-\beta}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Υπό ποιες συνθήκες ανήκει η f στον χώρο $L^p(\mathbb{R}^n)$;

21. Έστω $X = L^p([0,1])$ με $1 \le p < \infty$. Δείξτε ότι αν (f_n) είναι μια ακολουθία στο X με $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $\|f_n\|_p \le M$ για κάθε n, τότε υπάρχει μια υπακολουθία (f_{n_k}) που συγκλίνει στην f στην L^p-νόρμα.

22. Δείξτε ότι ο χώρος $L^1([0,1])$ είναι ένας χώρος Banach. Στη συνέχεια δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) με $f_n(x) = n \cdot \mathcal{X}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(x)$, όπου $\mathcal{X}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(x)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε μια συνάρτηση $f \in L^1[0,1]$ αλλά δεν συγκλίνει προς την f στην L^1-νόρμα.

23. Δείξτε ότι ο χώρος $L^p([0,1])$ για $1 \le p < \infty$ είναι ομοιομορφικός με το δυικό του χώρο $L^q([0,1])$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ειδικά, αν $L^2([0,1])$ είναι ομοιομορφικός με τον εαυτό του.

24. Δείξτε ότι ο δυϊκός χώρος του $L^1([0,1])$ είναι ο $L^\infty([0,1])$.

25. Δείξτε ότι αν ένας χώρος με νόρμα έχει βάση Schauder, τότε είναι διαχωρίσιμος.

26. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ όπου

$e_1 = (1,0,0,0.\dots)$,

$e_2 = (0,1,0,0,\dots)$,

…

…

$e_n = \left(\underbrace{0,\dots.,0,1}_{n\,όροι},0,\dots\right)$,

…

είναι βάση Schauder για τον χώρο ℓ^p, όπου $1 \le p < \infty$.

27. **α)** Δείξτε ότι ισοδύναμες νόρμες σε έναν διανυσματικό χώρο X επάγουν την ίδια τοπολογία για τον X.

(β) Εάν οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_0$ είναι ισοδύναμες νόρμες στον X, δείξτε ότι οι ακολουθίες Cauchy στους χώρους $(X,\|\cdot\|)$ και $(X,\|\cdot\|_0)$ είναι οι ίδιες.

(γ) Εάν οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_0$ είναι ισοδύναμες νόρμες στον X, δείξτε ότι:

(i) $\|x_n - x\| \to 0$ συνεπάγεται (ii) $\|x_n - x\|_0 \to 0$, και το αντίστροφο.

28. (α) Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου και του τοπικά συμπαγούς.

(β) Δείξτε ότι οι χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ δεν είναι συμπαγείς.

(γ) Δείξτε ότι οι χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ είναι τοπικά συμπαγείς.

(γ) Δείξτε ότι ένας διακριτός μετρικός χώρος X που αποτελείται από άπειρα σημεία δεν είναι συμπαγής.

(δ) Δώστε παραδείγματα συμπαγών και μη συμπαγών καμπύλων στο $\mathbb{R}^2$.

(ε) Δείξτε ότι ένας συμπαγής μετρικός χώρος X είναι τοπικά συμπαγής.

29. Έστω $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένας γραμμικός τελεστής που ορίζεται από τον πίνακα $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστεί η νόρμα του T όταν ο $\mathbb{R}^2$ εφοδιάζεται με την ευκλείδεια νόρμα.
[**Υπόδειξη**: Δοθέντος ενός τελεστή $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως πολλαπλασιασμός με έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, η νόρμα $\|T\|_2$ του T όταν ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με την ευκλείδεια νόρμα δίνεται από την $\|T\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)}$, όπου $\lambda_{\max}$ είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A.]

30. Βρείτε το μηδενοχώρο του τελεστή $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ που αναπαρίσταται από τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

31. Έστω ο τελεστής $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται με την
$(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \to (\xi_1,\xi_2,-\xi_1,-\xi_2)$.
Βρείτε του χώρους $\mathcal{R}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ και τον πίνακα αναπαράστασης του *T.*

32. Αν f είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό σε έναν διανυσματικό χώρο X διαστάσεως n, ποια διάσταση μπορεί να έχει ο μηδενικός χώρος $\mathcal{N}(f)$;

33. Βρείτε μια βάση του μηδενοχώρου του συναρτησιακού f του $\mathbb{R}^3$ με $f(x)=\xi_1+\xi_2-\xi_3$, όπου $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

34. Δίνεται ο χώρος $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα [0,1] εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Ορίζουμε τον τελεστή $T:C[0,1]\to C[0,1]$ ως $T(f)(x)=\int_0^x f(t)dt$. Υπολογίστε τη νόρμα του *T*.

35. Έστω $L^2(0,1)$, ο χώρος των τετραγωνικώς ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Ορίζουμε τον τελεστή $T:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ ως $T(f)(x)=xf(x)$. Υπολογίστε τη νόρμα του *T*.

