

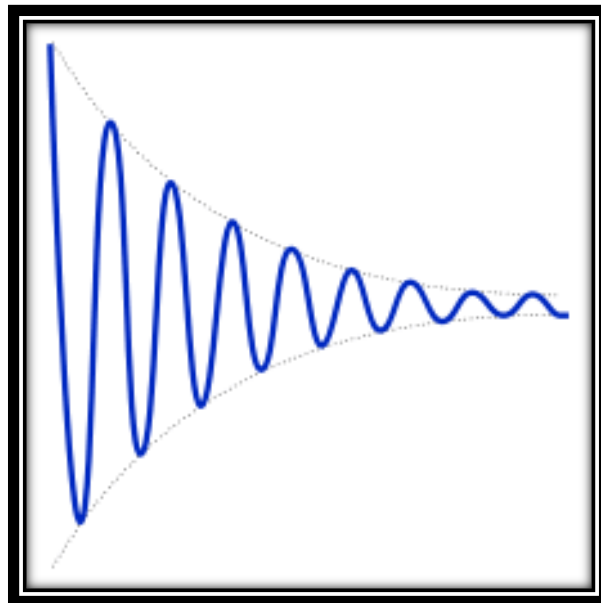


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ – ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2022

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος: Φυσική Ι



Υπεύθυνος καθηγητής: Γεώργιος Τσιγαρίδας

Από τον: Νικολάου Μιχάλη

Εξάμηνο 1^ο

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα ελληνικά:

Ονομάζομαι Νικολάου Μιχάλης και είμαι νέος φοιτητής στη Σχολή Μηχανικών Μεταλλείων – Μεταλλουργών. Στα πλαίσια του μαθήματος της Φυσικής Ι και με σκοπό την εμπάθυνση, που αφορά το κεφάλαιο των ταλαντώσεων, επέλεξα την εργασία με θέμα : << Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και συντονισμός >>. Η εργασία αυτή θα αποτελεί ένα σημαντικό εγχειρίδιο, το οποίο θα περιλαμβάνει αναλυτική θεωρία και πρακτικές εφαρμογές. Στόχος της θα είναι να επεξηγήσει και να βοηθήσει στην κατανόηση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων και του συντονισμού, ενός κεφαλαίου που από τα σχολικά χρόνια είναι δυσνόητο για πολλούς μαθητές και για πολλούς φοιτητές μεταγενέστερα. Παράλληλα, μέσα από την παρούσα εργασία θα δούμε πώς οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και ο συντονισμός είναι αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητάς μας, αφού πολλές καθημερινές δραστηριότητες βασίζονται στην θεωρία του κεφαλαίου αυτού.

In English:

My name is Nikolaou Michael and I am a freshman at the School of Mining Engineering - Metallurgists. In the course of Physics I and with the aim of deepening in the chapter of oscillations, I chose the project on the topic: "Forced oscillations and coordination". This work will be an important manual, which will include detailed theory and practical applications. Its aim will be to explain and help in the understanding of forced oscillations and coordination, a difficult chapter from school years for many students and undergraduate students later on. At the same time, through the present work we will see how forced oscillations and coordination are an integral part of our daily lives, since many daily activities are based on the theory of this chapter.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για να εμβαθύνουμε στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις και τον συντονισμό θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια 'ταλάντωση', η οποία είναι μια περιοδική παλινδρομική κίνηση. Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις αποτελούν μια κατηγορία ταλαντώσεων, όπου με μια περιοδική δύναμη επιτυγχάνεται αμείωτη ταλάντωση. Άλλη μια κατηγορία είναι η σύνθεση ταλαντώσεων, όπου λαμβάνουμε μια συνισταμένη ταλάντωση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση, εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και μπορεί να έχουν ή να μην έχουν ίδιες συχνότητες (παραπλήσιες συχνότητες). Όλα αυτά λοιπόν θα αναλυθούν παρακάτω, παραθέτοντας θεωρία και παραδείγματα του κάθε κεφαλαίου ξεχωριστά.

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ:

Αμείωτη Ταλάντωση

Η ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα όταν δε δέχεται αντιστάσεις, με αποτέλεσμα το πλάτος της να παραμένει σταθερό, ονομάζεται αμείωτη. Η συχνότητα της αμείωτης ταλάντωσης συμβολίζεται με f_0 (αντίστοιχα T_0 και ω_0) και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Ελεύθερη Ταλάντωση

Στην πραγματικότητα κανένα σύστημα που ταλαντώνεται δε μπορεί να είναι απαλλαγμένο από αντιστάσεις, άρα το πλάτος μιας ταλάντωσης μειώνεται με

συχνότητα μικρότερη από την f_0 (άρα μεγαλώνει η περίοδος) και η ταλάντωση είναι φθίνουσα. Όμως για μικρές αντιστάσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f_0 = f_{\phi 0}$ και αν το σύστημα διεγερθεί μια φορά και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο να ταλαντωθεί, θα εκτελέσει ταλάντωση που ονομάζεται ελεύθερη και με συχνότητα που ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα**.

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Για να μη μειώνεται το πλάτος της ελεύθερης ταλάντωσης θα πρέπει το σύστημα να δέχεται συνεχώς μια **εξωτερική δύναμη**, η οποία ονομάζεται **διεγείρουσα δύναμη** και η ταλάντωση που εκτελεί το σύστημα ονομάζεται **εξαναγκασμένη**. Τη διεγείρουσα δύναμη την ασκεί ο **διεγέρτης** και έχει ως αποτέλεσμα το **πλάτος να παραμένει σταθερό**.

Η εξίσωση που περιγράφει τη διεγείρουσα δύναμη είναι περιοδική, άρα ο διεγέρτης έχει μια δική του συχνότητα f_δ την οποία επιβάλλει στο σύστημα που ταλαντώνεται. Δηλαδή ισχύει πάντα: $f_{\text{ταλ}} = f_\delta$.

Συμπερασματικά, σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση η συχνότητα της ταλάντωσης καθορίζεται από τον διεγέρτη και όχι από την τιμή της ιδιοσυχνότητας.

