

## ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ - ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Το περίφημο θεώρημα του Stokes,  $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{\Omega} \cdot d\vec{a}$ , αποτελεί γενίκευση του θεμελιώδους

θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού και βρίσκει εφαρμογή τόσο στα μαθηματικά όσο και στη Φυσική, όπως για παράδειγμα, στη μελέτη των δυναμικών πεδίων. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αφορά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{F}$  κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής  $\Gamma$  ενώ το δεξί μέλος αφορά στο επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος του στροβιλισμού της δύναμης,  $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ , όπου  $\Omega_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$ ,

$\Omega_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$  και  $\Omega_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$ . Ο θεμελιώδης ορισμός της κάθε συνιστώσας είναι ο

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ακόλουθος:  $\Omega_x = \lim_{|A| \rightarrow 0} \frac{\gamma}{|A|}$  (και παρόμοια για τις συνιστώσες  $y$  και  $z$ ), όπου  $\gamma$  μια κλειστή

διαδρομή με εμβαδόν  $A$ . Ο στροβιλισμός υπολογίζεται και μέσω του τελεστή  $\vec{\nabla}$  ως εξής:  $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ .

Με όρους Μαθηματικών, το θεώρημα μας δηλώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης  $\vec{F}$  κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής  $\Gamma$ , εναλλακτικά, από το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος του στροβιλισμού  $\vec{\Omega}$  της δύναμης στην επιφάνεια  $A$  που έχει ως σύνορο την καμπύλη  $\Gamma$ . Το απειροστό εμβαδόν  $d\vec{a}$  ορίζεται ως εξής:  $d\vec{a} = da \hat{n}$ , δηλαδή έχει μέτρο το απειροστό εμβαδόν  $da$  (επί της επιφάνειας  $A$ ) και κατεύθυνση το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\hat{n}$  σε αυτήν στο εξεταζόμενο σημείο.

Με όρους Φυσικής, το θεώρημα συσχετίζει το έργο μιας δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής  $\Gamma$  με τον ολικό στροβιλισμό της δύναμης στην επιφάνεια  $A$  που έχει ως σύνορο τη  $\Gamma$ . Στη μελέτη των δυναμικών πεδίων αξιοποιούμε το θεώρημα του Stokes μόνο ως προς την ειδική περίπτωση του μηδενισμού, είτε του αριστερού είτε του δεξιού μέλους της εξίσωσης. Δηλαδή, αν ο στροβιλισμός  $\vec{\Omega}$  της δύναμης είναι μηδέν, τότε αναγκαστικά και το έργο κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής θα είναι ίσο με μηδέν. Ισχύει όμως και το αντίστροφο: αν το έργο κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν, τότε θα είναι μηδέν και ο στροβιλισμός της δύναμης σε όλη την επιφάνεια, διότι το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\Omega} \cdot \hat{n}$  είναι θετικά ορισμένο. Επομένως, ο μηδενισμός του στροβιλισμού της δύναμης αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το δυναμικό πεδίο διατηρητικό.

Ισχύει ακόμη το εξής: αν η δύναμη είναι βαθμίδα (ή κλίση) κάποιας βαθμωτής συνάρτησης, δηλαδή  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ , τότε ο στροβιλισμός της είναι μηδέν και επομένως το πεδίο είναι διατηρητικό. Αυτό συμβαίνει διότι ο στροβιλισμός της κλίσης είναι πάντοτε μηδέν ( $\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}U) = 0$ ). Στην περίπτωση αυτή η βαθμωτή συνάρτηση  $U$  θα παριστάνει τη δυναμική ενέργεια.