**ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ SOBOLEV.**

# 1 Διαφορίσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Σε ό,τι ακολουθεί, το $\Omega$ θα είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

Επιπλέον, εάν $x_0 \in \mathbb{R}^N,\ \delta > 0,$ θέτουμε

$$B(0,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < \delta\}, \quad B[0,\delta] = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq \delta\},$$

όπου $|\cdot|$ η ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}^N$.

**Πρόταση 1** *Έστω $K$ συμπαγές υποσύνολο του $\Omega$. Τότε:*

**(i)** *υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $K + B[0,\delta] \subseteq \Omega$.*

**(ii)** *υπάρχει $\omega$ ανοικτό τέτοιο ώστε*

$$K \subseteq \omega \subseteq \overline{\omega} \subseteq \Omega, \quad \overline{\omega} \ \text{συμπαγές}.$$

**Απόδειξη:** **(i)** Επιλέγουμε $0 < \delta < d(K,\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$.

Έστω $x \in K,\ h \in B[0,\delta]$. Εάν $x_0 + h \notin \Omega,$ τότε

$$|x - (x+h)| \ \geq \ d(K,\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \ > \ \delta \ \Rightarrow \ |h| \ > \ \delta \ \text{(άτοπο)}.$$

Άρα, $x_0 + h \in \Omega,$ οπότε $K + B[0,\delta] \subseteq \Omega$.

**(ii)** Θέτουμε $\omega = K + B(0,\delta)$. Προφανώς, $\omega$ ανοικτό. Το $K + B[0,\delta]$ είναι συμπαγές και

$$\overline{\omega} \ \subseteq \ K + B[0,\delta] \ = \ \overline{K} + \overline{B(0,\delta)} \ \subseteq \ \overline{K + B(0,\delta)} = \overline{\omega} \ \Rightarrow \ \overline{\omega} = K + B[0,\delta] \ \subseteq \ \Omega.$$

□

**Συμβολισμός:** Με $C(\Omega)$ συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πάνω στο $\Omega$.

**Ορισμός 2** *Έστω $u \in C(\Omega)$.* **Φορέας** *της $u$ είναι το*

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Προφανώς, το $supp(u)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\overline{\Omega}$.

**Συμβολισμοί:**

- $C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : supp(u)$ συμπαγές υποσύνολο του $\Omega\}$
- $C^k(\Omega)$ = το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων πάνω από το $\Omega$ που έχουν μερικές παραγώγους έως και τάξης $k \geq 1$
- Για $k \geq 1,\ C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \bigcap C_c(\Omega)$

- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$
- $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \bigcap C_c(\Omega)$.

Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε συναρτήσεις του $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, χρήσιμες για τα επόμενα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι

$$\psi \in C(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \psi \leq 1, \quad \lim_{t\to+\infty} \psi(t) = 1$$

και $\psi(t) \neq 0$ ανν $t > 0$. Επιπλέον, $supp(\psi) = [0, +\infty)$.

**Πρόταση 3** $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Ειδικότερα,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *υπάρχει πολυώνυμο* $p_n(t)$ *ώστε*

$$\psi^{(n)}(t) = p_n\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t), \quad \forall\, t \neq 0, \quad \psi^{(n)}(0) = 0.$$

**Απόδειξη:** Με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$.

- Για $n = 0$ ισχύει, αφού $\psi(0) = 0$ (εδώ $p_0(t) = 1$).
- Ισχύει και για $n = 1$. Πράγματι, προφανώς $\psi$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με

$$\psi'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2}e^{-1/t}, & t > 0 \\ \\ 0, & t < 0 \end{cases} = p_1\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t),$$

  όπου $p_1(t) = t^2$. Επιπλέον,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s}{e^s} = 0, \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} = 0,$$

  επομένως $\psi$ διαφορίσιμη στο 0 και $\psi'(0) = 0$.
- Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει η $\psi^{(n)}$ στο $\mathbb{R}$ και

$$\psi^{(n)}(t) = p_n\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t), \quad \forall\, t \neq 0, \quad \psi^{(n)}(0) = 0,$$

  όπου $p_n(t)$ πολυώνυμο.

Επειδή $\psi$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει η $\psi^{(n+1)}$ στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\forall\, t \neq 0$,

$$\begin{aligned}\psi^{(n+1)}(t) &= -\frac{1}{t^2}p_n'\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t) + p_n\left(\frac{1}{t}\right)\psi'(t) = -\frac{1}{t^2}p_n'\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t) + \frac{1}{t^2}p_n\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t)\\ &= p_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t),\end{aligned}$$

όπου $p_{n+1}(t) = t^2[p_n(t) - p_n'(t)]$. Επιπλέον,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\psi^{(n)}(t)-\psi^{(n)}(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{p_n\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t)}{t} = \lim_{s\to+\infty}\frac{sp_n(s)}{e^s} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\psi^{(n)}(t)-\psi^{(n)}(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-}\frac{p_n\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t)}{t} = 0,$$

επομένως $\psi^{(n)}$ διαφορίσιμη στο 0 και $\psi^{(n+1)}(0) = 0$. □

**Πρόταση 4** $\forall\, r > 0$, *υπάρχει* $\varphi_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *ώστε*

$$supp(\varphi_r) = B[0,r], \quad 0 \le \varphi_r \le 1, \quad \varphi_r(0) > 0.$$

**Απόδειξη:** Θέτουμε

$$\varphi_r(x) = \psi(r^2 - |x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Λόγω της Πρότασης 3, ισχύει $\varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Επίσης, $0 \le \varphi_r \le 1$ και

$$\varphi_r(x) \neq 0 \ \text{ ανν } \ r^2 - |x|^2 > 0 \ \text{ ανν } |x| < r,$$

δηλ. $\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi_r(x) \neq 0\} = B(0,r) \Rightarrow supp(\varphi_r) = B[0,r]$.

Τέλος, $\varphi_r(0) = \psi(r^2) > 0$. □

**Σχόλιο 5** *Εάν $\varphi_r$ η συνάρτηση που ορίστηκε στην τελευταία πρόταση, τότε*

$$\varphi_r(x) = \begin{cases} exp\left(\frac{1}{|x|^2-r^2}\right), & |x| < r\\[2ex] 0, & |x| \le r.\end{cases}$$

**Πόρισμα 6** $\forall\, r > 0$, *υπάρχει* $\eta_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *ώστε*

$$supp(\eta_r) = B[0,r], \quad 0 \le \eta_r \le 1, \quad \eta_r(0) = 1.$$

**Απόδειξη:** Έστω $\varphi_r$ όπως στην Πρόταση 4. Θέτουμε

$$\eta_r(x) = \frac{2\varphi_r(0)\varphi_r(x)}{[\varphi_r(x)]^2 + [\varphi_r(0)]^2}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι η $\eta_r$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. □

Χρήσιμες για τα επόμενα είναι οι συναρτήσεις **αποκοπής** που περιγράφονται στις τρεις επόμενες προτάσεις.

**Πρόταση 7** *Έστω $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Τότε, $\exists\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ώστε $0 \le \varphi \le 1$ και*

$$\varphi\,|_{(-\infty,a]}= 1, \quad \varphi\,|_{[b,+\infty)}= 0, \quad \varphi(t) > 0 \ \text{ ανν } \ t < b, \quad \varphi(t) < 1 \ \text{ ανν } \ t > a.$$

**Απόδειξη:** Έστω $\psi$ όπως ορίστηκε πριν την Πρόταση 3. Θέτουμε

$$\varphi(t) = \frac{\psi(b-t)}{\psi(b-t) + \psi(t-a)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Επειδή δεν είναι δυνατό να ισχύουν ταυτόχρονα $b - t \le 0,\ t - a \ge 0$, έπεται ότι ο παρανομαστής στον παραπάνω τύπο είναι πάντα θετικός, οπότε $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Προφανώς, $0 \le \varphi \le 1$. Επιπλέον,

$$\varphi(t) > 0 \ \text{ ανν } \ \psi(b-t) > 0 \ \text{ ανν } \ t < b, \quad \varphi(t) < 1 \ \text{ ανν } \ \psi(t-a) > 0 \ \text{ ανν } \ t > a.$$

Τέλος,

$$\forall\, t \le a,\ \ \psi(t-a) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(t) = 1, \quad \forall\, t \ge b,\ \ \psi(b-t) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(t) = 0.$$

□

**Πρόταση 8** *Έστω $0 < r < R,\ x_0 \in \mathbb{R}^N$. Τότε, $\exists\, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ώστε*

$$0 \le h \le 1, \quad h\,|_{B[x_0,r]}= 1, \quad supp(h) \subseteq B(x_0, R).$$

**Απόδειξη:** Επιλέγουμε $\theta \in (r,\ R)$ και θέτουμε $a = r^2,\ b = \theta^2$. Έστω $\varphi$ όπως στην Πρόταση 7. Θέτουμε

$$h(x) = \varphi(|x - x_0|^2), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Προφανώς, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ και $0 \le h \le 1$.