Η συχνότητα που θα χρησιμοποιήσω στις χρονικές εξισώσεις των ταλαντώσεων είναι η συχνότητα που έχει ο διεγέρτης και η οποία επιβάλλεται στην ταλάντωση μέσω της διεγείρουσας δύναμης.

Η ιδιοσυχνότητα f_0 είναι μια 'θεωρητική' συχνότητα, την οποία και θα την υπολογίζω στις ασκήσεις μου, έτσι ώστε να γνωρίζω την σχέση ανάμεσα στην ιδιοσυχνότητα και την συχνότητα διέγερσης.

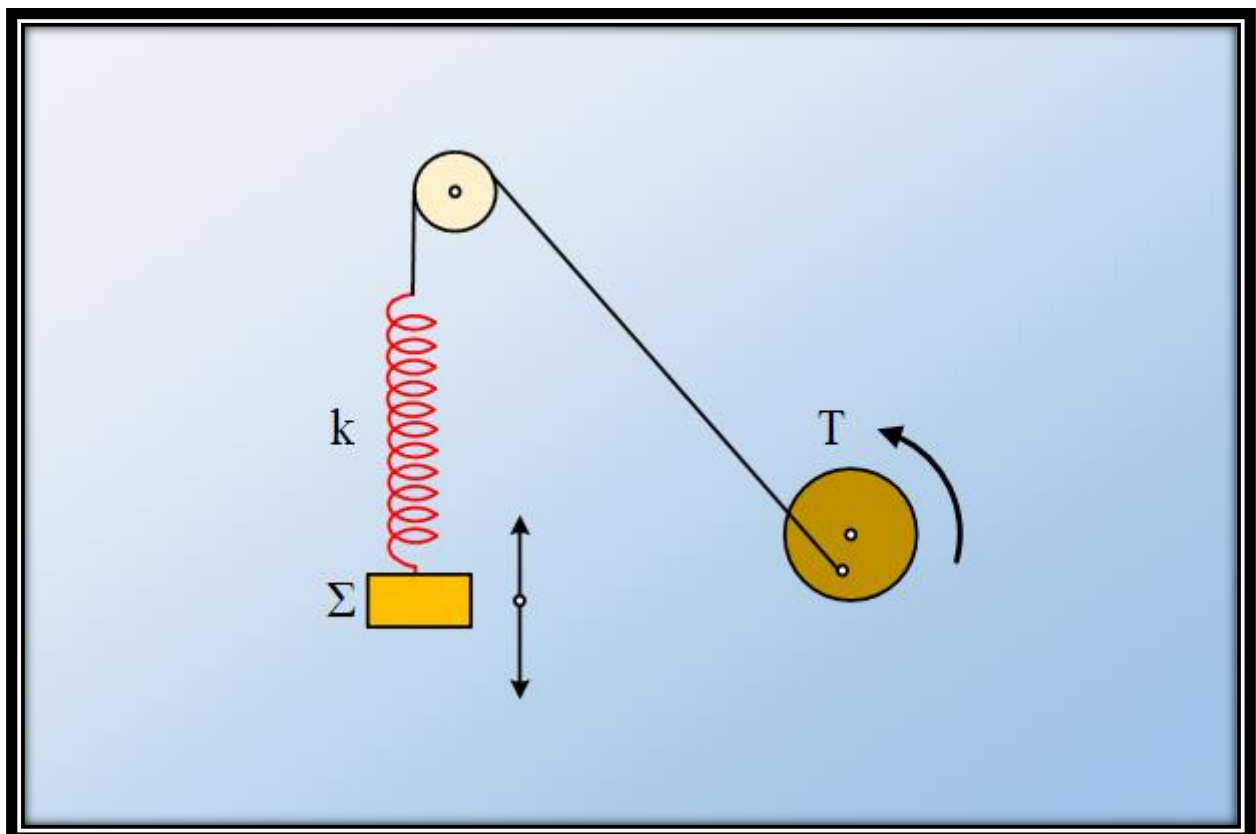
Διερεύνηση

- Το σύστημα που ταλαντώνεται χάνει ενέργεια λόγω της δύναμης αντίστασης, άρα μειώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης.
- Για να αντισταθμίσουμε τις απώλειες στην ενέργεια του συστήματος εφαρμόζουμε μια εξωτερική περιοδική δύναμη, τη διεγείρουσα δύναμη,

η συχνότητα της οποίας επιβάλλεται στο σύστημα που ταλαντώνεται. Η περιστροφή του τροχού στο παρακάτω σχήμα επιτρέπει στο σώμα να εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.

- Για οποιαδήποτε τιμή της συχνότητας του διεγέρτη, πλην της ιδιοσυχνότητας, το σύστημα θα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος, καθώς το ανά περίοδο ποσό απώλειας ενέργειας λόγω της δύναμης αντίστασης αναπληρώνεται από το ποσό προσφερόμενης ενέργειας μέσω του διεγέρτη.
- Αν ο διεγέρτης έχει τιμή συχνότητας που ταυτίζεται με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, δηλαδή $f_0 = f_\delta$ τότε η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με τον βέλτιστο τρόπο. Στην κατάσταση αυτή το ποσό της ενέργειας που χάνει το σύστημα είναι κάθε στιγμή ίσο με το ποσό της ενέργειας που προσφέρεται στο σύστημα με αποτέλεσμα η ταλάντωση να πραγματοποιείται με το μέγιστο δυνατό πλάτος. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται **συντονισμός**.

$$f_{\text{ταλ}} = f_0 = f_\delta \rightarrow \text{ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ}$$



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

1. Το σύστημα έχει μια θεωρητική συχνότητα που ονομάζεται ιδιοσυχνότητα.
2. Η συχνότητα που όντως έχει το σύστημα είναι πάντα αυτή που του δίνει ο διεγέρτης.
3. Ο διεγέρτης μπορεί να επιβάλλει διαφορετικές συχνότητες κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης. Για κάθε μια ισχύει $f_{\text{ταλ}} = f_{\delta}$.
4. Αν ο διεγέρτης δώσει συχνότητα που ισούται με την ιδιοσυχνότητα, δηλαδή $f_{\delta} = f_0$, τότε έχουμε κατάσταση συντονισμού.