36. Θεωρούμε τη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ και ορίζουμε τον τελεστή $T:\ell^2 \to \ell^2$ ως εξής: $T(x)=\{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Δηλαδή, στην τυχούσα ακολουθία $x=(x_1,x_2,x_{3,},\ldots,x_n,\ldots)$ του ℓ^2 ο T αντιστοιχίζει την ακολουθία $(a_1x_1,a_2x_2,a_3x_{3,},\ldots,a_nx_n,\ldots)$. Υπολογίστε τη νόρμα του *T.*

37. Έστω $L^2(0,2\pi)$, ο χώρος των τετραγωνικώς ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα [0, 2π]. Ορίζουμε τον τελεστή $T: L^2(0,2\pi) \to L^2(0,2\pi)$ ως $T(f)(x) = \sin x\, f(x)$. Υπολογίστε τη νόρμα του *T*.

38. Δίνεται ο χώρος $C[0,1]$ (ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα [0,1]) και το γραμμικό συναρτησιακό f που ορίζεται από την:

$$f(x) = \int_0^1 tx(t)dt.$$

Ζητείται να υπολογιστεί η **νόρμα** του συναρτησιακού f.

39. Δίνονται τα συναρτησιακά που ορίζονται στον $C[a,b]$ με τις

$$f_1(x) = \int_a^b y_0(t)x(t)dt,\ y_0 \in C[a,b]$$

και

$$f_2(x) = \kappa x(a) + \lambda x(b),\ \kappa, \lambda\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}.$$

Δείξτε ότι είναι γραμμικά και βρείτε τις νόρμες τους.

40. Να βρεθεί η νόρμα του συναρτησιακού f που ορίζεται στον $C[-1,1]$ με την

$$f(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt.$$

41. Δείξτε ότι οι $f_1(x) = \max_{x\in[a,b]} x(t)$ και $f_2(x) = \min_{x\in[a,b]} x(t)$ ορίζουν συναρτησιακά στον $C[a,b]$. Είναι αυτά γραμμικά; Είναι φραγμένα;

42. Βρείτε τη δυική βάση της βάσης $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

43. Έστω $\{f_1, f_2, f_3\}$ η δυική βάση της βάσης $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, όπου
$\varepsilon_1 = (1,1,1),\ \varepsilon_2 = (1,1,-1), \varepsilon_3 = (1,-1,-1)$
Βρείτε τις τιμές $f_1(x),\ f(x_2),\ f_3(x)$, όπου $x = (1,0,0)$.

44. Αν το X είναι ένας πραγματικός εσωτερικός χώρος, δείξτε ότι η συνθήκη ||x||=||y|| συνεπάγεται ότι $\langle x+y, x-y\rangle = 0$. Τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά αν $X = \mathbb{R}^2$; Τι σημαίνει η συνθήκη αυτή αν ο X είναι μιγαδικός;

45. Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι:
(α) Δείξτε ότι αν $y \perp x_n$ και $x_n \to x$ τότε $x_n \to x$.
(β) Δείξτε ότι αν $\|x_n\| \to \|x\|$ και $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$ τότε $x_n \to x$.
(γ) Δείξτε ότι $x \perp y \Leftrightarrow \|x+ay\| = \|x-ay\|$, για όλα τα βαθμωτά a.

46. (α) Έστω $X = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ και ότι η συνάρτηση $T : X \to X$ ορίζεται από την $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
Να δείξετε ότι η T είναι συστολή και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της σταθεράς *α*.

47. Είναι σημαντικό ότι στο θεώρημα της συστολής του Banach η συνθήκη **δεν** μπορεί να αντικατασταθεί με την

$$d\left(\mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y)\right) < d(x,y),\ x \neq y.$$

Για να το δείξετε αυτό, εξετάστε τον χώρο $X = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} \subset \mathbb{R}$, με τη συνήθη μετρική της πραγματικής ευθείας, και τον τελεστή $T : X \to X$ που ορίζεται από

$$T(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Δείξτε ότι $|T(x) - T(y)| < |x - y|$, $x \neq y$, αλλά ο τελεστής δεν έχει σταθερά σημεία.

48. Αν η απεικόνιση $T : X \to X$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$d\left(\mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y)\right) < d(x,y),\ x \neq y$$

και ο τελεστής T έχει σταθερό σημείο, δείξτε ότι το σταθερό σημείο είναι μοναδικό, όπου το (*X*, *d*)) είναι ένας μετρικός χώρος.
(α) Είναι η *T* συστολή;
(β) Αν η *T* είναι συνεχώς παραγώγιση, δείξτε ότι η *T* ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz.
(γ) Ισχύει το αντίστροφο του (β);
[Συνθήκη Lipschitz: Μια απεικόνιση $T : [a,b] \to [a,b]$ λέγεται ότι ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά Lipschitz k στο διάστημα [a,b], αν υπάρχει μια σταθερά k τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in [a,b]$ ισχύει: $|T(x) - T(y)| \leq k|x - y|$.]

49. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,t) = |\sin x| + t$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς το δεύτερο όρισμα x σε όλο το *tx*-επίπεδο αλλά η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν υπάρχει στο x=0. Τι δείχνει αυτή για τη συνθήκη Lipschitz;

50. Εξετάστε αν η συνάρτηση f που ορίζεται με την $f(x,t) = \sqrt{|x|}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

51. Θεωρήστε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών $x = (\xi_1, \xi_2)$. Βρείτε όλα τα σημεία που έχουν απόσταση $\sqrt{2}$ από το (0,0) καθώς και από το (2,0) όταν η απόσταση είναι: (a) Η ευκλείδεια απόσταση. (b) Η απόσταση που προκύπτει από τη νόρμα $\|x\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$.

52. Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο όλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Έστω $x_1 = (-1,0)$ και $x_2 = (1,0)$. Βρείτε την τομή των δύο σφαιρών που ορίζονται από τις σχέσεις $\|x - x_1\| = 1$ και $\|x - x_2\| = 1$, όταν η νόρμα είναι:

(α) Η Ευκλείδεια νόρμα,
(β) Η νόρμα $\|x\| = \max\left(|\xi_1|,|\xi_2|\right)$,
(γ) Η νόρμα $\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$.

53. Δίνεται ο χώρος $X = \mathbb{R}^2$ με τη νόρμα $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \ \forall\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το $f \in X^*$. Ποιος είναι ο X^*; Βρείτε τη νόρμα του συναρτησιακού

$$f(x) = x_1 - 2x_2.$$

54. Στον χώρο $H = L^2[0,1]$, θεωρείστε το γραμμικό συναρτησιακό

$$f(g) = \int_0^1 g(t)dt.$$

Βρείτε το στοιχείο $h \in H$ που αναπαριστά το f σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

55. Αν $X = c_0$ (ο χώρος των ακολουθιών που συγκλίνουν στο μηδέν), αποδείξτε ότι ο X^{**} είναι ισομορφικός με τον ℓ^∞ ($c_0^{**} \cong \ell^\infty$).

56. Δείξτε ότι ο χώρος ℓ^2 είναι ανακλαστικός.

[*Υπόδειξη: Υπάρχει μια πολύ σύντομη λύση.*]

57. Δίνεται ο χώρος $X = \mathbb{R}^n$ με τη φυσική νόρμα:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^1 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Επίσης, δίνεται το γραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται από την:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots nx_n \ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Να υπολογιστεί η νόρμα του *f* στο δυϊκό χώρο X^*.

58. Δίνεται το γραμμικό συναρτησιακό f που ορίζεται για συναρτήσεις g στο χώρο $L^p[0,1]$ ως εξής:

$$f(g) = \int_0^1 g(t)dt \quad \forall g \in L^p[0,1], 1 \le p < \infty$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, να βρείτε το στοιχείο $h \in \left(L^p[0,1]\right)^*$ (δηλαδή το στοιχείο του δυϊκού χώρου του $L^p[0,1]$) που αναπαριστά το συναρτησιακό f.

59. Αποδείξτε ότι ο δυϊκός χώρος c_0^* του χώρου των μηδενικών πραγματικών ακολουθιών c_0 είναι ισομορφικός με τον ℓ^1.

60. Αν $X = L^1[0,1]$ βρείτε το δυϊκό χώρο X^* και τη νόρμα του $f \in X^*$, όπου

$$f(g) = \int_0^1 g(t)dt.$$

61. Δείξτε ότι ο χώρος ℓ^∞ δεν είναι ανακλαστικός (δηλαδή $(\ell^\infty)^* \neq \ell^\infty$).

62. Έστω $E = \{u \in C[0,1] : u(0) = 0\}$ με την κανονική του νόρμα $\|u\| = \max_{t\in[o,1]} |u(t)|$ και η απεικόνιση $f : E \to \mathbb{R}$ με

$$f(u) = \int_0^1 u(t)dt.$$

(α) Δείξτε ότι $f \in E^*$ και υπολογίστε την $\|f\|_{E^*}$, όπου E^* είναι ο δυϊκός χώρος του E με την αντίστοιχη νόρμα.
(β) Υπάρχει κάποιο $u \in E$ τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$ και $f(u) = \|f\|_{E^*}$;

63. Έστω ο χώρος c_0 (δηλαδή, των μηδενικών ακολουθιών), με την κανονική του νόρμα $\|u\| = \sup_{n\geq 1} |u_n|$ Για κάθε $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots) \in c_0$, ορίζουμε:

$$f(u) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n.$$

(α) Δείξτε ότι f είναι συνεχής γραμμική συνάρτηση στον c_0 και υπολογίστε την $\|f\|_{c_0^*}$ όπου c_0^* είναι ο δυϊκός χώρος του c_0 με την αντίστοιχη νόρμα.
(β) Υπάρχει κάποιο $u \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$ και $f(u) = \|f\|_{c_0^*}$;

64. Έστω X ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος και $C \subseteq X$ ένα κυρτό υποσύνολό του.
(α) Να αποδειχθεί ότι το C και το $\mathrm{Int}C$ (το εσωτερικό του C) είναι κυρτά.
(β) Για δοσμένα $x \in C$ και $y \in \mathrm{Int}C$, να αποδειχθεί ότι $tx + (1-t)y \in \mathrm{Int}C$ για κάθε $t \in (0,1)$.
(γ) Να αποδειχθεί ότι C=$\mathrm{Int}C$ όταν $\mathrm{Int}C = \varnothing$.

65. Έστω E ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος με νόρμα.
Έστω $C \subseteq E$ ένα ανοικτό κυρτό σύνολο με $0 \in C$. Ορίζουμε τον δείκτη μέτρου (συναρτησιακό του Minkowski) p του C ως $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C, \forall x \in E\}$.
(α) Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία στο ρόλο του p.
(β) Υποθέτοντας ότι το C είναι συμμετρικό (δηλ. $-C$=C) και φραγμένο, αποδείξτε ότι το p είναι νόρμα, η οποία είναι ισοδύναμη με την αρχική νόρμα του E.
(γ) Έστω $E = C[0,1]$ με την κλασική νόρμα $\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$.