- $\forall\, x \in B[x_0, r],\ \ |x - x_0|^2 \le r^2 = a \Rightarrow h(x) = \varphi(|x - x_0|^2) = 1.$
- $\forall\, x \notin B(x_0, \theta),\ \ |x - x_0|^2 \ge \theta^2 = b \Rightarrow h(x) = \varphi(|x - x_0|^2) = 0,$ δηλ.

$$\{x \in \mathbb{R}^N : h(x) \neq 0\} \subseteq B(x_0, \theta) \Rightarrow supp(h) \subseteq B[x_0, \theta] \subseteq B(x_0, r).$$

□

Η επόμενη Πρόταση αποτελεί μια $C^\infty-$ ισχυροποίηση του γνωστού λήμματος του **Uryshonn** στον $\mathbb{R}^N$.

**Πρόταση 9** *Έστω $K$ συμπαγές υποσύνολο του $\Omega$. Τότε, $\exists\, H \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ώστε*

$$0 \le H \le 1, \quad H\,|_K = 1, \quad supp(H) \subseteq \Omega.$$

**Απόδειξη:** $\forall x \in K$, επιλέγουμε $0 < r_x < R_x$ ώστε

$$B[x, r_x] \subseteq B(x, R_x) \subseteq B[x, R_x] \subseteq \Omega.$$

Επειδή $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ ανοικτή κάλυψη του $K$, $\exists\ x_1,\ x_2,\ \ldots, x_l \in K$ $(l \geq 1)$ ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} B(x_j, r_{x_j}).$$

$\forall\ j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, έχουμε $B[x_j, r_{x_j}] \subseteq B(x_j, R_{x_j})$, οπότε, λόγω της Πρότασης 8, $\exists\ h_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ώστε

$$0 \leq h_j \leq 1, \quad h_j \mid_{B[x_j, r_{x_j}]} = 1, \quad supp(h_j) \subseteq B(x_j, R_{x_j}).$$

Θέτουμε

$$H(x) = 1 \ - \ \prod_{j=1}^{l} [\ 1 \ - \ h_j(x)\ ], \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Προφανώς, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq H \leq 1$.

- $\forall\ x \in K$, $\exists\ j$ ώστε $x \in B(x_j, r_{x_j}) \ \Rightarrow\ h_j(x) = 1 \ \Rightarrow\ H(x) = 1$.
- $\forall\ x \notin \bigcup_{j=1}^{l} B(x_j, R_{x_j})$, έχουμε ότι $h_j(x) = 0$, $\forall\ j$ και συνεπώς, $H(x) = 1 - 1 = 0$. Επομένως,

$$\{x \in \mathbb{R}^N : H(x) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} B(x_j, R_{x_j}) \Rightarrow supp(H) \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} B[x_j, R_{x_j}] = L \subseteq \Omega$$

και το $L$ είναι συμπαγές.

$\square$

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με περαιτέρω βασικές ιδιότητες των συνεχών ή διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα.

Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.
Θεωρούμε την επέκταση $\overline{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Προφανώς, $\overline{u}$ μετρήσιμη. Επιπλέον, $\forall\ p \in [1, \infty]$, ισχύει η ισοδυναμία

$$u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \overline{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

(εδώ θεωρούμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$).
Δεν ισχύει κάτι ανάλογο για το χώρο $C(\Omega)$. Παρ' όλ' αυτά ισχύει η παρακάτω

**Πρόταση 10** *Εάν* $u \in C_c(\Omega)$, *τότε* $\overline{u} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ *και*

$$supp(u) = supp(\overline{u}), \quad \overline{u}\mid_{\partial\Omega} = 0,$$

*όπου* $\partial\Omega$ *το σύνορο του* $\Omega$.

**Απόδειξη:** Επειδή $\partial\Omega$, $\Omega$ ξένα μεταξύ τους, προφανώς $\overline{u}\mid_{\partial\Omega} = 0$.

Θα δείξουμε ότι $\overline{u} \in C(\mathbb{R}^N)$.

Επειδή $\Omega$ ανοικτό και $\overline{u}\mid_{\Omega} = u$, έπεται ότι η $\overline{u}$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $\Omega$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Τότε, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus K$, όπου $K = supp(u)$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^N \setminus K$.

Έστω $x \in B(x_0, \delta)$.

–Εάν $x \in \Omega$, τότε $\Omega \setminus K \Rightarrow \overline{u}(x) = u(x) = 0$.

–Εάν $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, τότε πάλι $\overline{u}(x) = 0$.

Άρα, $\overline{u}\mid_{B(x_0,\delta)} \equiv 0 =$ συνεχής, οπότε και η $\overline{u}$ είναι συνεχής στο $x_0$ .

Με βάση τα παραπάνω, $\overline{u} \in C(\mathbb{R}^N)$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \overline{u}(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\} \Rightarrow supp(\overline{u}) = supp(u).$$

□

**Σχόλιο 11** *Εάν* $u \in C_c(\Omega)$, *γράφοντας* "$u\mid_{\partial\Omega} = 0$", *εννοούμε* $\overline{u}\mid_{\partial\Omega} = 0$.

**Πρόταση 12** *Εάν* $u \in C_c^1(\Omega)$, *τότε* $\nabla u \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *και* $supp(\nabla u) \subseteq supp(u)$.

**Απόδειξη:** Θέτουμε $K = supp(u)$. Το $K$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\Omega$.

**Ισχυρισμός:** $\{x \in \Omega : \nabla u(x) \neq 0\} \subseteq K$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι υπάρχει $x_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε

$$\nabla u(x_0) \neq 0, \quad x_0 \notin K.$$

Επειδή το $\Omega \setminus K$ είναι ανοικτό και περιέχει το $x_0$ , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq \Omega \setminus K$. Για κάθε $h \in \mathbb{R}^N$ με $0 < |h| < \delta$, έχουμε $u(x_0) = u(x_0 + h) = 0$ και

$$\frac{|(\nabla u(x_0),\ h)|}{|h|} = \frac{|u(x_0 + h) - u(x_0) - (\nabla u(x_0),\ h)|}{|h|},$$

όπου $(\cdot, \cdot)$ το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$.

Επειδή $u$ διαφορίσιμη στο $x_0$, το β′ μέλος της παραπάνω ισότητας τείνει στο 0 καθώς $|h| \to 0$, οπότε

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|(\nabla u(x_0),\ h)|}{|h|} = 0.$$

Θέτουμε $h_n = \dfrac{1}{n} \nabla u(x_0)$ , $n \geq 1$. Τότε, $|h_n| \xrightarrow{n} 0$, οπότε

$$\lim_n \frac{|(\nabla u(x_0),\ h_n)|}{|h_n|} = 0 \ \Rightarrow \ |\nabla u(x_0)| = 0 \Rightarrow \nabla u(x_0) = 0 \text{ (ΑΤΟΠΟ)}.$$

Από τον παραπάνω ισχυρισμό προκύπτει άμεσα ότι $supp(\nabla u) \subseteq K \subseteq \Omega$.

□

**Πόρισμα 13** *Εάν* $u \in C_c^1(\Omega)$, *τότε* $\partial_i u \in C_c(\Omega), \quad 1 \le i \le N$.

**Απόδειξη:** Άμεση από Πρότ. 12, αφού $supp(\partial_i u) \subseteq supp(\nabla u), 1 \le i \le N$. $\square$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε μια ισχυροποίηση της Πρότασης 10.

Κάθε $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, λέγεται **πολυδείκτης**. Θέτουμε $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|$. Εάν $k \ge 1$, $u \in C^k(\Omega)$, για κάθε πολυδείκτη $\alpha$ με $|\alpha| \le k$, θέτουμε

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} u.$$

**Παραδείγματα:**

**(i)** Έστω $1 \le i \le N$. Θέτουμε $e_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ με $\alpha_j = 0$, για $j \ne i$ και $\alpha_i = 1$. Τότε, $D^{e_i} u = \partial_i u$.

**(ii)** Εάν $N = 3$, $\alpha = (1, 2, 1)$, $\beta = (2, 0, 1)$, $u \in C^4(\Omega)$, τότε

$$D^\alpha u = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3} u, \quad D^\beta u = \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_3} u.$$

**Πρόταση 14** *Έστω* $k \ge 1$, $u \in C_c^k(\Omega)$. *Τότε,* $\overline{u} \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ *και για κάθε πολυδείκτη* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *με* $|\alpha| \le k$, *ισχύει* $\overline{D^\alpha u} = D^\alpha \overline{u}$, *δηλαδή* $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$,

$$D^\alpha \overline{u}(x) = \begin{cases} D^\alpha u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

*Ειδικότερα, εάν* $u \in C_c^\infty(\Omega)$, *τότε* $\overline{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

**Απόδειξη:** Με επαγωγή στο $k \ge 1$.

- $k = 1$. Επειδή $\overline{u}\,|_\Omega = u\,|_\Omega$ και $\Omega$ ανοικτό, έπεται ότι $\overline{u}$ διαφορίσιμη στο $\Omega$ και $\nabla \overline{u}\,|_\Omega = \nabla u\,|_\Omega$.

  Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 10, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ ώστε $\overline{u}\,|_{B(x_0,\delta)} \equiv 0$. Έπεται ότι $\overline{u}$ διαφορίσιμη στο $x_0$ και $\nabla \overline{u}(x_0) = 0$.

  Άρα, $\overline{u}$ διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^N$ με $\nabla \overline{u} = \overline{\nabla u} \Rightarrow \partial_i \overline{u} = \overline{\partial_i u} \in C(\mathbb{R}^N)$, $1 \le i \le N$ ενώ $\overline{u} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ (βλ. Πρόταση 10). Άρα, $\overline{u} \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ και ισχύει για $k = 1$.