Χρονικές εξισώσεις

$$\rightarrow x = A \eta \mu(\omega_{\delta} t + \varphi_0)$$

$$\rightarrow u = u_{\max} \sigma \upsilon \nu(\omega_{\delta} t + \varphi_0) \text{ όπου } u_{\max} = \omega_{\delta} A$$

$$\rightarrow \alpha = -\alpha_{\max} \eta \mu(\omega_{\delta} t + \varphi_0) \text{ όπου } \alpha_{\max} = \omega_{\delta}^2 A$$

$$\Sigma F = -\Sigma F_{\max} \eta \mu(\omega_{\delta} t + \varphi_0) \text{ ή } \Sigma F = -D A \eta \mu(\omega_{\delta} t + \varphi_0)$$

V.I.P. Για τη σταθερά επαναφοράς D χρησιμοποιούμε τον τύπο $D = m\omega_0^2$.

V.I.P. Για τον υπολογισμό της μέγιστης ταχύτητας και της μέγιστης επιτάχυνσης για συγκεκριμένη συχνότητα διέγερσης χρησιμοποιούμε το ω_{δ} .

Τύποι Περιοδικών κινήσεων

Οι τύποι των περιοδικών κινήσεων ισχύουν κανονικά και στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, δηλαδή:

$$\omega_{\delta} = \frac{2\pi}{T_{\delta}}, \omega_{\delta} = 2\pi f_{\delta} \text{ και } f_{\delta} = \frac{1}{T_{\delta}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ και } f_0 = \frac{1}{T_0}$$

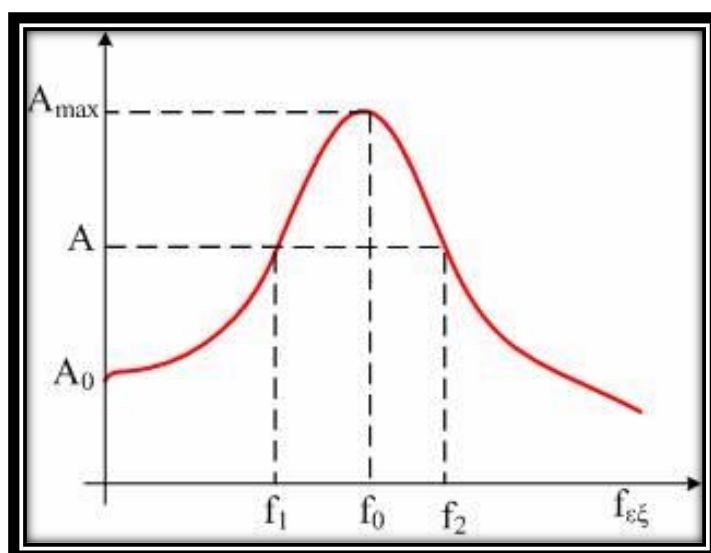
V.I.P. Οι τύποι υπολογισμού της περιόδου, της συχνότητας και της γωνιακής συχνότητας που μάθαμε στις απλές αρμονικές ταλαντώσεις ισχύουν μόνο για τα μεγέθη της ιδιοσυχνότητας, δηλαδή:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}, f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ και } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Μπορούμε να τα υπολογίζουμε σε μια άσκηση (καλό είναι στην αρχή) αλλά τις τιμές τους τις χρησιμοποιούμε στις χρονικές εξισώσεις μόνο αν το σύστημα είναι σε κατάσταση συντονισμού.

Για το πλάτος ισχύει:

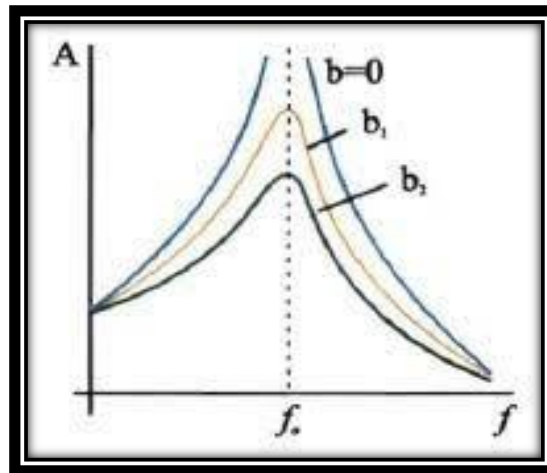
Η τιμή του πλάτους εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη και από την σταθερά απόσβεσης. Αν οι τιμές των συχνοτήτων που έχει ο διεγέρτης πλησιάζουν την τιμή της ιδιοσυχνότητας, το πλάτος της ταλάντωσης μεγαλώνει, ενώ αν οι τιμές των συχνοτήτων που έχει ο διεγέρτης απομακρύνονται από την τιμή της ιδιοσυχνότητας το πλάτος μειώνεται. Αν ο διεγέρτης έχει συχνότητα που συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα το σύστημα είναι σε συντονισμό και το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μέγιστο δυνατό. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



- Όσο πλησιάζει η συχνότητα του διεγέρτη την ιδιοσυχνότητα, αυξάνεται το πλάτος της ταλάντωσης.
- Για $f_{\delta} = f_0$ το πλάτος γίνεται μέγιστο.
- Όσο η συχνότητα του διεγέρτη απομακρύνεται από την ιδιοσυχνότητα, μειώνει το πλάτος της ταλάντωσης.
- Όταν η συχνότητα του διεγέρτη τείνει να μηδενιστεί, το πλάτος της ταλάντωσης τείνει να πάρει την τιμή A_0 που αντιστοιχεί στην απόσταση του σημείου πρόσδεσης του νήματος από το κέντρο του τροχού, όπως φαίνεται και στο αρχικό σχήμα.

- Κάθε τιμή πλάτους αντιστοιχεί σε δύο τιμές συχνότητας του διεγέρτη, μία συχνότητα μικρότερη του συντονισμού και μια συχνότητα μεγαλύτερη του συντονισμού. Μόνο το μέγιστο πλάτος που μπορεί να έχει ένα ταλαντούμενο σύστημα αντιστοιχεί σε μια μόνο συχνότητα και αυτό είναι το $A_{\max}$ που επιτυγχάνεται μόνο στο συντονισμό.