Έστω $C = \left\{ u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 < 1 \right\}$.

(i) Δείξτε ότι το C είναι κυρτό, συμμετρικό και περιέχει το 0. Είναι το C φραγμένο στο E;

(ii) Υπολογίστε τον δείκτη μέτρου p του C και δείξτε ότι το p είναι νόρμα στον E. Είναι το p ισοδύναμο με την αρχική νόρμα $\|u\|$.

66. Έστω $E=\ell^1$. Θεωρούμε τα σύνολα:

$$X=\left\{x=(x_n)_{n=1,2,\dots}\in E: x_{2n}=0,\ \forall n=1,2,\dots\right\}$$

και

$$Y=\left\{y=(y_n)_{n=1,2,\dots}\in E: y_{2n}=\frac{1}{2n}y_{2n-1}, \forall n=1,2,\dots\right\}$$

(α) Δείξτε ότι τα X και Y είναι κλειστοί γραμμικοί χώροι και ότι $X + Y = E$.
(β) Έστω $c\in E$ ορισμένο ως εξής:

$$c_{2n-1}=0,\ \forall n=1,2,\dots \quad c_{2n}=\frac{1}{2n},\ \forall n=1,2,\dots \quad .$$

Δείξτε ότι $c\notin X+Y$.

67. Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n, |\Omega|<\infty$ και $1\le p\le q\le\infty$. Να αποδειχθεί ότι $L^q(\Omega)\subseteq L^p(\Omega), \forall f\in L^q(\Omega)$ με συνεχή εμφύτευση. Πιο συγκεκριμένα, να δειχθεί ότι:

$$\|f\|_p\le|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q, \forall f\in L^q(\Omega).$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Hölder.]
Ορισμός της συνεχούς εμφύτευσης Έστω X και Y δύο γραμμικοί χώροι (π.χ., χώροι συναρτήσεων) με νόρμα (ή ημινόρμα). Λέμε ότι ο X **εμφυτεύεται συνεχώς** στον Y, και γράφουμε $X\hookrightarrow Y$, αν ισχύουν τα εξής:
1. $X\subseteq Y$, δηλαδή κάθε στοιχείο του X ανήκει και στον Y.
2. Υπάρχει σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε:

$$\|x\|_Y\le C\|x\|_X, \forall x\in X.$$

Η σταθερά C ονομάζεται *σταθερά της εμφύτευσης* και το inf των C για τα οποία ισχύει η παραπάνω ανισότητα ονομάζεται *βέλτιστη σταθερά* της εμφύτευσης.]
(*Οι συνεχείς εμφυτεύσεις διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη συναρτησιακή ανάλυση και στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, καθώς επιτρέπει τη μελέτη των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών χώρων συναρτήσεων.*)
Η σταθερά $|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ είναι βέλτιστη για την ανισότητα

$$\|f\|_p\le|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q, \forall f\in L^q(\Omega).$$

Μπορείτε να το αιτιολογήσετε;

68. Αποδείξτε ότι αν $f\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ με $1\le p\le\infty$ και $1\le q\le\infty$ $f\in L^r(\Omega)$ για κάθε r ανάμεσα στο p και το q. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας ότι για κάθε r ανάμεσα στο p και το q ισχύει $\frac{1}{r}=a\cdot\frac{1}{p}+(1-a)\cdot\frac{1}{q}$, $a\in[0,1]$ αποδείξτε ότι:

$$\|f\|_r\le\|f\|_p^a\|f\|_q^{1-a}.$$

69. Υποθέστε ότι $|\Omega|<\infty$.
1. Έστω ότι $f\in L^\infty(\Omega)$. Αποδείξτε ότι: $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$

2. Έστω ότι $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\Omega)$ και ότι υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε:

$$\|f\|_p \le C \;\forall\, 1 \le p < \infty .$$

Αποδείξτε ότι $f \in L^\infty(\Omega)$.

3. Κατασκευάστε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f \in \cap_{1\le p<\infty} L^p(\Omega)$ τέτοιο ώστε $f \notin L^\infty(\Omega)$, όπου Ω=(0,1).

70. (α) Δείξτε ότι: $\big||a+b|-|a-b|\big| \le 2|b| \;\forall a,b \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε:

(i) $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού (*a.e.*),

(ii) (f_n) είναι φραγμένη στον $L^1(\Omega)$, δηλαδή $\|f_n\|_1 \le$ M για κάθε n.

Αποδείξτε ότι $f \in L^1(\Omega)$ και ότι: $\lim_{n\to\infty} \big\| |f_n| - |f_n - f| \big\|_1 = \|f\|_1$.

[**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε την Ερώτηση 1 με $a = f_n - f$ και $b = f$, και εξετάστε την ακολουθία $\varphi_n = \big| |f_n| - |f_n - f| \big|$.]

(γ) Έστω (f_n) ακολουθία στο $L^1(\Omega)$ και $f \in L^1(\Omega)$ τέτοιες ώστε:

(i) $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού (a.e.),

(ii) $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.

Αποδείξτε ότι: $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Γιατί είναι σημαντικό αυτό το αποτέλεσμα;

71. Αποδείξτε γιατί ο $L^p(\Omega)$ δεν είναι χώρος Hilbert για $p \ne 2$. Έστω ότι Ω είναι ένας μετρικός χώρος και υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset \Omega$ με $0 < |A| < |\Omega|$.