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $k \ge 1$.

  Έστω $u \in C_c^{k+1}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ πολυδείκτης με $|\alpha| \le k$ και $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Τότε, $\partial_i u \in C_c^k(\Omega)$ (βλ. και Πόρισμα 13). Λόγω της περίπτωσης $k = 1$ και της υπόθεσης της επαγωγής,

$$\partial_i \overline{u} = \overline{\partial_i u} \in C_c^k(\mathbb{R}^N), \quad D^\alpha \left(\overline{\partial_i u}\right) = \overline{D^\alpha (\partial_i u)}. \tag{1}$$

Έπεται ότι $\overline{u} \in C_c^{k+1}(\mathbb{R}^N)$.

Έστω τώρα $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$ πολυδείκτης με $0 < |\beta| \leq k+1$. Υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ τέτοιο ώστε $\beta_i \geq 1$. Θεωρούμε τον πολυδείκτη $\alpha = \beta - e_i$. Τότε, $|\alpha| = |\beta| - 1 \leq k$ και

$$D^\beta = D^{\alpha + e_i} = D^\alpha \circ D^{e_i} = D^\alpha \circ \partial_i,$$

οπότε, λόγω της (1), παίρνουμε

$$D^\beta(\overline{u}) = D^\alpha(\overline{\partial_i u}) = \overline{D^\alpha(\partial_i u)} = \overline{D^\beta(u)}.$$

Άρα, ισχύει και για $k+1$. □

# 2 Μεταβολικό Λήμμα - Θ. Lusin.

Με $\lambda$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $L^1_{loc}(\Omega)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $u : \Omega \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$\int_K |u| d\lambda < \infty, \quad \forall\, K \subseteq \Omega \text{ συμπαγές.}$$

**Πρόταση 15** *Ισχύει*

$$C(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega), \quad C_c(\Omega) \subseteq L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall\, p \in [1, \infty].$$

**Απόδειξη:** Εάν $u \in C(\Omega)$ και $L$ συμπαγές υποσύνολο του $\Omega$, τότε

$$\int_L |u| d\lambda \leq ||u\,|_L\,||_\infty \lambda(L) < \infty$$

και συνεπώς, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Στη συνέχεια, έστω $u \in C_c(\Omega)$ και $K = supp(u)$. Προφανώς $u$ φραγμένη, οπότε $u \in L^\infty(\Omega)$.

Εάν $1 \leq p < \infty$, τότε

$$\int_\Omega |u|^p d\lambda = \int_K |u|^p d\lambda = ||u||_\infty^p \lambda(K) < \infty.$$

Συνεπώς, $C_c(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$, $\forall\, p \in [1, \infty]$.

Τέλος, θεωρούμε ένα συμπαγές υποσύνολο $L$ του $\Omega$.

–Εάν $u \in L^\infty(\Omega)$ τότε

$$\int_L |u| d\lambda \leq ||u||_\infty \lambda(L) < \infty.$$

–Εάν $u \in L^1(\Omega)$ τότε

$$\int_L |u| d\lambda \leq \int_\Omega |u| d\lambda < \infty.$$

–Εάν $u \in L^p(\Omega),\ 1 < p < \infty,$ τότε μέσω της ανισότητας Hölder παίρνουμε

$$\int_L |u| d\lambda \leq \left(\int_L |u|^p d\lambda\right)^{1/p} \cdot \left(\int_L 1^q d\lambda\right)^{1/q} \leq ||u||_p \cdot \lambda(L)^{1/q} < \infty,$$

όπου $1/p + 1/q = 1.$ □

Η επόμενη Πρόταση αποτελεί ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα του Λογισμού Μεταβολών και είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως **Μεταβολικό Λήμμα (Variational Lemma).**

**Πρόταση 16** *Έστω* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *τέτοια ώστε*

$$\int_\Omega u\varphi \, d\lambda = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

*Τότε,* $u = 0,\ \lambda-$ *σ.π. στο* $\Omega$.

Η απόδειξη της Πρότασης 16 θα γίνει μετά την απόδειξη του παρακάτω Λήμματος:

**Λήμμα 17** *Έστω* $K \subseteq \Omega$ *συμπαγές. Τότε, υπάρχουν ακολουθία* $(V_n)$ *ανοικτών υποσυνόλων του* $\Omega$ *και* $L \subseteq \Omega$ *συμπαγές τέτοια ώστε*

$$K \subseteq V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq L \subseteq \Omega, \quad n \geq 1, \quad \lim_n \lambda(V_n \setminus K) = 0.$$

**Απόδειξη:** Με βάση την Πρόταση 1, επιλέγουμε ανοικτό σύνολο $\omega$ ώστε

$$K \subseteq \omega \subseteq \overline{\omega} \subseteq \Omega, \quad \overline{\omega} \text{ συμπαγές}.$$

Λόγω της κανονικότητας του μέτρου $\lambda$, έχουμε

$$\lambda(K) = \inf\{\lambda(W) : K \subseteq W \subseteq \Omega,\ W \text{ ανοικτό}\}.$$

$\forall\, n \geq 1,$ επιλέγουμε $W_n \subseteq \Omega$ ανοικτό ώστε

$$K \subseteq W_n\ , \quad \lambda(W_n \setminus K) < 1/n\ .$$

Θέτουμε $V_n = \omega \bigcap W_n\ , n \geq 1$ και $L = \overline{\omega}.$ □

**Απόδειξη της Πρότασης 16:** Για $c \in \mathbb{R},$ θέτουμε

$$(u \neq c) = \{x \in \Omega : u(x) \neq c\}, \quad (u > c) = \{x \in \Omega : u(x) > c\}, \quad (u < c) = \{x \in \Omega : u(x) < c\}.$$

Προφανώς, $\lambda((u \neq 0)) = \lambda((u > 0)) + \lambda((u < 0)).$

Υποθέτουμε ότι $\lambda((u \neq 0)) > 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda((u > 0)) > 0$. Επειδή

$$(u > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (u > 1/n),$$

υπάρχει $n_0 \geq 1$ με $\lambda((u > 1/n_0)) > 0$. Θέτουμε $\epsilon = 1/n_0$ .

Λόγω της κανονικότητας του μέτρου $\lambda$, έχουμε

$$0 < \lambda((u > \epsilon)) = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq (u > \epsilon) \ \text{συμπαγές}\}.$$

Επιλέγουμε $K \subseteq (u > \epsilon)$ συμπαγές με $\lambda(K) > 0$.

Με βάση το Λήμμα 17, επιλέγουμε ακολουθία $(V_n)$ ανοικτών υποσυνόλων του $\Omega$ και $L \subseteq \Omega$ συμπαγές τέτοια ώστε

$$K \subseteq V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq L \subseteq \Omega, \quad n \geq 1, \quad \lim_n \lambda(V_n \setminus K) = 0.$$

Σύμφωνα με τη Πρόταση 9, $\forall\, n \geq 1$, $\exists\, H_n \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ ώστε

$$0 \leq H_n \leq 1, \quad H_n\,|_K = 1, \quad supp(H_n) \subseteq V_n \subseteq L \subseteq \Omega.$$

Τότε, $\forall\, n \geq 1$, $H_n\,|_\Omega \in C_c^{\infty}(\Omega)$ και

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega u H_n \, d\lambda \ &= \ \int_K u H_n \, d\lambda \ + \ \int_{\Omega \setminus K} u H_n \, d\lambda = \int_K u \, d\lambda \ + \ \int_{V_n \setminus K} u H_n \, d\lambda \\ &\geq \ \epsilon \lambda(K) + \int_{V_n \setminus K} u H_n \, d\lambda \end{aligned}$$

(σημ. ότι $H_n(x) = 0$, $\forall\, x \in \Omega \setminus V_n$).

Ταυτόχρονα, $\forall\, n \geq 1$,

$$\left| \int_{V_n \setminus K} u H_n \, d\lambda \right| \leq \int_{V_n \setminus K} |u| \, d\lambda, \quad V_n \setminus K \subseteq L, \quad \int_L |u| d\lambda < \infty, \quad \lim_n \lambda(V_n \setminus K) = 0,$$

οπότε

$$\lim_n \int_{V_n \setminus K} u H_n \, d\lambda = 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι $0 \geq \epsilon \lambda(K) > 0$, (άτοπο). □

**Θεώρημα 18 (Θ. Lusin.)** *Για κάθε* $p \in [1, \infty)$, *ισχύει*

$$\overline{C_c^{\infty}(\Omega)}^{||\cdot||_p} = L^p(\Omega).$$

**Απόδειξη:** Υποθέτουμε αντιθέτως ότι ο $\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_p}$ είναι γνήσιος κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^p(\Omega)$. Από το Θ. Hahn - Banach, υπάρχει $\Phi \in (L^p(\Omega))^*$ ώστε

$$||\Phi|| = 1, \quad \Phi(u) = 0, \;\; \forall \; u \in \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_p}.$$

Υπάρχει $w \in L^{p'}(\Omega)$ ώστε

$$||w||_{p'} = ||\Phi|| = 1, \quad \Phi(u) = \int_\Omega uw \, d\lambda, \quad \forall \; u \in L^p(\Omega),$$

όπου

$$p' = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1}, & p > 1 \\ \\ \infty, & p = 1. \end{cases}$$

Έχουμε ότι $\forall \; \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega w\varphi \, d\lambda = \Phi(\varphi) = 0,$$

ενώ $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ (βλ. Πρόταση 15). Το Μεταβολικό Λήμμα (Πρόταση 16) μας δίνει ότι $w = 0$, $\lambda-$ σ.π. στο $\Omega$ (άτοπο). $\square$

**Σχόλιο 19** *Το Θ. Lusin γενικά δεν ισχύει για $p = \infty$ διότι*

$$\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_\infty} \subseteq C(\Omega), \quad C(\Omega) \neq L^\infty(\Omega).$$

Π.χ. θέτουμε $\Omega = (0, 1)$ και

$$u(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ \\ 0, & 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Τότε, $u \in L^\infty(\Omega)$ αλλά η $u$ δεν ταυτίζεται σ.π. με κάποια $w \in C(\Omega)$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\exists \; w \in C(\Omega)$ ώστε $\lambda((u \neq w)) = 0$.