Αν η σταθερά απόσβεσης μεταβάλλεται:



Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η απόσβεση υπάρχει μείωση της συχνότητας συντονισμού. Επιπλέον, το μέγιστο πλάτος αντιστοιχεί μικρότερες τιμές. Τέλος, να σημειωθεί ότι στα πλαίσια του σχολικού βιβλίου η μετατόπιση θεωρείται αμελητέα.

Δυνάμεις στην εξαναγκασμένη ταλάντωση:

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow \vec{F}_{\varepsilon\pi} + \vec{F}' + \vec{F}_{\delta} = ma \Leftrightarrow -Dx - bu + F_{\delta} = ma$$

Αν αντικαταστήσουμε με $a = -\omega_{\delta}^2 x$ έχουμε:

$$-Dx - bu + F_{\delta} = m(-\omega_{\delta}^2 x)$$

Αν αντικαταστήσουμε με $D = m\omega_0^2$ έχουμε:

$$-m\omega_0^2 x - bu + F_{\delta} = -m\omega_{\delta}^2 x \Leftrightarrow -bu + F_{\delta} = -m\omega_{\delta}^2 x + m\omega_0^2 x$$
$$-bu + F_{\delta} = mx(\omega_0^2 - \omega_{\delta}^2)$$

Άρα ΜΟΝΟ στο συντονισμό όπου $\omega_{\delta} = \omega_0$ θα ισχύει:

$$F_{\delta} = bu = |F'|$$

V.I.P. Μόνο στο συντονισμό η δύναμη της αντίστασης είναι κάθε στιγμή αντίθετη της δύναμης της διέγερσης, δηλαδή $|F'| = |F_{\delta}|$.

Ενεργειακή μελέτη στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις:

Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, μέσω του έργου της διεγείρουσας δύναμης, το σύστημα παίρνει μηχανική ενέργεια έτσι ώστε να αντισταθμίζει την απώλεια ενέργειας εξαιτίας της δύναμης αντίστασης. Όμως ο τρόπος που το σύστημα απορροφά την ενέργεια αυτή είναι εκλεκτικός, εξαρτάται δηλαδή από τη συχνότητα του διεγέρτη. Για οποιαδήποτε τιμή της συχνότητας του διεγέρτη, το ανά περίοδο ποσό ενέργειας που χάνει το σύστημα λόγω της δύναμης αντίστασης αναπληρώνεται από το ποσό ενέργειας που προσφέρεται στο σύστημα λόγω της δύναμης διέγερσης.

Στην κατάσταση συντονισμού, όπου η συχνότητα του διεγέρτη θα πάρει την τιμή της ιδιοσυχνότητας, αποδείξαμε παραπάνω ότι το μέτρο της δύναμης της αντίστασης είναι κάθε στιγμή ίσο με το μέτρο της δύναμης της διέγερσης οπότε ο ταλαντωτής απορροφά ενέργεια με τον βέλτιστο τρόπο (για αυτό έχουμε και το μέγιστο δυνατό πλάτος).

- **ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ:** $K_{\max} = U_{\max}$
- **ΜΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ:** $K_{\max} \neq U_{\max}$

Στιγμιαίος Ρυθμός Προσφοράς Ενέργειας = Ισχύς διεγείρουσας δύναμης

$$\frac{dW_{F\delta}}{dt} = P_{F\delta} = F_{\delta} \cdot u$$

Στιγμιαίος Ρυθμός Απώλειας Ενέργειας = Ισχύς δύναμης αντίστασης

$$\frac{dW_{Ff}}{dt} = P_{Ff} = F' \cdot u = -b \cdot u^2$$

V.I.P Στην κατάσταση συντονισμού το έργο της δύναμης της διέγερσης έχει το ίδιο μέτρο με το έργο της δύναμης της αντίστασης (όμοια και για την ισχύ).

Συντονισμός

- σε όλες τις εξισώσεις της ταλάντωσης μπορώ να χρησιμοποιήσω το ω_0
- η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με το βέλτιστο τρόπο άρα έχω το μέγιστο δυνατό πλάτος ταλάντωσης

Ισχύει:

$$K_{\max} = U_{\max}$$

- το μέτρο της δύναμης της αντίστασης είναι κάθε στιγμή ίσο με το μέτρο της δύναμης της διέγερσης

Ισχύει:

$$|W_f| = |W_{F\delta}|$$

$$P_f = P_{F\delta}$$

(κατά μέτρο)

Μη Συντονισμός

- σε όλες τις εξισώσεις της ταλάντωσης χρησιμοποιήσω το ω_0 εκτός από τους τύπους της σταθεράς D

- Το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό

Ισχύει:

$$K_{\max} \text{ διάφορο της } U_{\max}$$

- το μέτρο της δύναμης της αντίστασης είναι διαφορετικό από το μέτρο της δύναμης της διέγερσης

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

- Θεωρητικά ένα κτίριο, αν διεγερθεί, έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση, παρόμοια με αυτή του ελάσματος με ιδιοσυχνότητα f_0 . Στη διάρκεια ενός σεισμού, το έδαφος πάλλεται με συχνότητα f και τα κτίρια εξαναγκάζονται να εκτελέσουν ταλάντωση. Αν η συχνότητα f με την οποία πάλλεται το έδαφος (διεγέρτης) είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του κτιρίου, το πλάτος της ταλάντωσης του κτιρίου θα γίνει μεγάλο, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην κατάρρευσή του.
- Αν μια ομάδα ανθρώπων κινηθεί με βηματισμό πάνω στη γέφυρα, η γέφυρα διεγείρεται και εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Αν η συχνότητα βηματισμού είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας, έχουμε συντονισμό, η γέφυρα ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος και υπάρχει κίνδυνος κατάρρευσης. Ένα τέτοιο ατύχημα συνέβη στη Γαλλία το 1850. Μια γέφυρα κατέρρευσε και 226 στρατιώτες σκοτώθηκαν. Από τότε, όταν ένα τμήμα στρατού περνάει πάνω από γέφυρα, οι στρατιώτες προχωρούν με ελεύθερο βηματισμό. Παρομοίως μία γέφυρα μπορεί να καταρρεύσει όταν η συχνότητα συντονισμού της γίνει ίση με την συχνότητα του κυματισμού του ανέμου, καθώς το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξάνεται υπερβολικά. Μία τέτοια κατάρρευση συνέβη το 1940 στη γέφυρα Tacoma Narrows εξαιτίας των σφοδρών ανέμων που συντονίστηκαν με τη συχνότητα της γέφυρας.

ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ:

- Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις έχουν εφαρμογή και στην ιατρική. Υπάρχει μία τεχνική εξαναγκασμένης ταλάντωσης που ονομάζεται Forced Oscillation Technique (FOT) και στην ελληνική ορολογία ονομάζεται ταλαντωσιμετρία. Η τεχνική αυτή είναι μια μη επεμβατική μέθοδος που χρησιμοποιεί ταλαντώσεις πίεσης μικρού πλάτους που τοποθετούνται στην κανονική αναπνοή και δεν απαιτεί την εκτέλεση αναπνευστικών ελιγμών. Συγκεκριμένα, είναι μια αξιόπιστη μέθοδος για την αξιολόγηση της βρογχικής υπερευαισθησίας σε ενήλικες και παιδιά ενώ επίσης έχει αποδειχθεί ότι είναι τόσο ευαίσθητη όσο η σπιρομέτρηση στην ανίχνευση βλαβών της πνευμονικής λειτουργίας λόγω του καπνίσματος ή της έκθεσης σε επαγγελματικούς κινδύνους. Η ταλαντωσιμετρία χρησιμοποιείται στην φροντίδα και στην παρακολούθηση των ασθενών με COVID-19 καθώς οι αλλαγές στην λειτουργία των πνευμόνων που μετρήθηκαν με αυτή την τεχνική δείχνουν μια πρώιμη εκτίμηση για την φθορά των πνευμόνων.

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ:

Σύνθετη ονομάζεται η ταλάντωση που εκτελεί ένα σώμα όταν πραγματοποιεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις. Η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση της σύνθετης ταλάντωσης εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Α Είδος Σύνθεσης

Η πρώτη περίπτωση σύνθεσης αναφέρεται στη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση, εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και έχουν την ίδια συχνότητα ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

Έστω ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ.:

$$X_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \quad \text{και} \quad X_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

οι εξισώσεις απομακρύνσεων ή συνιστώσες ταλαντώσεις.

Για να προσδιορίσουμε την θέση της συνισταμένης / σύνθετης ταλάντωσης x μπορούμε να προσθέσουμε αλγεβρικά τις στιγμιαίες τιμές της απομάκρυνσης της κάθε συνιστώσας (ομοίως και για την ταχύτητα και την επιτάχυνση) σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων ,η οποία αναφέρει ότι η απομάκρυνση του σώματος κάθε στιγμή θα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων που θα είχε το σώμα αν έκανε την κάθε ταλάντωση ξεχωριστά.

$$\text{Πιο συγκεκριμένα:} \quad X = X_1 + X_2$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$a = a_1 + a_2$$

Για να προσδιορίσουμε το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης, προσθέτουμε διανυσματικά τα πλάτη των συνιστωσών ταλαντώσεων (ομοίως και για τα πλάτη των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων).

$$\rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta \varphi}$$

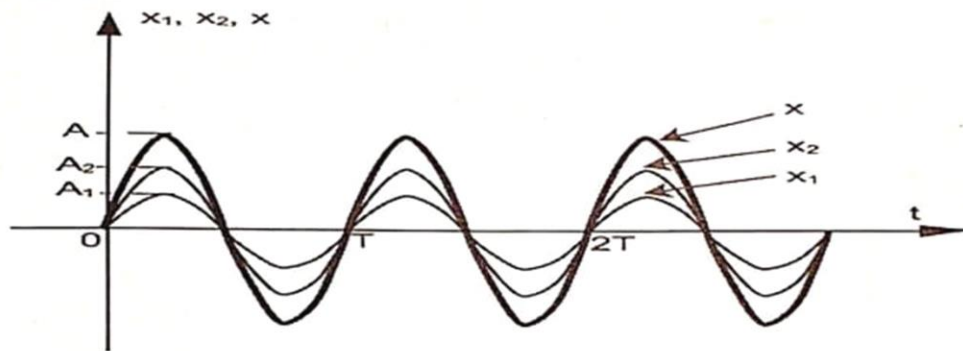
$$\rightarrow v_{\max} = \sqrt{v_{\max 1}^2 + v_{\max 2}^2 + 2v_{\max 1} \cdot v_{\max 2} \cos \Delta \varphi}$$

$$\rightarrow a_{\max} = \sqrt{a_{\max 1}^2 + a_{\max 2}^2 + 2a_{\max 1} \cdot a_{\max 2} \cos \Delta \varphi}$$

Για να προσδιορίσουμε το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης πρέπει να βρούμε τη διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων, για το λόγο αυτό η πρώτη μας κίνηση είναι να κάνουμε την αφαίρεση $\Delta \varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ και ανάλογα με το αποτέλεσμα υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

Α ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

1. $\Delta\varphi = 0$



> Για το πλάτος A ισχύει:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin 0} \leftrightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \leftrightarrow A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \text{ ή}$$

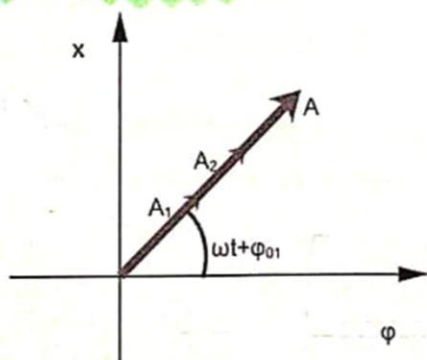
$$A = A_1 + A_2$$

Ισούται με το άθροισμα των πλάτων των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων

> Για τη φάση ισχύει: είναι ίση με τη φάση κάθε συνιστώσας ταλάντωσης

$$\varphi = \omega t + \varphi_{01} = \omega t + \varphi_{02} \text{ (αφού } \Delta\varphi = 0)$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