Να αποδειχθεί ότι η $L^p(\Omega)$-νόρμα δεν ικανοποιεί τον νόμο του παραλληλογράμμου για καμία τιμή $1 \le p \le \infty,\; p \ne 2$.

[**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε δύο συναρτήσεις που έχουν μηδενική τιμή σε διαφορετικές περιοχές του χώρου Ω.

Για παράδειγμα:

Θεωρείστε τα σύνολα $A, B \subset \Omega$ με $A \cap B = \varnothing$ τις συναρτήσεις $f(x) = \mathcal{X}_A(x)$ και $g(x) = \mathcal{X}_B(x)$, όπου $f(x) = \mathcal{X}_A(x)$ και $f(x) = \mathcal{X}_A(x)$ είναι οι *χαρακτηριστικές* τους *συναρτήσεις*.

Η χαρακτηριστική ενός μετρήσιμου συνόλου A ορίζεται ως η συνάρτηση $\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$. Προφανώς, $\int_\Omega \mathcal{X}_A(x) = |A|$.]

72. Έστω *K*⊂*H* ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό σύνολο σε έναν χώρο Hilbert *H*. Έστω *f*∈*H* και $u = P_K f$, δηλαδή το u είναι η προβολή του *f* πάνω στο *K*.

1. Να αποδειχθεί ότι: $\|v-u\|^2 \le \|v-f\|^2 - \|u-f\|^2 \;\; \forall v \in K$.
2. Να συναχθεί ότι: $\|v-u\| \le \|v-f\| \;\; \forall v \in K$.

3. Να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία.

73. Έστω $F : H \to \mathbb{R}$ μια C^1 κυρτή συνάρτηση. Έστω επίσης $K \subset H$ ένα κυρτό σύνολο και $u \in H$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

1. $F(u) \leq F(v)\ \forall v \in K$,
2. $\langle\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0\ \ \forall v \in K$.

Παράδειγμα: $F(v) = |v - f|^2$, με $f \in H$ δεδομένο.

[Μια συνάρτηση $F : K \to \mathbb{R}$, όπου K είναι ένα κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου, λέγεται **κυρτή** αν για κάθε $x,y \in K$, και για κάθε $t \in [0,1]$, ισχύει: $F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y)$.]

74. Έστω $a : H \times H \to \mathbb{R}$ μια συνεχής διγραμμική μορφή τέτοια ώστε: $a(\upsilon,\upsilon) \geq 0,\ \forall \upsilon \in H$.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\upsilon \to F(\upsilon) = a(\upsilon,\upsilon)$ είναι κυρτή, κλάσης C^1, και υπολογίστε το διαφορικό της.

75. Έστω ότι (e_n) είναι μία ορθοκανονική βάση του H.

1. Δείξτε ότι η $e_n \rightharpoonup 0$ (ασθενώς).

[Η ασθενής σύγκλιση $e_n \rightharpoonup 0$ σημαίνει ότι για κάθε $\upsilon \in H$, ισχύει: $\langle e_n, \upsilon\rangle \rightharpoonup 0$, όταν το $n \to \infty$.]

2. Έστω (a_n) μία φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Ορίστε:

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} a_i e_i \ .$$

Αποδείξτε ότι $\|u_n\| \to 0$.

3. Αποδείξτε ότι $\sqrt{n}u_n \rightharpoonup 0$ (ασθενώς).

76. Έστω ότι H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

1. Έστω ότι V⊂H είναι ένας γραμμικός υπόχωρος, που είναι πυκνός στο H. Αποδείξτε ότι το V περιέχει μια ορθοκανονική βάση του H.
2. Έστω ότι $(e_n)_{n=1,2,\ldots}$ είναι μία ορθοκανονική ακολουθία στο H, δηλαδή $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του H που περιέχει το $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{e_n\}$. Πιο είναι το γενικό συμπέρασμα που καταλήγετε;

77. Έστω $I = (a,b)$ και $1 \leq p \leq \infty$. Ορίζουμε:

$$B_p = \left\{u \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \leq 1\right\}.$$

1. Αποδείξτε ότι το B_p είναι κλειστό υποσύνολο του $L^p(I)$ όταν $1 < p \leq \infty$ Πιο συγκεκριμένα, δείξτε ότι το B_p είναι συμπαγές στο $L^p(I)$.
2. Δείξτε ότι το B_1 δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $L^1(I)$.

78. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $u \to u(0)$ από τον χώρο $H^1(0,1)$ στο $\mathbb{R}$ είναι ένας συνεχής γραμμικός συναρτησιακός στον $H^1(0,1)$. Συμπεράνετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\upsilon_0 \in H^1(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$u(0) = \int_0^1 (u'\upsilon_0' + u\upsilon_0)dx, \ \forall u \in H^1(0,1).$$

Δείξτε ότι το $u'\upsilon_0'$ είναι η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Υπολογίστε το υ_0 ρητά.