Το σύνολο $V = (w \neq 0) \cap (w \neq 1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $(u \neq w)$, οπότε

$$\lambda(V) = 0 \Rightarrow V = \emptyset \Rightarrow w(\Omega) \subseteq \{0, 1\}.$$

Αλλά $w$ συνεχής στο διάστημα $\Omega$, οπότε $w \equiv 0$ ή $w \equiv 1$.

–Εάν $w \equiv 0$, τότε $\lambda((u \neq 0)) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda((0, 1/2)) = 0$, άτοπο.

–Εάν $w \equiv 1$, τότε $\lambda((u \neq 1)) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda([1/2, 1)) = 0$, άτοπο.

# 3 Χώροι Sobolev στη διάσταση 1.

Με $\lambda$ ή $dx$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.

**Κίνητρο:** Έστω $a < b$ και το Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Π.Σ.Τ.)

$$\left\{ \begin{array}{c} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad \lambda - \text{σ.π. στο } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{array} \right\} \tag{2}$$

Εάν η $f$ δεν ταυτίζεται σ.π. με μια συνεχή στο $(a, b)$, το Π.Σ.Τ. (2) δεν έχει κλασική λύση $u \in C^2[a, b]$.

Π.χ. $a = 0,\ b = 1$ και

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq x < 1. \end{array} \right.$$

Υποθέτουμε ότι $f \in C[a, b]$ και $u \in C^2[a, b]$ κλασική λύση του (2). Τότε, για κάθε $\varphi \in C_c^1(a, b)$ ($\Rightarrow\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ) έχουμε

$$-\int_a^b u''(x)\varphi(x)dx + \int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

κι εφαρμόζοντας την κλασική παραγοντική ολοκλήρωση, παίρνουμε

$$\int_a^b u'(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b u(x)\varphi(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx. \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι για να ορίζονται τα ολοκληρώματα στην (3), αρκεί $f \in L^1(a, b)$ και

$$u \in L^1(a, b), \quad u \text{ σ.π. διαφορίσιμη στο } (a, b), \quad u' \in L^1(a, b). \tag{4}$$

Εάν $f \in L^1(a, b)$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε σαν **ασθενή λύση** του (2) μια συνάρτηση $u$ που ικανοποιεί τις (4), (3). Γενικότερα, στην (4) η παράγωγος της $u$ **θα μπορούσε να υπάρχει με κάποια έννοια ασθενέστερη από την κλασική.**

**Ορισμός 20** *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $u,\ g \in L^1_{loc}(I)$. Η $g$ λέγεται* **ασθενής παράγωγος** *της $u$ στο $I$ ανν*

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(I). \tag{5}$$

Το Μεταβολικό Λήμμα (Πρόταση 16) μας εξασφαλίζει ότι αν μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(I)$ έχει ασθενή παράγωγο, τότε αυτή είναι **μοναδική ως προς την σ.π. ταύτιση.**

Δηλαδή, αν $g\ , \tilde{g} \in L^1_{loc}(I)$ δύο ασθενείς παράγωγοι της $u$, τότε $g = \tilde{g}$ $\lambda-$σ.π. στο $I$.

Εάν $g$ ασθενής παράγωγος της $u$, γράφουμε $g = u'$.

**Σχόλιο 21** *Τα ολοκληρώματα στην (5) ορίζονται. Πράγματι, εάν $K = supp\varphi$, τότε $\varphi' \in C_c(I)$, $supp\varphi' \subseteq K$ (βλ. Πρόταση 12 ) και*

$$\left|\int_I u(x)\varphi'(x)dx\right| = \left|\int_K u(x)\varphi'(x)dx\right| \leq \int_K |u(x)||\varphi'(x)|dx \leq ||\varphi' \,|_K\, ||_\infty \int_K |u(x)|dx < \infty,$$

$$\left|\int_I g(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_K g(x)\varphi(x)dx\right| \leq \int_K |g(x)||\varphi(x)|dx \leq ||\varphi \,|_K\, ||_\infty \int_K |g(x)|dx < \infty.$$

**Παραδείγματα:**

**(i)** $u : I = (-1,1) \to \mathbb{R},\ u(x) = |x|,\ x \in I.$

$\forall\ \varphi \in C_c^\infty(I)$, έχουμε $\varphi(\pm 1) = 0$ και

$$\begin{aligned}\int_I u(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)dx + \int_0^1 x\varphi'(x)dx \\ &= -[x\varphi(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x)dx + [x\varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx,\end{aligned}$$

όπου

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases}, \quad x \in I.$$

Είναι σαφές ότι η $g$ είναι ασθενής παράγωγος της $u$.

**(ii)** $u : I = (-1,1) \to \mathbb{R}$, με

$$u(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}, \quad x \in I.$$

Θα δείξουμε ότι η $u$ **δεν** έχει ασθενή παράγωγο. Πράγματι, ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι έχει ασθενή παράγωγο $h \in L^1_{loc}(I)$. Τότε, $\forall\ \varphi \in C_c^\infty(I)$, έχουμε $\varphi(\pm 1) = 0$ και

$$\int_I h(x)\varphi(x)dx = -\int_I u(x)\varphi'(x)dx = \int_{-1}^0 \varphi'(x)dx - \int_0^1 \varphi'(x)dx = 2\varphi(0). \quad (6)$$

Επιλέγουμε $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 6, υπάρχει $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ώστε

$$supp(\eta_\varepsilon) = [-\varepsilon,\ \varepsilon], \quad 0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1, \quad \eta_\varepsilon(0) = 1.$$

Εφαρμόζοντας την (6 ) για "$\varphi$" $= \eta_\varepsilon$ παίρνουμε

$$2 = \left|\int_I h(x)\eta_\varepsilon(x)dx\right| \leq \int_I |h(x)|\eta_\varepsilon(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h(x)|\eta_\varepsilon(x)dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h(x)|dx$$

και η τελευταία ισχύει $\forall\ \varepsilon \in (0, 1/2)$.

Αλλά $[-\varepsilon,\ \varepsilon] \subseteq [-1/2,\ 1/2],\ \ \forall\, \varepsilon \in (0, 1/2)$ και $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} |h(x)|dx < \infty$, οπότε $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h(x)|dx = 0 \ \Rightarrow 2 \leq 0$ (άτοπο!).

**Πρόταση 22** *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $u \in C^1(I)$. Τότε, η κλασική παράγωγος $u'$ είναι και ασθενής παράγωγος της $u$ στο $I$.*

**Απόδειξη:** Είναι σαφές ότι $u, u' \in C(I) \subseteq L^1_{loc}(I)$.

**Ισχυρισμός:** Για κάθε $\varphi \in C^1_c(I)$, ισχύει $\displaystyle\int_I \varphi'(x)dx = 0$.

Πράγματι, θεωρούμε την επέκταση $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases}$$

Από τις Προτάσεις 10, 12, 14 γνωρίζουμε ότι $\overline{\varphi} \in C^1_c(\mathbb{R})$ και

$$supp(\overline{\varphi}') \subseteq supp(\overline{\varphi}) = supp(\varphi), \quad \overline{\varphi}'(x) = \begin{cases} \varphi'(x), & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus I. \end{cases}$$

Επιλέγουμε ανοικτό διάστημα $(a, b)$ τέτοιο ώστε $supp(\varphi) \subseteq (a, b)$. Έχουμε

$$\int_I \varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi}'(x)dx = \int_a^b \overline{\varphi}'(x)dx = \overline{\varphi}(b)\ -\ \overline{\varphi}(a) = 0.$$

Έστω στη συνέχεια $u \in C^1(I),\ \varphi \in C^1_c(I)$. Τότε, $u \cdot \varphi \in C^1_c(I)$ και ο παραπάνω ισχυρισμός δίνει

$$\int_I (u \cdot \varphi)'(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I u'(x)\varphi(x)dx.$$

□

**Ορισμός 23** *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $1 \leq p \leq \infty$. Θέτουμε*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \textit{η } u \textit{ έχει ασθενή παράγωγο } u' \in L^p(I)\}.$$

Το παραπάνω σύνολο είναι γραμμικός υπόχωρος του $L^p(I)$.