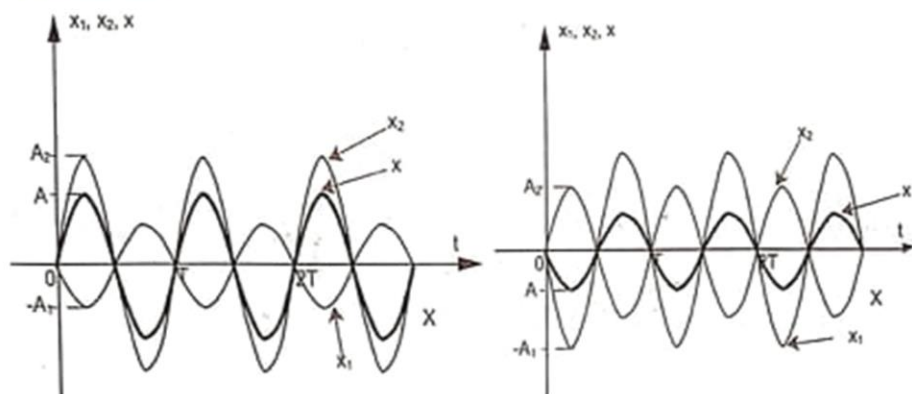
Για διανύσματα των δύο πλάτων είναι ομόρροπα άρα το πλάτος της σύνθετης κίνησης είναι το άθροισμα των επιμέρους πλάτων. Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης συμπίπτει με τη φάση των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = (A_1 + A_2)\eta\mu(\omega t + \varphi_{01})$$

Β ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

2. $\Delta\varphi = \pm\pi \text{ rad}$



> Για το πλάτος A ισχύει:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \Leftrightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Leftrightarrow A = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \text{ ή}$$

$$A = |A_1 - A_2|$$

Ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των πλάτων των δύο συνιστωσών ταλαντώσεων:

> Για τη φάση ισχύει:

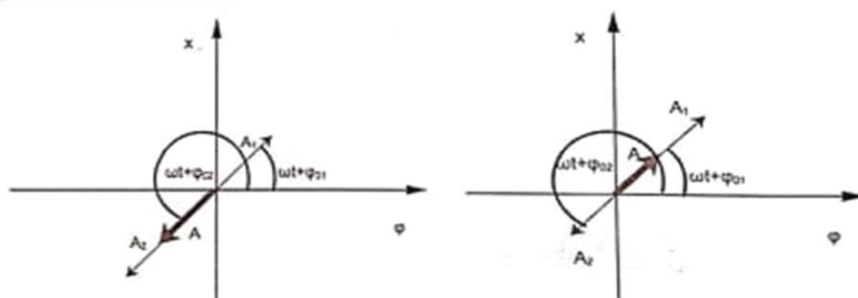
Ισούται με τη φάση της συνιστώσας ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος,

δηλαδή η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι:

$$\text{Αν } A_1 > A_2 \text{ τότε: } x = |A_1 - A_2| \eta\mu(\omega t + \varphi_{01})$$

$$\text{Αν } A_2 > A_1 \text{ τότε: } x = |A_1 - A_2| \eta\mu(\omega t + \varphi_{02})$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Τα διανύσματα των δύο πλάτων είναι αντίρροπα άρα το πλάτος της σύνθετης κίνησης είναι η διαφορά των επιμέρους πλάτων με φορά που συμπίπτει με τη φορά του μεγαλύτερου πλάτους. Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης συμπίπτει με τη φάση της συνιστώσας ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος.

Γ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

3. $\Delta\varphi > 0$. Όταν η φάση της δεύτερης συνιστώσας ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από τη φάση της πρώτης $\varphi_{02} > \varphi_{01}$:

> Για το πλάτος A ισχύει:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\Delta\varphi}$$

> Για τη φάση ισχύει:

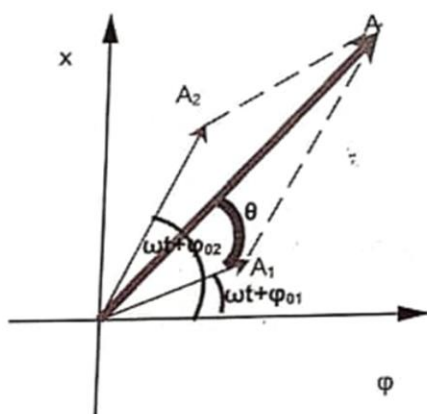
Ισούται με τη μικρότερη φάση από τις φάσεις που έχουν οι συνιστώσες ταλαντώσεις (φ_{01}), αυξημένη κατά γωνία θ η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan\theta = \frac{A_2\sin\Delta\varphi}{A_1 + A_2\cos\Delta\varphi} \quad \text{με } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ rad}$$

άρα $\varphi = \omega t + \varphi_{01} + \theta$ (με $\varphi_{01} < \varphi_{01} + \theta < \varphi_{02}$), έτσι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_{01} + \theta)$$

Γεωμετρική Ερμηνεία:



Τα διανύσματα των δύο πλάτων είναι υπό τυχαίες διευθύνσεις άρα για το πλάτος της σύνθετης κίνησης εφαρμόζω κανόνα παραλληλογράμμου ώστε να σχεδιάσω το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης και να υπολογίσω το μέτρο του με νόμο συνημίτονου. Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης συμπίπτει με τη φάση της συνιστώσας με το μικρότερο πλάτος αυξημένο κατά τη γωνία θ (γωνία μεταξύ της συνιστώσας 1 και της συνισταμένης)

Δ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Ομοίως με την τρίτη περίπτωση που αναλύεται παραπάνω, απλά θα έχω $\Delta\varphi < 0$, όπου ακολουθώ τα παραπάνω βήματα για να επιλύσω σωστά την άσκησή μου.

Για την ενέργεια:

Για την ενέργεια:

- Η σταθερά επαναφοράς D είναι ίδια τόσο για τις συνιστώσες ταλαντώσεις όσο και τη συνισταμένη ταλάντωση αφού έχουν τα ίδια ω .