79. Δείξτε ότι υπάρχει μία ακολουθία (λ_n) στον $\mathbb{R}$ με $|\lambda_n| \to \infty$ και μία ακολουθία (u_n) συναρτήσεων στο $C^2[0,1]$, τέτοιες ώστε:

1. $\|u_n\|_{L^2(0,1)} = 1$,
2. $-u_n'' = \lambda_n u_n$ στο $(0,1)$
3. $u_n'(0) = 0$ και $u_n'(1) = u_n(1)$

Αποδείξτε ότι $\lambda_n \to \infty$.

80. Αποδείξτε ότι για κάθε $L^2(0,1)$, υπάρχει μοναδικό $u \in H^1(0,1)$ που ικανοποιεί την:

$$a(u,v) = \int_0^1 fudx, \quad u \in H^1(0,1) \qquad (1)$$

Ποιο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης;
Το πρόβλημα είναι μια στάνταρτ εφαρμογή του Θεωρήματος Lax-Milgram.
Το πρόβλημα αναφέρεται σε μια **ασθενή μορφή** μιας διαφορικής εξίσωσης, όπου το $a(u,v)$ είναι μια διγραμμική μορφή (συνήθως σχετίζεται με όρους παραγώγων. Εδώ για παράδειγμα, μέχρι την παράγωγο 1ης τάξης, αφού το $u \in H^1(0,1)$, δηλαδή, στον χώρο Sobolev 1ης τάξης.) Η ασθενής μορφή συνδέεται συχνά με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ο στόχος είναι να βρεθεί $u \in H^1(0,1)$, ώστε να ικανοποιεί τη σχέση για κάθε $v \in H^1(0,1)$.
[**Υπόδειξη**: Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, διαπιστώνουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας λύσης $u \in H^1(0,1)$ της ασθενούς μορφής της διαφορικής εξίσωσης

$$a(u,v) = \int_0^1 fudx, \quad u \in H^1(0,1)$$

όπου $a(u,v)$ είναι διγραμμική μορφή, (στάνταρτ) της μορφής

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx \text{ και}$$

και $f \in L^2(0,1)$

Η ασθενής διατύπωση αντιστοιχεί στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\min_{u\in H^1(0,1)} J(u)$, του συναρτησιακού $J(u)=\frac{1}{2}\alpha(u,u)-\int_0^1 fudx$].

81. Έστω I=(0,1).

1. Αποδείξτε ότι για κάθε ε>0, υπάρχει μία σταθερά C_ε τέτοια ώστε:

$$|u(1)|^2 \le \varepsilon\|u'\|^2_{L^2(I)} + C_\varepsilon\|u\|^2_{L^2(I)},\ \forall u\in H^1(I)$$

[**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε πρώτα την ανισότητα την ανισότητα Cauchy-Schwarz και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την ανισότητα του **Young** στη μορφή:

$$ab\le\varepsilon\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,\ \forall a,b\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0$$

Αυτή η μορφή της ανισότητας είναι χρήσιμη για να χειριστούμε το γινόμενο ab και να το εκφράσουμε ως άθροισμα όρων που εμπεριέχουν μόνο a^2 και b^2, με δυνατότητα ελέγχου μέσω της παραμέτρου *ε*. Στην απόδειξη, εφαρμόστε την ανισότητα ως εξής:

Θέτοντας $a=\|u'\|_{L^2(I)}$ και $b=\|u\|_{L^2(I)}$ έχουμε:

$$2\|u'\|^2_{L^2(I)}\|u\|^2_{L^2(I)}\le\varepsilon\|u'\|^2_{L^2(I)}+\frac{1}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(I)}$$

Αυτό επιτρέπει στις νόρμες $\|u'\|_{L^2(I)}$ και $\|u\|_{L^2(I)}$ να εμφανιστούν ως ξεχωριστοί όροι.]

2. Αποδείξτε ότι, αν η σταθερά k>0 είναι επαρκώς μεγάλη, τότε για κάθε $f\in L^2(I)$, υπάρχει μοναδική λύση $u\in H^2(I)$ που ικανοποιεί:

$-u''+ku=f$ στο (0,1),

με συνοριακές συνθήκες:

u′(0)=0 και u′(1)=u(1).

Ποια είναι η ασθενής διατύπωση του προβλήματος;
Ποιο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης;

3. Ας υποθέσουμε ότι το k είναι επαρκώς μεγάλο. Έστω T ο τελεστής $T: f\mapsto u$, όπου u είναι η λύση του προβλήματος στο Ερώτημα 2.

Αποδείξτε ότι ο T είναι **αυτοσυζυγής** και **συμπαγής** στο $L^2(I)$

[Ένας τελεστής T που ορίζεται σε έναν χώρο Hilbert H λέγεται **αυτοσυζυγής** (ή συμμετρικός) εάν ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\langle T(u),v\rangle=\langle u,T(v)\rangle,\ \forall u,v\in D(T),$$

όπου είναι το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο H και $D(T)$ είναι το πεδίο ορισμού του T.
Για παράδειγμα:

Ο ταυτοτικός τελεστής, που ορίζεται ως $I(u)=u,\ \forall u \in D(T)$ είναι αυτοσυζυγής, επειδή:

$$\langle I(u),\upsilon\rangle = \langle u, I(\upsilon)\rangle,\ \forall u,\upsilon \in D(I).$$

Επιβεβαιώστε ότι και ο διαφορικός τελεστής $T=-\dfrac{d^2}{dx^2}$ ορισμένος στο χώρο $L^2([0,1])$ με τις συνοριακές συνθήκες u(0)=u(1)=0, είναι αυτοσυζυγής.