**Παράδειγμα:**

$C^1_c(I) \subseteq W^{1,p}(I)$ (βλ. Πρόταση 22, καθώς και το Πόρισμα 13 και την Πρόταση 15) ).

Ειδικότερα, αν $I$ φραγμένο, τότε $C^1(\overline{I}) \subseteq W^{1,p}(I)$.

**Ορισμός 24** *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$.*

- *εάν* $1 \leq p < \infty$, *θέτουμε*

$$||u||_{1,p} = ( \, ||u||_p^p \; + \; ||u'||_p^p \, )^{1/p} = \left( \int_I |u(x)|^p dx \; + \; \int_I |u'(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

- *εάν* $p = \infty$, *θέτουμε*

$$||u||_{1,\infty} = ||u||_\infty \; + \; ||u'||_\infty.$$

*Η* $|| \cdot ||_{1,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *ορίζει νόρμα στον* $W^{1,p}(I)$.

*Για* $p = 2$, *έκφραση*

$$\langle u, v \rangle_{1,2} = \int_I u(x)v(x)dx \; + \; \int_I u'(x)v'(x)dx, \quad u, \; v \in W^{1,2}(I)$$

*ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον* $W^{1,2}(I)$ *με αντίστοιχη νόρμα*

$$||u||_{1,2} = \left( \int_I |u(x)|^2 dx \; + \; \int_I |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Πρόταση 25** *Ο* $(W^{1,p}(I), \; || \cdot ||_{1,p} \,)$ *είναι Banach για* $1 \leq p \leq \infty$. *Ειδικότερα, είναι χώρος Hilbert για* $p = 2$.

**Πρόταση 26** *Ο* $(W^{1,p}(I), \; || \cdot ||_{1,p} \,)$ *είναι*
**(i)** *διαχωρίσιμος, για* $1 \leq p < \infty$.
**(ii)** *ανακλαστικός, για* $1 < p < \infty$.

Οι Προτάσεις 25, 26 θα αποδειχθούν στην επόμενη παράγραφο για την περίπτωση της ανώτερης διάστασης.

**Θεώρημα 27** *Έστω* $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, $a \in I$. *Θέτουμε*

$$\tilde{u}(x) = \int_a^x u'(t)dt, \quad x \in \overline{I}.$$

*Τότε,* $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ *και* $u = \tilde{u}$, $\lambda-$ *σ.π. στο* $I$. *Επιπλέον,*

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)dt, \quad \forall \, x, \; y \in \overline{I} \text{ με } x < y.$$

# 4 Χώροι Sobolev σε ανώτερη διάσταση.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ ανοικτό με σύνορο $\partial\Omega$.

**Ορισμός 28** *Το $\partial\Omega$ ονομάζεται* **κλάσης** *$C^1$ ανν για κάθε $z \in \partial\Omega$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $V_z$ , $W_z \subseteq \mathbb{R}^N$, αμφιδιαφόριση $h_z : V_z \to W_z$ και $\eta_z \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$ ώστε*

- $h_z(V_z \cap \partial\Omega) = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_{N-1},\ x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N = \eta_z(x_1,\ x_2, \ldots, x_{N-1})\} \cap W_z$
- $h_z(V_z \cap \Omega) = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_{N-1},\ x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > \eta_z(x_1,\ x_2, \ldots, x_{N-1})\} \cap W_z$.

Με απλά λόγια, το $\partial\Omega$ είναι κλάσης $C^1$ ανν

- τοπικά και ως προς κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, το $\partial\Omega$ είναι το γράφημα μιας συνάρτησης του $C^1(\mathbb{R}^{N-1})$.
- το $\Omega$ ''κείται'' προς τη μια πλευρά του συνόρου του.

**Παράδειγμα 29** *Θέτουμε $N = 2$, $\Omega = B(0,2) \setminus \partial B(0,1)$. Τότε, $\partial\Omega = \partial B(0,2) \cup \partial B(0,1)$ και υπάρχουν σημεία του $\Omega$ που κείνται και προς τις δύο πλευρές του $\partial B(0,1)$ (εντός και εκτός του $B(0,1)$). Επομένως, δεν ικανοποιείται η δεύτερη απαίτηση του Ορισμού 28 (ενώ ικανοποιείται η πρώτη) και άρα το $\partial\Omega$ δεν είναι κλάσης $C^1$.*

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ ανοικτό με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης $C^1$. Τότε, σε κάθε $z \in \partial\Omega$, ορίζεται το **μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου**

$$\nu(z) = (\nu_1(z), \nu_2(z), \ldots \nu_N(z)).$$

Εάν επιπλέον $\Omega$ φραγμένο και $\vec{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ κλάσης $C^1$ στο $\Omega$ και συνεχής στο $\partial\Omega$, τότε ισχύει **ο τύπος της απόκλισης του Gauss:**

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{F}(x)dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{F}(z), \nu(z))dz.$$

Έστω $u, \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$ και $\vec{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ με όλες τις συνιστώσες μηδενικές εκτός από την $i-$ συνιστώσα που ισούται με $u \cdot \varphi$. Σε αυτή την περίπτωση ο παραπάνω τύπος γράφεται

$$\int_\Omega \partial_i(u \cdot \varphi)(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(z)\varphi(z)\nu_i(z)dz$$

κι έτσι προκύπτει **ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης:**

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(z)\varphi(z)\nu_i(z)dz, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{7}$$

Ειδικότερα, εάν $u \in C^1(\overline{\Omega}),\ \varphi \in C_c^1(\Omega),$ τότε $\varphi\ |_{\partial\Omega} = 0$ και η τελευταία γράφεται

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)dx, \quad 1 \le i \le N. \tag{8}$$

Η (8) προέκυψε από τον τύπο της απόκλισης του Gauss που ισχύει για $\Omega$ ανοικτό, **φραγμένο με σύνορο κλάσης** $C^1$ **και** $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Παρ' όλ' αυτά, η (8) ισχύει κάτω από **ασθενέστερες υποθέσεις**, όπως μας εξασφαλίζει η παρακάτω

**Πρόταση 30** *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *ανοικτό και* $u \in C^1(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(\Omega)$. *Τότε,*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)dx, \quad 1 \le i \le N. \tag{9}$$

**Απόδειξη:** Η απόδειξη βασίζεται στον παρακάτω ισχυρισμό:

**Ισχυρισμός:** Για κάθε $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, ισχύει $\displaystyle\int_\Omega \partial_i\varphi(x)dx = 0,\ \ 1 \le i \le N.$

Πράγματι, θεωρούμε την επέκταση $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ με

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Από τις Προτάσεις 10, 12, 14 γνωρίζουμε ότι

$$supp(\partial_i\overline{\varphi}) \subseteq supp(\overline{\varphi}) = supp(\varphi), \quad \partial_i\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \partial_i\varphi(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \quad 1 \le i \le N.$$

Επιλέγουμε ανοικτή μπάλα $B$ στον $\mathbb{R}^N$ ώστε $supp(\varphi) \subseteq B$. Εφαρμόζοντας την (8) για "$u$" $= 1$, "$\Omega$" $= B$, "$\varphi$" $= \overline{\varphi}\ |_B$, παίρνουμε $\displaystyle\int_B \partial_i\overline{\varphi}(x)dx = 0$ και

$$\int_\Omega \partial_i\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i\overline{\varphi}(x)dx = \int_B \partial_i\overline{\varphi}(x)dx = 0, \quad 1 \le i \le N.$$

Έστω στη συνέχεια $u \in C^1(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(\Omega)$. Τότε, $u \cdot \varphi \in C_c^1(\Omega)$ και ο παραπάνω ισχυρισμός δίνει

$$\int_\Omega \partial_i(u\cdot\varphi)(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega \partial_i u(x)\varphi(x)dx, \quad 1 \le i \le N.$$

□

**Σχόλιο 31** *Τα ολοκληρώματα στην (9) ορίζονται αν υπάρχει η "$\partial_i u$" υπό κάποια έννοια* **ασθενέστερη** *από την κλασική και ισχύει* $u,\ \partial_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Με κίνητρο το παραπάνω σχόλιο, οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 32** *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *ανοικτό και* $u, g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \le i \le N$. *Η* $g_i$ *λέγεται* **ασθενής** $i-$ **μερική παράγωγος της** $u$ *ανν*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Το Μεταβολικό Λήμμα (Πρόταση 16) μας εξασφαλίζει ότι αν μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ έχει ασθενή μερική παράγωγο ως προς κάποια μεταβλητή, τότε αυτή είναι **μοναδική ως προς την σ.π. ταύτιση.**

Δηλαδή, αν $g_i\ , \tilde{g}_i \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \le i \le N$ δύο ασθενείς $i-$ μερικές παράγωγοι της $u$, τότε $g_i = \tilde{g}_i$ $\lambda-$ σ.π., όπου $\lambda$ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$.

Εάν $g_i$ ασθενής $i-$ μερική παράγωγος της $u$, γράφουμε $g_i = \partial_i u$, $1 \le i \le N$.

**Σχόλιο 33** *Οι Προτάσεις 30, 15 μας εξασφαλίζουν ότι οι κλασικές μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης* $u \in C^1(\Omega)$ *είναι και ασθενείς.*

**Ορισμός 34** *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *ανοικτό και* $1 \le p \le \infty$. *Θεωρούμε το γραμμικό χώρο*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \eta\ u \text{ έχει ασθενείς μερικές παραγώγους } \partial_i u \in L^p(\Omega),\ 1 \le i \le N\}.$$

**Παραδείγματα:**

**(i)** $C^1_c(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ (βλ. Σχόλιο 33, Πόρισμα 13 και Πρόταση 15).
Ειδικότερα, αν $\Omega$ φραγμένο, τότε $C^1(\overline{\Omega}) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$.