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2} D A^2$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{D}} \quad \text{και} \quad A_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{D}} \quad \text{και} \quad A = \sqrt{\frac{2E}{D}}$$

έτσι αν συνδυάσουμε με τον τύπο:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\Delta\varphi} \leftrightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\Delta\varphi \leftrightarrow$$

$$\frac{2E}{D} = \frac{2E_1}{D} + \frac{2E_2}{D} + 2\sqrt{\frac{2E_1}{D}}\sqrt{\frac{2E_2}{D}}\sin\Delta\varphi \leftrightarrow E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\sin\Delta\varphi$$

$$\boxed{\diamond} \text{ Εαν } \Delta\varphi = 0, \text{ τότε } E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}$$

$$\boxed{\diamond} \text{ Εαν } \Delta\varphi = \pi \text{ τότε } E = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1E_2}$$

$$\boxed{\diamond} \text{ Εαν } \Delta\varphi = \pi/2 \text{ τότε } E = E_1 + E_2$$

Παρατήρηση:

Η ολική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης εξαρτάται από:

1. την ενέργεια της κάθε ταλάντωσης
2. τη διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων

B Είδος Σύνθεσης:

Η δεύτερη περίπτωση σύνθεσης αναφέρεται στη σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση, εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας & έχουν διαφορετικές συχνότητες (παραπλήσιες μεταξύ τους).

Έστω οι συνιστώσες ταλαντώσεις (1) και (2) που περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$x_1 = A\eta\mu(\omega_1 t) \text{ και } x_2 = A\eta\mu(\omega_2 t)$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας:

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A\eta\mu(\omega_1 t) + A\eta\mu(\omega_2 t)$$

έτσι σύμφωνα με την ταυτότητα: $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right)$$

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (1)$$

Εξίσωση απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης

Ο όρος αυτός αποτελεί το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης ($A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$) το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο μεταξύ των τιμών $0 \leq A' \leq 2A$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος ανεξάρτητα από τον τύπο της απομάκρυνσης, δηλαδή

$$|A'| = \left| 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right|$$

Το φαινόμενο της αυξομειώσης του πλάτους ονομάζεται διακρότημα. Λόγω του φαινομένου του διακροτήματος η σύνθετη ταλάντωση Β' είδους δεν αποτελεί περίπτωση απλής αρμονικής ταλάντωσης. Προσοχή, είναι περιοδική κίνηση, άρα ισχύουν οι τύποι των περιοδικών κινήσεων, αλλά δεν είναι απλή αρμονική ταλάντωση άρα δεν ισχύουν οι τύποι των απλών αρμονικών ταλαντώσεων.

Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους ή δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης ονομάζεται περίοδος του διακροτήματος σχέση (2), και ο αριθμός των διακροτημάτων στη μονάδα του χρόνου λέγεται συχνότητα του διακροτήματος σχέση (3):

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \quad (2) \quad f_\delta = |f_1 - f_2| \quad (3)$$

Από την εξίσωση (1) βλέπουμε ότι έχουμε δύο γωνιακές συχνότητες.

I. Γωνιακή συχνότητα πλάτους:

$$\omega_{\delta} = |\omega_1 - \omega_2|$$

II. Γωνιακή συχνότητα κίνησης (ταλάντωσης):

$$\omega_{\tau α λ} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

V.I.P: Από το παραπάνω συμπεραίνουμε ότι πρέπει να είμαστε αρκετά προσεκτικοί στην επιλογή της κατάλληλης γωνιακής συχνότητας (περιόδου ή συχνότητας) ανάλογα με το ζητούμενο της άσκησης. Για την αυξομείωση του πλάτους χρησιμοποιούμε το ω_{δ} ενώ για την ταλάντωση του σώματος χρησιμοποιούμε το $\omega_{\tau α λ}$.

Χαρακτηριστικές ερωτήσεις:

• Πόσος χρόνος απαιτείται για δύο διαδοχικές μειστοποιήσεις του πλάτους;

Απάντηση: $\Delta t = T_{\delta}$

• Πόσος χρόνος απαιτείται ώστε το πλάτος από μέγιστο να γίνει μηδέν;

Απάντηση: $\Delta t = \frac{T_{\delta}}{2}$

• Πόσος χρόνος απαιτείται για δύο διαδοχικές διελεύσεις του σώματος από ακραία θέση;

Απάντηση: $\Delta t = \frac{T_{\tau α λ}}{2}$

• Πόσος χρόνος απαιτείται για δύο διαδοχικές διελεύσεις του σώματος από τη θέση ισορροπίας του;

Απάντηση: $\Delta t = \frac{T_{\tau α λ}}{2}$

Επιπλέον σχέσεις (με απόδειξη)

A) Περίοδος διακροτήματος:

$$T_{\delta} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \rightarrow T_{\delta} = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right|} \rightarrow T_{\delta} = \frac{1}{\left| \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right|} \text{ ή }$$

$$T_{\delta} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$$

B) Περίοδος ταλάντωσης:

$$T_{\tau α λ} = \frac{2\pi}{\omega_{\tau α λ}} \rightarrow T_{\tau α λ} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \rightarrow T_{\tau α λ} = \frac{4\pi}{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}} \rightarrow T_{\tau α λ} = \frac{2}{\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}} \text{ ή } T_{\tau α λ} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

$$\text{ή } T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{2\pi}{\omega_{\tau\alpha\lambda}} \rightarrow T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \text{ ή } T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$

Γ) Συχνότητα ταλάντωσης:

$$f_{\tau\alpha\lambda} = \frac{\omega_{\tau\alpha\lambda}}{2\pi} \rightarrow f_{\tau\alpha\lambda} = \frac{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}{2\pi} \rightarrow f_{\tau\alpha\lambda} = \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2\pi} \rightarrow f_{\tau\alpha\lambda} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Πλήθος

1) Μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών (ή μεγιστοποιήσεων) του πλάτους (περίοδος διακροτήματος), το σώμα πραγματοποιεί N ταλαντώσεις:

$$N = \frac{T_{\delta}}{T_{\tau\alpha\lambda}} \text{ ή } N = \frac{f_{\tau\alpha\lambda}}{f_{\delta}}$$

