Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης (2024–25)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 17 Δεκεμβρίου 2024)

1. (α) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, \infty]$ συνάρτηση τέτοια ώστε $\{x \in X : f(x) > q\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Είναι η f μετρήσιμη;

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$ αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ και $g(x) = 1$ αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$. Είναι η g μετρήσιμη;

2. Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \varnothing\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ-άλγεβρα.

Έστω τώρα $f : X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A.

3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n\geqslant 1}, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $0 < \alpha < \mu(X)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant m$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) > \alpha.$$

4. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [0, \infty)$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $A \subseteq [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\lambda([0, +\infty) \setminus A) < \varepsilon$ και $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο A.

5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [0, +\infty]$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $r_k \to 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $A_k \in \mathcal{A}$, $k \geqslant 1$, τέτοια ώστε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \chi_{A_k}(x)$$

για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη: Επαγωγικά ορίστε τα σύνολα $A_k = \Big\{x \in X : f(x) \geqslant r_k + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \chi_{A_j}(x)\Big\}$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ συνεχών συναρτήσεων $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $g_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ (δηλαδή, $g_n \to f$ σχεδόν παντού).

7. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{-n^2}^{n^2} f(x)e^{-\frac{x^2}{n}}\,d\lambda(x).$$

(β) Έστω $E\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(E)<\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $Z\subset\mathbb{R}$ με $\lambda(Z)=0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\chi_E(nx)<+\infty$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus Z$ (δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

9. Έστω $\delta>0$ και $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\lambda(A_n)\geqslant\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{A_n}(x)<+\infty$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$.

10. Έστω $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $E\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$ ώστε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

να συγκλίνει για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι $a_n\to 0$ και $b_n\to 0$.