[Ένας γραμμικός τελεστής T:X→Y, όπου X και Y είναι χώροι Banach ή Hilbert, λέγεται **συμπαγής** αν μετασχηματίζει κάθε φραγμένο σύνολο του X σε ένα σύνολο που έχει **συμπαγές κάλυμμα** στο Y. Δηλαδή, για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\} \subseteq X$, η ακολουθία $\{T(x_n)\} \subseteq Y$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. (Οι συμπαγείς τελεστές είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι αφού στέλνουν «απλά» φραγμένες ακολουθίες σε συγκλίνουσες (μέσω μιας υπακολουθίας)).

Σημαντικές Ιδιότητες των Συμπαγών Τελεστών:

1. Συγκλίνουσες υπακολουθίες: Ο συμπαγής τελεστής «συμπυκνώνει» του όρους των φραγμένων ακολουθιών «μέσω των εικόνων τους»· κάθε ακολουθία $\{T(x_n)\} \subseteq Y$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει.
2. Πεπερασμένη διάσταση: Σε πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμικός τελεστής είναι συμπαγής.
3. Φραγμένος: Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος.]
4. Συμπεράνετε ότι υπάρχει μία ακολουθία (λ_n) στο ℝ με $|\lambda_n| \to \infty$ και μία ακολουθία (u_n) συναρτήσεων στο $C^2(I)$ που ικανοποιούν την:

    $-u_n'' = \lambda_n u_n$ στο (0,1),

    με:

    $u_n'(0)=0, \quad u_n'(1)=u_n(1)$

Αποδείξτε ότι $\lambda_n \to \infty$.

5. Έστω Σ το σύνολο όλων των τιμών λ∈ℝ για τις οποίες υπάρχει u≠0 που ικανοποιεί την:

$-u'' = \lambda u$ στο (0,1),

με:

$u'(0)=0, \quad u'(1)=u(1)$

Βρείτε τα θετικά στοιχεία του Σ. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία αρνητική τιμή λ (ονομάζεται λ_0 στο (0,1), στο Σ.

6. Τι συμβαίνει στο Ερώτημα 2 όταν $k=|\lambda_0|$;

82. Έστω το διάστημα I=(0,2) και ο χώρος $H^1(I)$. Θεωρείστε τη διγραμμική μορφή:

$$a(u,v)=\int_0^2 u'(t)v'(t)dt+\left(\int_0^1 u(t)dt\right)\left(\int_0^1 v(t)dt\right)$$

1. Ελέγξτε αν η *a(u,v)* είναι συνεχής συμμετρική διγραμμική μορφή, και αν η *a*(*u,u*)=*0* συνεπάγεται *u*=0.
2. Αποδείξτε ότι η *a* είναι πιεστική (coercive).

[**Υπόδειξη**: Προσπαθήστε να αποδείξετε με απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει ακολουθία (u_n) στον $H^1(I)$ τέτοια ώστε $a(u_n,v_n)\to 0$ και $\|u_n\|_{H^1}=1$. Έστω ότι η (u_{n_k}) είναι μια υπακολουθία της (u_n) τέτοια ώστε η (u_{n_k}) να συγκλίνει ασθενώς στο $H^1(I)$ και ισχυρά στον $L^2(I)$ σε ένα όριο u. Δείξτε ότι u=0.]

3. Συμπεράνετε ότι για κάθε $f\in L^2(I)$ υπάρχει μοναδικό $u\in H^1(I)$ που ικανοποιεί την:

$$a(u,v)=\int_0^2 fv,\ \forall v\in H^1(I).$$

Ποιο είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης;

4. Δείξτε ότι η λύση του (1) ανήκει στο $H^2(I)$ (και ειδικότερα ότι $u\in C^1(\bar{I})$. Προσδιορίστε την εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί το u.

[Υπόδειξη: Είναι βολικό να ορίσετε $g(x)=\left(\int_0^1 u\right)\mathcal{X}_{(0,1)}$, όπου $\mathcal{X}_{(0,1)}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του (0,1).]

5. Υποθέστε ότι $f\in C(\bar{I})$, και έστω u η λύση του (1). Αποδείξτε ότι $u\in W^{2,p}(I)$ για κάθε $p<\infty$. Δείξτε ότι $u\in C^2(\bar{I})$ αν και μόνο αν $\int_I f=0$.
6. Προσδιορίστε ρητά τη λύση u του (1) όταν η f είναι σταθερή.
7. Θέστε u=T(f) , όπου u είναι η λύση του (1) και $f\in L^2(I)$. Ελέγξτε ότι ο T είναι αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής από το $L^2(I)$ στον εαυτό του.
8. Μελετήστε τις ιδιοτιμές του T.

83. Έστω το διάστημα I=(−1,+1) Θεωρήστε τη διγραμμική $a(u,v)$ μορφή ορισμένη στο χώρο $H_0^1(I)$ (δηλαδή, στο χώρο των συναρτήσεων που ανήκουν στον $H^1(I)$ και μηδενίζονται στα άκρα του I)

$$a(u,v)=\int_{-1}^1 \left(u'(t)v'(t)-u(t)v(t)\right)dt-\lambda u(0)v(0),\ \forall u,v\in H_0^1(I)$$

όπου λ∈ℝ είναι μία σταθερά.