**(ii)** $N = 2$, $\Omega = B(0,1)$, $0 < \gamma < 1$, $1 \le p < \dfrac{2}{\gamma+1}$,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\gamma}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}, \quad x \in \Omega.$$

Προφανώς, $u \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ και $\forall\, x = (x_1\ , x_2) \in \Omega \setminus \{0\}$,

$$\partial_i u(x) = -\gamma |x|^{-\gamma-1}\frac{x_i}{|x|} = -\gamma \frac{x_i}{|x|^{\gamma+2}}, \quad i = 1, 2.$$

Θέτουμε

$$g_i(x) = \begin{cases} \partial_i u(x), & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0. \end{cases}, \quad x \in \Omega,\ \ i = 1, 2.$$

Τότε, για $i = 1, 2$, $x \in \Omega$, έχουμε $|g_i(x)| \le \dfrac{\gamma}{|x|^{\gamma+1}}$ και χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$\int_\Omega |g_i(x)|^p dx \ \le\ \gamma^p \int_{B(0,1)} \frac{dx}{|x|^{p(\gamma+1)}} = 2\pi\gamma^p \int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\rho^{p(\gamma+1)}} = 2\pi\gamma^p \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p(\gamma+1)-1}} < \infty$$

(σημ. ότι $0 < p(\gamma+1) - 1 < 1$ ).

Επομένως, $g_i \in L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega),\ i = 1,2.$

**Ισχυρισμός:** Η $g_i$ είναι $i-$ ασθενής μερική παράγωγος της $u$ στο $\Omega,\ i = 1,2.$

**Απόδειξη του ισχυρισμού:**

Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ και $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \varepsilon < |x| < 1\}$. Τότε,

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(0,\varepsilon), \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}, \quad \partial B(0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = \varepsilon\}.$$

Προφανώς, $u\,|_{\overline{\Omega}_\varepsilon} \in C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ και $\partial\Omega_\varepsilon$ κλάσης $C^1$.

Έστω $i \in \{1,2\},\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ($\Rightarrow\ \varphi\,|_{\partial\Omega} = 0$). Λόγω της (7), έχουμε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u(\partial_i\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} (\partial_i u)\varphi \ + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u\varphi\nu_i = \int_{\Omega_\varepsilon} (\partial_i u)\varphi \ + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi\nu_i \tag{10}$$

και

$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi\nu_i\right| \ \leq \ \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |u||\varphi| \ \leq \ \frac{||\varphi||_\infty}{\varepsilon^\gamma} 2\pi\varepsilon = 2\pi||\varphi||_\infty \varepsilon^{1-\gamma},$$

οπότε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\varphi\nu_i = 0. \tag{11}$$

Επιπλέον,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} u(\partial_i\varphi) = \int_\Omega u(\partial_i\varphi), \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} (\partial_i u)\varphi = \int_\Omega g_i\varphi. \tag{12}$$

Πράγματι,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u(\partial_i\varphi) = \int_\Omega u(\partial_i\varphi)\mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} (\partial_i u)\varphi = \int_\Omega g_i\varphi\mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon},$$

ενώ

$$\forall\, x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}(x) = \mathcal{X}_{\Omega\setminus\{0\}}(x).$$

[Για να ελέγξουμε την τελευταία, έστω $x \in \Omega \setminus \{0\}$. Τότε, $\forall\, \varepsilon \in (0,|x|)$, ισχύει $x \in \Omega_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{X}_{\Omega_\varepsilon}(x) = 1 = \mathcal{X}_{\Omega\setminus\{0\}}(x)$. ]

Τώρα, η (12) έπεται από το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue. (Σημ. ότι $\lambda(\{0\}) = 0$.

Από τις (10), (11), (12) προκύπτει ότι

$$\int_\Omega u(\partial_i\varphi) = -\int_\Omega g_i\varphi$$

και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $u \in W^{1.p}(\Omega)$.

Από την άλλη πλευρά, η $u$ **δεν ταυτίζεται σ.π. με μια συνεχή** στο $\Omega$.

Πράγματι, έστω $w \in C(\Omega)$. Θέτουμε $M = \max\{\ |w(x)| : |x| \leq 1/2\ \}$. Επειδή $\lim_{|x| \to 0^+} u(x) = +\infty$, υπάρχει $\delta \in (0, 1/2)$ ώστε

$$\forall\ x \in \Omega \ \text{ με } \ 0 < |x| < \delta, \quad \text{ισχύει } \ u(x) > M.$$

Έπεται ότι $\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < \delta\} \subseteq (u \neq w) \ \Rightarrow \ \lambda((u \neq w)) > 0$.

**Σχόλιο 35** *Το παραπάνω παράδειγμα* **(ii)** *μας δείχνει ότι* **το Θεώρημα 27 δεν επεκτείνεται σε διάσταση** $N > 1$. *Αυτή είναι και μια βασική διαφορά μεταξύ των χώρων Sobolev στη διάσταση 1 και των χώρων Sobolev σε ανώτερη διάσταση.*

Έστω $k \geq 1$, $\tilde{w} = (w_1\,, w_2\,, \ldots, w_k) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $1 \leq p \leq \infty$ .

- εάν $1 \leq p < \infty$, θέτουμε

$$||\tilde{w}||_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \left( \int_\Omega |\tilde{w}(x)|^p dx \right)^{1/p} .$$

- εάν $p = \infty$, θέτουμε

$$||\tilde{w}||_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \sum_{i=1}^{k} ||w_i||_\infty \,.$$

O $(L^p(\Omega, \mathbb{R}^k), ||\cdot||_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)}\ )$, $1 \leq p \leq \infty$ είναι Banach.

**Πρόταση 36** *Έστω* $k \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. *Υπάρχουν θετικές σταθερές* $c_1\,, c_2$ *τέτοιες ώστε* $\forall\ \tilde{w} = (w_1\,, w_2\,, \ldots, w_k) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$,

$$c_1 \left( \sum_{i=1}^{k} ||w_i||_p^p \right)^{1/p} \ \leq \ ||\tilde{w}||_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)} \ \leq \ c_2 \left( \sum_{i=1}^{k} ||w_i||_p^p \right)^{1/p} .$$

*Ειδικότερα, εάν* $u \in W^{1.p}(\Omega)$, *ισχύει*

$$c_1 \left( \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_p^p \right)^{1/p} \ \leq \ \left( \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/p} \ \leq \ c_2 \left( \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_p^p \right)^{1/p} .$$

**Απόδειξη:** Οι εκφράσεις

$$|\xi|_p = \left( \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^p \right)^{1/p} , \quad |\xi| = \left( \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 \right)^{1/2} , \quad \xi = (\xi_i)_{i=1}^k \,,$$

ορίζουν ισοδύναμες νόρμες στον $\mathbb{R}^k$, οπότε υπάρχουν θετικές σταθερές $c_1$ , $c_2$ τέτοιες ώστε

$$c_1|\xi|_p \ \leq \ |\xi| \ \leq \ c_2|\xi|_p \ , \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^k.$$

Για όλα τα $\tilde{w} = (w_1\ , w_2\ , \ldots , w_k) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $x \in \Omega$, θέτοντας στην παραπάνω $\xi = (w_i(x))_{i=1}^k$ παίρνουμε

$$c_1^p \sum_{i=1}^k |w_i(x)|^p \ \leq \ |\tilde{w}(x)|^p \ \leq \ c_2^p \sum_{i=1}^k |w_i(x)|^p$$

και ολοκληρώνοντας πάνω στο $\Omega$, προκύπτει η πρώτη αποδεικτέα.

Η δεύτερη αποδεικτέα προκύπτει άμεσα, θέτοντας στην πρώτη "$k$" $= N$, "$\tilde{w}$" $= \nabla u$. □

**Ορισμός 37** *Έστω* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

- *εάν* $1 \leq p < \infty$, *θέτουμε*

$$||u||_{1,p} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \ + \ \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

- *εάν* $p = \infty$, *θέτουμε*

$$||u||_{1,\infty} = ||u||_\infty \ + \ \sum_{i=1}^N ||\partial_i u||_\infty \ ,$$

*όπου* $\nabla u(x) = (\partial_1 u(x),\ \partial_2 u(x), \ldots , \partial_N u(x))$ , $x \in \Omega$ *και οι μερικές παράγωγοι* $\partial_i u$, $1 \leq i \leq N$ *λαμβάνονται με την ασθενή έννοια.*

*Η* $||\cdot||_{1,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *ορίζει νόρμα στον* $W^{1,p}(\Omega)$.

