ΣΑΤΜ
Μαθηματική Ανάλυση
ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\sinh \xi}{6} x^3$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ με $x \neq 0$ ισχύει ότι $\left| \cosh x - \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right) \right| < |x|^3$.

(γ) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$.

Λύση. (α) Έστω $f(x) = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x τέτοιο ώστε

$$\cosh x = T_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3$$

όπου

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης $n = 2$ με κέντρο το $x_0 = 0$. Επειδή $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $f^{(3)}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ έχουμε $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$ και $f^{(3)}(x) = \sinh x$.

Άρα $T_2(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ και

$$\cosh x = T_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\sinh \xi}{6} x^3 \tag{1}$$

(β) Έστω $x \in [-1, 1]$ με $x \neq 0$. Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει ξ μεταξύ του 0 και του x (και άρα $\xi \in (-1, 1)$) τέτοιο ώστε

$$\left| \cosh x - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \right| = \frac{|\sinh \xi|}{6} |x|^3 \tag{2}$$

Επειδή η συνάρτηση $\sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα και περιττή ($\sinh(-x) = \sinh x$) έχουμε

$$|\sinh \xi| < \sinh 1$$

και άρα από την (2),

$$\left| \cosh x - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{\sinh 1}{6} |x|^3 < |x|^3$$

(αφού $\sinh 1 = \dfrac{e - e^{-1}}{2} < \dfrac{e}{2} < 2$)

(γ) Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Σημείωση: Ένας δεύτερος τρόπος να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - 1}{x^2}$ είναι με χρήση του κανόνα De l' Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{x^2} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\right)'}{(x^2)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{2x}\\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε το $\sin(\arctan 1)$.

Λύση. Εξ ορισμού της συνάρτησης arctan ισχύει ότι

$$\arctan 1 = x \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Άρα $\sin(\arctan 1) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+25}\, dx$.

Λύση. (i) Διασπάμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)}$$

και άρα

$$A+B=0, B+C=0, A+C=1$$

Συνεπώς $A=C=1/2$, $B=-1/2$. Άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x+1}\,dx - \int\frac{x}{x^2+1}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x\end{aligned}$$

(ii) Έχουμε

$$\int\frac{x}{x^2+6x+25}\,dx = \int\frac{x}{x^2+6x+9+16}\,dx = \frac{1}{16}\int\frac{x}{\left(\frac{x+3}{4}\right)^2+1}\,dx.$$

Θέτουμε $y = \frac{x+3}{4} \Rightarrow x = 4y - 3$, $dx = 4dy$ οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+6x+25}\ dx = \frac{4}{16}\int \frac{4y-3}{y^2+1}\ dy &= \int \frac{y}{y^2+1}\ dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\ dy \\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \frac{3}{4}\arctan y \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+3)^2}{16}+1\right) - \frac{3}{4}\arctan\left(\frac{x+3}{4}\right)\end{aligned}$$

Άσκηση 4. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\ dx$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\ dx$.

Λύση. (i) Έχουμε

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\ dx = \int \frac{x-1}{x^2-4x+4+1}\ dx = \int \frac{x-1}{(x-2)^2+1}\ dx.$$

Θέτουμε $y = x-2 \Rightarrow x = y+2$, $dx = dy$ οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}\ dx = \int \frac{y+1}{y^2+1}\ dy &= \int \frac{y}{y^2+1}\ dy + \int \frac{1}{y^2+1}\ dy \\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \arctan y \\ &= \frac{1}{2}\ln\left((x-2)^2+1\right) - \arctan(x-2)\end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε $y = e^x$. Έχουμε $dy = e^x dx$ και

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\ dx = \int \frac{1}{y^3+y^2}\ dy = \int \frac{1}{y^2(y+1)}\ dy$$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y+1}$$

$$Ay(y+1) + B(y+1) + Cy^2 = 1$$

$$(A+C)y^2 + (A+B)y + B = 1$$

$B = 1$, $A = -1$ $C = 1$

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1}$$

$$\int \frac{1}{y^2(y+1)}\ dy = -\int \frac{1}{y}\ dy + \int \frac{1}{y^2}\ dy + \int \frac{1}{y+1}\ dy = -\ln|y| - \frac{1}{y} + \ln|y+1|$$

$$\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}}\ dx = -\ln(e^x) - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1) = -x - \frac{1}{e^x} + \ln(e^x+1)$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ όπου $x(t) = \dfrac{1}{3}t^3$ και $y(t) = \dfrac{1}{2}t^2$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Λύση. Έχουμε

$$L=\int_0^1 \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\ dt=\int_0^1 \sqrt{t^4+t^2}\ dt=\int_0^1 \sqrt{t^2(t^2+1)}\ dt=\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\ dt$$