1. Ελέγξτε ότι $a(u,v)$ είναι μια συνεχής διγραμμική μορφή στον $H_0^1(I)$.
2. Αποδείξτε ότι αν $|\lambda|<\sqrt{2}$, η διγραμμική μορφή *a* είναι πιεστική (coercive).

   [Υπόδειξη: Ελέγξτε ότι $|u(0)|<\|u'\|_{L^2(I)}$ για κάθε $u\in H_0^1(I)$.]

3. Συμπεράνετε ότι αν $|\lambda| < \sqrt{2}$, τότε για κάθε $f \in L^2(I)$, υπάρχει μια μοναδική λύση $u \in H^2(\bar{I}) \cap H_0^1(I)$ του προβλήματος:

$$\begin{cases} -u'' + u - \lambda u(0) = f \ \text{ στο } I \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

4. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια μοναδική τιμή $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, που πρέπει να υπολογιστεί ρητά, τέτοια ώστε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -u'' + u = \lambda u(0) \ \text{ στο } I \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

να έχει λύση $u \not\equiv 0$.
[**Υπόδειξη**: Εισάγετε τη μοναδική λύση φ του προβλήματος:

$$\begin{cases} -\varphi'' + \varphi = 1 \ \text{ στο } I \\ \varphi(-1) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

και υπολογίστε τη ρητά.]
5. Αποδείξτε ότι αν $\lambda \neq \lambda_0$, τότε για κάθε $f \in L^2(I)$, υπάρχει μια μοναδική λύση $u \in H^2(\mathrm{I}) \cap H_0^1(I)$ του προβλήματος (1).

[Υπόδειξη: Σκεφτείτε τον γραμμικό τελεστή S:g↦v, όπου $g \in L^2(I)$ και v είναι η μοναδική λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} -v'' + v = g \ \text{ στο } I \\ v(-1) = v(1) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Γράψτε το πρόβλημα (1) ως εξής: $u - \lambda u(0)\varphi = S(f)$]

6. Αναλύστε πλήρως το πρόβλημα (1) όταν $\lambda = \lambda_0$.

[**Υπόδειξη**: Βρείτε μια απλή απαραίτητη και ικανή συνθήκη για το S(f) ώστε το πρόβλημα (1) να έχει λύση.]

84. Έστω ο χώρος $H = L^2(0,1)$ εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Ορίζουμε τον τελεστή $T{:}H \to H$ ως εξής:

$$T(f)(x) = x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt,\ 0 \le x < 1.$$

1. Ελέγξτε αν ο T είναι φραγμένος τελεστής.
2. Αποδείξτε ότι ο T είναι συμπαγής τελεστής.
3. Αποδείξτε ότι ο T είναι αυτοσυζυγής (self-adjoint).

4. Δείξτε ότι $\langle T(f), f\rangle \geq 0,\ \forall f \in H$ και ότι $\langle T(f), f\rangle = 0$ αν και μόνο αν f=0.

5. Θέστε $u = T(f)$. Δείξτε ότι $u \in H^2(0,1)$ και υπολογίστε την u''. Ελέγξτε αν u(0)=u′(1)=0.

6. Καθορίστε το φάσμα και τις ιδιοτιμές του Τ. Εξετάστε την περίπτωση λ=0.

Για τα επόμενα ερωτήματα, έστω:

$$e_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right),\ k = 0,1,2,\ldots$$

7. Ελέγξτε ότι το (e_k) αποτελεί ορθοκανονική βάση του H.

[**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε το Ερώτημα 6.]

8. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\tilde{e}_k)$, όπου

$$\tilde{e}_k(x) = \sqrt{2}\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right),\ k = 0,1,2,\ldots$$

είναι επίσης ορθοκανονική βάση του H.

[Υπόδειξη: Θεωρήστε τα $e_k(1-x)$.]

Για μια συνάρτηση $f \in H$, συμβολίζουμε με $a_k(f)$ τις συνιστώσες της f ως προς τη βάση (e_k).

9. Υπολογίστε τα $a_k(f)$ για τις εξής συναρτήσεις:

(α) $f_1(x) = \mathcal{X}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$, όπου $0 \leq a < b \leq 10$.

(β) $f_2(x) = x$

(γ) $f_3(x) = x^2$.

Τέλος, προτείνουμε να χαρακτηρίσουμε τις συναρτήσεις $f \in L^2(0,1)$ που ανήκουν στον $H^1(0,1)$

10. Υποθέστε ότι $f \in H^1(0,1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά a∈ℝ (που εξαρτάται από το f) τέτοια ώστε $(ka_k(f) + a) \in \ell^2$, δηλαδή,

$$\sum_{\kappa - 0}^{\infty} \left|ka_k(f) + a\right| < \infty.$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες στον υπολογισμό του $a_k(f)$.]

11. Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι η $f \in L^2(0,1)$ και ότι η (1) ισχύει για κάποιους a ∈ ℝ. Αποδείξτε ότι $f \in H^1(0,1)$.

[Υπόδειξη: Ορίστε $\tilde{f} = f + \frac{a\pi}{\sqrt{2}}$ και $\tilde{f}_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\tilde{f}) e_k(x)$. Ελέγξτε το ότι η $\|\tilde{f}'_n\|_{L^2}$ παραμένει φραγμένη καθώς το $n \to \infty$.