*Για* $p = 2$, *η έκφραση*

$$\langle u, v\rangle_{1,2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ + \ \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))dx, \quad u,\ v \in W^{1,2}(\Omega)$$

*ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον* $W^{1,2}(\Omega)$ *με αντίστοιχη νόρμα*

$$||u||_{1,2} = \left( \int_\Omega |u(x)|^2 dx \ + \ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Σχόλιο 38** *Έστω $1 \le p < \infty$. Η Πρόταση 36 μας εξασφαλίζει ότι η έκφραση*

$$\left( ||u||_p^p \; + \; \sum_{i=1}^{N} ||\partial_i u||_p^p \right)^{1/p} \;, \quad u \in W^{1,p}(\Omega),$$

*ορίζει στον $W^{1,p}(\Omega)$ νόρμα ισοδύναμη με την $||\cdot||_{1,p}$ .*

*Επομένως, ο γραμμικός τελεστής $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$ με*

$$T(u) = (u,\ \partial_1 u,\ \partial_2 u, \ldots, \partial_N u)$$

*είναι ισομορφισμός μεταξύ χώρων με νόρμα.*

**Πρόταση 39** *Ο $(W^{1,p}(\Omega),\ ||\cdot||_{1,p}\ )$ είναι Banach για $1 \le p \le \infty$. Ειδικότερα, είναι χώρος Hilbert για $p = 2$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

**Λήμμα 40** *Έστω $(u_n) \subseteq L^p(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$ ώστε $u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$. Τότε,*

$$\int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \xrightarrow{n} \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

**Απόδειξη:** Έστω $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ και $K = supp(\varphi)$. Τότε, $K$ συμπαγές υποσύνολο του $\Omega$ και $\lambda(K) < \infty$.

- $p = 1$. Έχουμε

$$\left| \int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \; - \; \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \right| \; \le \; \int_\Omega |u_n(x) \; - \; u(x)| \cdot |\varphi(x)|dx \; \le \; ||\varphi||_\infty ||u_n - u||_1 \xrightarrow{n} 0.$$

- $1 < p < \infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \; - \; \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \right| \; \le \; \int_\Omega |u_n(x) \; - \; u(x)| \cdot |\varphi(x)|dx = \\ = \; & \int_K |u_n(x) \; - \; u(x)| \cdot |\varphi(x)|dx \overset{\text{(Hölder)}}{\le} \left( \int_K |u_n(x) \; - \; u(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int_K |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ \le \; & ||\varphi||_\infty \; \lambda(K)^{1/q} \; ||u_n - u||_p \xrightarrow{n} 0, \quad \text{όπου } \; 1/p + 1/q = 1. \end{aligned}$$

- $p = \infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx \; - \; \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \right| \; \le \; \int_\Omega |u_n(x) \; - \; u(x)| \cdot |\varphi(x)|dx = \\ = \; & \int_K |u_n(x) \; - \; u(x)| \cdot |\varphi(x)|dx \; \le \; ||\varphi||_\infty \lambda(K) ||u_n - u||_\infty \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

$\square$

**Απόδειξη της Πρότασης 39:** Έστω $(u_n) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ακολουθία Cauchy. Από τον ορισμό της νόρμας $||\cdot||_{1,p}$ προκύπτει ότι οι $(u_n)$, $(\nabla u_n)$ είναι Cauchy στους χώρους $L^p(\Omega)$, $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ αντίστοιχα. Επομένως, υπάρχουν $u \in L^p(\Omega)$ και $\tilde{w} = (w_1\,, w_2\,, \ldots, w_N) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ώστε

$$u_n \overset{||\cdot||_p}{\to} u, \quad \nabla u_n \overset{L^p(\Omega,\mathbb{R}^N)}{\to} \tilde{w} \;\Rightarrow\; \partial_i u_n \overset{||\cdot||_p}{\to} w_i\,, \quad 1 \leq i \leq N$$

(βλ. και Σχόλιο 38 ).

Λόγω του Λήμματος 40, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$ έχουμε

$$\int_\Omega \partial_i u_n(x)\varphi(x)dx \overset{n}{\to} \int_\Omega w_i(x)\varphi(x)dx, \quad \int_\Omega u_n(x)\partial_i\varphi(x)dx \overset{n}{\to} \int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx,$$

ενώ

$$\int_\Omega \partial_i u_n(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u_n(x)\partial_i\varphi(x)dx, \quad n \geq 1,$$

οπότε

$$\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx.$$

Έπεται ότι $w_i = \partial_i u$ με την ασθενή έννοια και $\partial_i u_n \overset{||\cdot||_p}{\to} \partial_i u$, $1 \leq i \leq N$.

Άρα, $u_n \overset{||\cdot||_{1,p}}{\to} u$ (βλ. και πάλι Σχόλιο 38 ). $\square$

**Πρόταση 41** *Ο χώρος Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *είναι*
**(i)** *διαχωρίσιμος για* $1 \leq p < \infty$.
**(ii)** *ανακλαστικός για* $1 < p < \infty$.

**Απόδειξη:** Ο τελεστής $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$ με

$$T(u) = (u,\ \partial_1 u,\ \partial_2 u, \ldots, \partial_N u)$$

είναι ισομορφισμός (βλ. Σχόλιο 38 ) κι επειδή ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach, ο $T(W^{1,p}(\Omega))$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$.

Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το ότι ο $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$ είναι διαχωρίσιμος για $1 \leq p < \infty$ και ανακλαστικός για $1 < p < \infty$. $\square$

## 5 Πυκνότητα διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$.

**Θεώρημα 42 (Meyers - Serrin)** *Για $1 \le p < \infty$, ο $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$.*

**Σχόλιο 43** *Στο παραπάνω θεώρημα δεν μπορούμε εν γένει να αντικαταστήσουμε τον $C^\infty(\Omega)$ με τον $C^\infty(\overline{\Omega})$. Παρ' όλ' αυτά, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:*

**Θεώρημα 44 (Friedrichs)** *Έστω $1 \le p < \infty$ και $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Τότε, υπάρχει $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ώστε*

- $u_n \,|_\Omega \to u$ *στον* $L^p(\Omega)$.
- *για κάθε* $\omega \subset\subset \Omega$, *ισχύει* $\nabla u_n \,|_\omega \to \nabla u \,|_\omega$ *στον* $L^p(\omega, \mathbb{R}^N)$

  *[“$\omega \subset\subset \Omega$” σημαίνει $\omega$ ανοικτό με $\overline{\omega}$ συμπαγές $\subset \Omega$. ]*

**Θεώρημα 45** *Υποθέτουμε ότι $1 \le p < \infty$ και $\partial\Omega$ κλάσης $C^1$. Τότε, ο $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$.*

# 6 Ασθενείς λύσεις για Π.Σ.Τ. τύπου Dirichlet - Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$.

**Κίνητρο:** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης $C^1$ και $f \in C(\overline{\Omega})$. Θεωρούμε το Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Π.Σ.Τ.)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(x) = f(x), \quad \text{σ.π. στο } \Omega \\ \\ \quad u\mid_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right\} \tag{13}$$

Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\overline{\Omega})$ κλασική λύση του Π.Σ.Τ. (13). Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης με $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας πάνω στο $\Omega$ παίρνουμε

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Λόγω της (8), το α' μέλος της τελευταίας γράφεται

$$-\sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_{ii}u(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u(x)\partial_i\varphi(x)dx = \int_\Omega (\nabla u(x),\ \nabla\varphi(x))dx$$

και τελικά παίρνουμε

$$\int_\Omega (\nabla u(x),\ \nabla\varphi(x))dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{14}$$

Παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα στην (14) ορίζονται, αρκεί:
$\Omega$ **τυχαίο ανοικτό,** $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Με κίνητρο τα παραπάνω, οδηγούμαστε φυσιολογικά στον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 46** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και $f \in L^2(\Omega)$.* **Ασθενής λύση** *της Μ.Δ.Ε.*

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \text{σ.π. στο } \Omega$$

*είναι μια συνάρτηση $u \in W^{1,2}(\Omega)$ που ικανοποιεί την (14).*

Τίθεται το ερώρημα: ποιός θα ήταν ένας κατάλληλος ορισμός *ασθενούς λύσης* για το Π.Σ.Τ. (13), ανάλογος με τον Ορισμό 46;

Η δυσκολία που εμφανίζεται εδώ είναι ότι μια συνάρτηση $u \in W^{1,2}(\Omega)$ είναι απλώς μετρήσιμη, οπότε δεν έχει νόημα η συνοριακή συνθήκη "$u\mid_{\partial\Omega}$ " με τη συνήθη έννοια (σημ. ότι $\lambda(\partial\Omega) = 0$.) Εάν όμως $u \in C_c^\infty(\Omega)$, τότε $u\mid_{\partial\Omega} = 0$, με τη συνήθη έννοια.

Για τους λόγους αυτούς εισάγουμε το χώρο $W_0^{1,2}(\Omega)$ ή γενικότερα τον $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

**Ορισμός 47** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και $1 \leq p \leq \infty$. Θέτουμε*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{1,p}}.$$

Ο $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $W^{1,p}(\Omega)$, εν γένει *γνήσιος*, όπως προκύπτει από την παρακάτω

**Πρόταση 48** *Εάν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και* **φραγμένο**, *τότε $W_0^{1,2}(\Omega) \neq W^{1,2}(\Omega)$.*

**Απόδειξη:** Επιλέγουμε $\xi = (\xi_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ με $|\xi| = 1$ και θέτουμε

$$u(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \xi_i x_i\right), \quad \forall\, x = (x_i)_{i=1}^N \in \Omega.$$

Τότε, $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq W^{1,2}(\Omega)$ και

$$\partial_i u(x) = \xi_i u(x), \quad x \in \Omega, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle u,\, \varphi\rangle_{1,2} &= \int_\Omega u\varphi + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u \partial_i \varphi = \int_\Omega u\varphi + \sum_{i=1}^N \xi_i \int_\Omega u \partial_i \varphi \\ &= \int_\Omega u\varphi - \sum_{i=1}^N \xi_i \int_\Omega \partial_i u \varphi = \int_\Omega u\varphi - \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2\right) \int_\Omega u\varphi = 0, \end{aligned}$$

οπότε $\langle u,\, w\rangle_{1,2} = 0,\ \forall\, w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Επειδή $u \not\equiv 0$, έπεται ότι $u \notin W_0^{1,2}(\Omega)$. $\square$.