Θέτουμε $u=t^2+1$, $du=2tdt$ και έχουμε

$$L=\frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\ du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_{u=1}^{u=2}=\frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Άσκηση 6. Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t)=1-\sin^3 t,\ \ y(t)=\cos^3 t,\ \ t\in[0,\pi/2]$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt\\
&=\int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\ \cos^2 t\ (-\sin t))^2\ +\ (3\ \sin^2 t\ \cos t)^2}\ dt\\
&=\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^4 t\ \sin^2 t\ +\ 9\ \sin^4 t\ \cos^2 t}\ dt\\
&=\int_0^{\pi/2} \sqrt{9\ \cos^2 t\ \sin^2 t\ (\cos^2 t+\sin^2 t)}\ dt\\
&=\int_0^{\pi/2} 3\ |\cos t\cdot\sin t|\ dt=3\int_0^{\pi/2} \cos t\cdot\sin t\ dt
\end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t\geq 0$ όταν $0\leq t\leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin t\ dt=\int_0^{\pi/2}(\sin t)'\cdot\sin t\ dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin^2 t)'\ dt=\frac{1}{2}\left(\sin^2(\pi/2)-\sin^2(0)\right)=1/2$$

παίρνουμε τελικά $L=3/2$.

Άσκηση 7. Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ γνησίως αύξουσα συνεχής και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_c^d f^{-1}(x)\ dx=bd-ac-\int_a^b f(x)\ dx$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=f(t)$, $t\in[a,b]$ και ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_c^d f^{-1}(x)\ dx=\int_a^b f^{-1}(f(t))f'(t)\ dt&=\int_a^b tf'(t)\ dt\\
&=[tf(t)]_a^b-\int_a^b t'f(t)\ dt\\
&=bd-ac-\int_a^b f(t)\ dt
\end{aligned}$$

Άσκηση 8. Για κάθε $n=0,1,\ldots$ θέτουμε

$$I_n=\int_0^{2\pi}\cos^n x\ dx$$

(i) Βρείτε τα I_0 και I_1. (ii) Δείξτε ότι $I_n=\dfrac{n-1}{n}\ I_{n-2}$ για κάθε $n\geq 2$.

Λύση. (1) (i) $I_0 = \int_0^{2\pi} \, dx = 2\pi$ και $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$.
(ii) Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos^{n-1} x (\sin x)' \, dx \\
&= [\cos^{n-1} x \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\cos^{n-1} x)' \sin x \, dx \\
&= -(n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (\cos x)' \sin x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} \, I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$.

Άσκηση 9. (α) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) g''(x) \, dx = f(b) g'(b) - f'(b) g(b) - f(a) g'(a) + f'(a) g(a) + \int_a^b f''(x) g(x) \, dx$$

(β) Αν $f(x) = \arctan x$ $g(x) = \cos x$ υπολογίστε με βάση το (α) το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \cos x \, dx.$$

Λύση. (α) Χρησιμοποιούμε τον κανόνα Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δύο φορές ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) g''(x) \, dx &= f(x) g'(x)|_a^b - \int_a^b f'(x) g'(x) \, dx \\
&= f(x) g'(x)|_a^b - \left(f'(x) g(x)|_a^b - \int_a^b f''(x) g(x) \, dx \right) \\
&= \left(f(x) g'(x) - f'(x) g(x) \right)|_a^b + \int_a^b f''(x) g(x) \, dx \\
&= f(b) g'(b) - f'(b) g(b) - f(a) g'(a) + f'(a) g(a) + \int_a^b f''(x) g(x) \, dx
\end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $f(x) = \arctan x$ και $g(x) = \cos x$. Τότε $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = -\sin x$ και $g''(x) = -\cos x$. Άρα από το (i),

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\pi} f(x) \cos x \, dx &= -f(\pi) \sin \pi - f'(\pi) \cos \pi + f(0) \sin 0 + f'(0) \cos 0 + \int_a^b f''(x) \cos x \, dx \\
&= \frac{1}{1+\pi^2} + \frac{1}{1+0^2} + \int_a^b f''(x) \cos x \, dx = \frac{1}{1+\pi^2} + 1 + \int_a^b f''(x) \cos x \, dx
\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\cos x\ dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\ dx + \int_0^\pi f''(x)\cos x\ dx = -\frac{1}{1+\pi^2} - 1$$

Άσκηση 10. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$$

Σψμπεράνετε ότι αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$ τότε $\int_a^b f(x)\ dx \neq 0$.

Λύση. Θέτουμε $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x\in[a,b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) \tag{3}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$$