**Σχόλιο 49** *Αποδεικνύεται ότι $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ ''χονδρικά'' μηδενίζονται πάνω στο $\partial\Omega$. Συγκεκριμένα, ισχύει η παρακάτω

**Πρόταση 50** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης $C^1$, $1 \leq p \leq \infty$ και $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Τότε,*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{ανν} \quad u\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Τα παραπάνω μας οδηγούν φυσιολογικά στον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 51** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και $f \in L^2(\Omega)$.* **Ασθενής λύση** *του Π.Σ.Τ. (13) είναι μια συνάρτηση $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ που ικανοποιεί την (14).*

**Πρόταση 52 (Ανισότητα Poincaré )** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό,* **φραγμένο** *και $1 \leq p < \infty$. Τότε, υπάρχει θετική σταθερά $C$ τέτοια ώστε $\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$||u||_p \ \leq\ C||\nabla u||_p\,, \quad \textit{όπου}\ ||\nabla u||_p = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

**Απόδειξη:** Αρκεί να αποδειχθεί για $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

- **Ειδική περίπτωση:** $\Omega = (-a,\ a)^N$, για κάποιο $a > 0$.

  Κάθε $x \in \Omega$ γράφεται στη μορφή $x = (x_1\ , x')$, όπου
$$x_1 \in (-a,\ a), \quad x' \in (-a,\ a)^{N-1}.$$
  Επιπλέον, $\forall\, x' \in (-a,\ a)^{N-1}$, $(\pm a,\ x') \in \partial\Omega \Rightarrow u(\pm a,\ x') = 0$.

  Για κάθε $x = (x_1\ , x') \in \Omega$ με $x_1 \in (-a,\ a)$, $x' \in (-a,\ a)^{N-1}$ έχουμε
$$u(x_1\ , x') = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t, x')dt \ \Rightarrow\ |u(x_1\ , x')| \ \le\ \int_{-a}^{x_1} |\partial_1 u(t, x')|dt. \quad (15)$$
  Για $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$, λόγω της ανισότητας Hölder η (15) δίνει
$$|u(x_1\ , x')| \ \le\ \left(\int_{-a}^{x_1} |\partial_1 u(t, x')|^p dt\right)^{1/p} \cdot (x_1 + a)^{1/q} \ \le\ \left(\int_{-a}^{x_1} |\partial_1 u(t, x')|^p dt\right)^{1/p} \cdot (2a)^{1/q}$$
$$\Rightarrow\ |u(x_1\ , x')|^p \ \le\ (2a)^{p-1} \cdot \int_{-a}^{x_1} |\partial_1 u(t, x')|^p dt, \quad \forall\, (x_1\ , x') \in \Omega. \quad (16)$$
  Η (16) ισχύει και για $p = 1$, λόγω της (15).

  Για σταθερό $x' \in (-a,\ a)^{N-1}$, ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της (16) ως προς $x_1 \in (-a,\ a)$ και παίρνουμε
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} |u(x_1\ , x')|^p dx_1 \ &\le\ (2a)^{p-1} \cdot (x_1 + a)^p \cdot \int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t, x')|^p dt \\ &\le\ (2a)^p \cdot \int_{-a}^{a} |\partial_1 u(t, x')|^p dt, \quad \forall\ x' \in (-a,\ a)^{N-1}.\end{aligned}$$
  Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ως προς $x' \in (-a,\ a)^{N-1}$ κι εφαρμόζοντας το Θ. Fubini παίρνουμε
$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \ \le\ (2a)^p \cdot \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^p dx \ \le\ (2a)^p \cdot ||\nabla u||_p^p \ \Rightarrow\ ||u||_p \ \le\ 2a \cdot ||\nabla u||_p\ .$$

- **Γενική περίπτωση:** $\Omega$ τυχαίο ανοικτό και φραγμένο.

  Επιλέγουμε ανοικτό τετράγωνο $T = (-a,\ a)^N$ $(a > 0)$ ώστε $\overline{\Omega} \subseteq T$. Θεωρούμε την επέκταση $\overline{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ με
$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$
  Γνωρίζουμε (βλ. Προτάσεις 10, 12, 14 ) ότι $\overline{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $supp(\nabla\overline{u}) \subseteq supp(\overline{u}) = supp(u)$ και
$$\nabla\overline{u}(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Είναι σαφές ότι $\overline{u}\,|_T\in C_c^\infty(T)$. Εφαρμόζοντας την ειδική περίπτωση έχουμε

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_T |\overline{u}(x)|^p dx \ \leq\ (2a)^p \int_T |\nabla\overline{u}(x)|^p dx = (2a)^p \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx,$$

οπότε και πάλι παίρνουμε $||u||_p \ \leq\ 2a\cdot||\nabla u||_p$ . $\square$

**Σχόλιο 53** *Από την ανισότητα Poincaré προκύπτει ότι για $\Omega$ ανοικτό φραγμένο και $1\leq p<\infty$, η έκφραση*

$$||\nabla u||_p = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

*ορίζει μια νόρμα στον $W_0^{1,p}(\Omega)$* **ισοδύναμη** *με την $\|\cdot\|_{1,p}$ .*

*Ειδικότερα, για $p=2$, η έκφραση*

$$\langle\langle u,v\rangle\rangle_{1,2} = \int_\Omega (\nabla u(x),\nabla v(x))dx$$

*ορίζει στον $W_0^{1,2}(\Omega)$ εσωτερικό γινόμενο με αντίστοιχη νόρμα $||\nabla u||_2$ .*

**Εφαρμογή:** Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ $(N\geq 1)$ ανοικτό φραγμένο και $f\in L^2(\Omega)$. Τότε, το Π.Σ.Τ.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{σ.π. στο } \Omega \\ \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

έχει μοναδική ασθενή λύση ( με την έννοια του ορισμού 51.)

Πράγματι, θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό

$$\Phi : W_0^{1,2}(\Omega)\to\mathbb{R},\quad \Phi(w) = \int_\Omega w(x)f(x)dx,\quad w\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Εφαρμόζοντας τις ανισότητες Hölder και Poincaré παίρνουμε

$$|\Phi(w)| \leq \int_\Omega |w(x)||f(x)|dx \leq \|w\|_2\ \|f\|_2 \leq C\|f\|_2\|\nabla w\|_2\ ,\quad \forall\ w\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

όπου $C$ θετική σταθερά.

Έπεται ότι $\Phi\in\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$ (βλ. σχόλιο παραπάνω). Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ ώστε

$$\Phi(w) = \langle\langle u,w\rangle\rangle_{1,2} = \int_\Omega (\nabla u(x),\nabla w(x))dx,\quad \forall\ w\in W_0^{1,2}(\Omega)$$

κι επομένως

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega (\nabla u(x),\nabla\varphi(x))dx,\quad \forall\ \varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

Άρα, η $u$ είναι ασθενής λύση του παραπάνω Π.Σ.Τ.

## 7 Θεωρήματα Ενσφήνωσης.

**Ορισμός 54** *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα ώστε $Y \subseteq X$. Θα λέμε ότι ο $Y$* ***ενσφηνώνεται στον $X$ με συνεχή ενσφήνωση*** *(συμβολικά $Y \hookrightarrow X$) ανν ο ταυτοτικός τελεστής*

$$i : (Y, \|\cdot\|_Y) \to (X, \|\cdot\|_X)$$

*είναι φραγμένος, δηλ. ανν υπάρχει $C > 0$ ώστε*

$$\|y\|_X \ \leq \ C\|y\|_Y \ , \quad \forall\, y \in Y.$$

*Εάν επιπλέον ο $i$ είναι* **συμπαγής**, *τότε λέμε ότι* **η ενσφήνωση είναι συμπαγής** *και γράφουμε $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.*

**Ορισμός 55** *Έστω $N \geq 1$, $p \in [1, \infty)$. Θέτουμε*

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{εάν} \quad p > N \\ \\ +\infty, & \text{εάν} \quad p \leq N \end{cases} .$$

*Το $p^*$ λέγεται* ***κρίσιμος εκθέτης Sobolev (Sobolev critical exponent)***.

**Θεώρημα 56 (Rellich–Kondrashov):** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό, φραγμένο, με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης $C^1$ και $1 \leq p < \infty$. Τότε:*

- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $\forall r \in [1, p^*]$.
- $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^r(\Omega)$, $\forall r \in [1, p^*)$. *Ειδικότερα,* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$.

Τα παραπάνω ισχύουν και για τον $W_0^{1,p}(\Omega)$, **χωρίς υπόθεση ομαλότητας στο** $\partial\Omega$.