2) Αριθμός ταλαντώσεων μέσα σε ένα τυχαίο χρονικό διάστημα:

$$N = f_{\tau\alpha\lambda} \cdot \Delta t$$

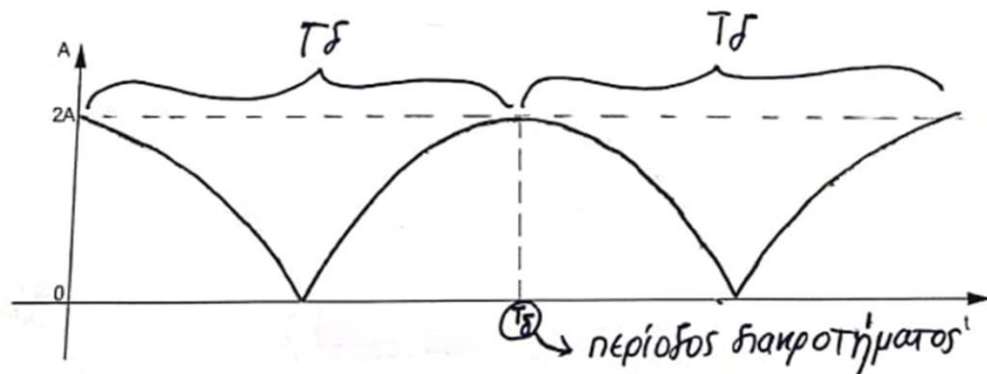
3) Αριθμός διελεύσεων N' από τη θέση ισορροπίας (σε κάθε ταλάντωση περνάει 2 φορές από τη ΘΙ):

$$N' = 2N \text{ άρα } N' = 2 f_{\tau\alpha\lambda} \cdot \Delta t$$

➤ Μπορούμε να μεταβάλουμε μία από τις δύο συχνότητες χωρίς να αλλάξει η συχνότητα του διακροτήματος:

Αν αυξήσουμε τη μικρότερη από τις δύο συχνότητες ή αν μειώσουμε τη μεγαλύτερη από τις δύο συχνότητες μπορεί η απόλυτη τιμή της διαφοράς των συχνοτήτων να μένει ίδια.

➤ Αν μας ζητούσαν να σχεδιάσουμε το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο επειδή το πλάτος A' το μελετάμε με απόλυτο, θα έχει την παρακάτω μορφή:



ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

- Ένα καλό παράδειγμα συντονισμού είναι η θέρμανση και το μαγείρεμα των φαγητών με αποτελεσματικότητα και ομοιομορφία στον φούρνο μικροκυμάτων. Τα κύματα που παράγονται σε αυτόν τον τύπο φούρνου έχουν μήκος κύματος 12 cm σε συχνότητα 3450 MHz. Σε αυτή τη συχνότητα, τα κύματα απορροφώνται λόγω του συντονισμού από μόρια λίπους στα τρόφιμα, θερμαίνοντάς τα και έτσι μαγειρεύοντας το φαγητό.
- Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε ορισμένη συχνότητα. Στην κεραία ενός ραδιοφώνου κάθε στιγμή φτάνουν πολλά ηλεκτρομαγνητικά κύματα, με διαφορετικές συχνότητες. Η επιλογή ενός σταθμού στο ραδιόφωνο στηρίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού. Όταν γυρίζουμε ο κουμπί επιλογής των σταθμών μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα ενός μεταβλητού πυκνωτή. Ο πυκνωτής αυτός είναι μέρος ενός κυκλώματος LC, το οποίο βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με την κεραία του ραδιοφώνου. Στην κεραία τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που φτάνουν αναγκάζουν τα ηλεκτρόνια της να εκτελέσουν ταλάντωση. Η κίνηση των ηλεκτρονίων στην κεραία δημιουργεί σ' αυτή ένα πολύ ασθενές μεταβαλλόμενο ρεύμα. Εξαιτίας της επαγωγικής σύζευξης το κύκλωμα LC εξαναγκάζεται να εκτελέσει ηλεκτρική ταλάντωση. Το πλάτος της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι ασήμαντο εκτός εάν έχουμε συντονισμό. Μεταβάλλοντας όμως τη χωρητικότητα του πυκνωτή στο κύκλωμα LC, μεταβάλλουμε την ιδιοσυχνότητα του. Όταν η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος συμπίπτει με κάποια από τις συχνότητες με τις οποίες ταλαντώνονται τα ηλεκτρόνια της κεραίας, το κύκλωμα συντονίζεται και διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα μέγιστου πλάτους. Αυτό το σχετικά μεγάλο ρεύμα, περιέχει το ηλεκτρικό σήμα, το οποίο, ενισχυμένο, οδηγείται στο μεγάφωνο του ραδιοφώνου και το διεγείρει.

- Άλλο ένα παράδειγμα του συντονισμού είναι όταν σπρώχνουμε ένα παιδί σε μια κούνια. Η κούνια λειτουργεί όπως ένα εκκρεμές, έχει δηλαδή μια φυσική συχνότητα ταλάντωσης που εξαρτάται από το μήκος l . Εάν ωθήσουμε το παιδί πάνω στην κούνια με τυχαία συχνότητα, η κούνια αναταράσσεται και δεν φτάνει σε κάποιο μεγάλο πλάτος. Αν όμως το ωθήσουμε με συχνότητα ίση με τη φυσική συχνότητά του τότε το πλάτος αυξάνεται σημαντικά.
- Ακόμα μια εφαρμογή του συντονισμού συναντάται όταν τα ηχητικά κύματα που εκπέμπονται από μία νότα ή μία φωνή δρουν σαν μία εξαναγκασμένη ταλάντωση πάνω σε ένα ποτήρι. Όταν η συχνότητα των ηχητικών κυμάτων βρίσκεται σε συντονισμό με την συχνότητα του ποτηριού η ταλάντωση του γίνεται μέγιστη και το ποτήρι σπάει. Ένας μεγάλος τενόρος, ο Enrico Caruso, λέγεται ότι μπορούσε να σπάσει ένα κρυστάλλινο ποτήρι τραγουδώντας μία νότα σε κατάλληλη συχνότητα και σε πλήρη ένταση της φωνής του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ:

- <https://el.wikipedia.org/wiki>
- <http://ebooks.edu.gr/ebooks>
- YOUNG and FREEDMAN Τόμος Α, εκδόσεις Παπαζήση
- <http://users.sch.gr/dmargaris/page>
- <https://journal.chestnet.org/article>
- <http://www.tmth.gr>
- simerini.sigmalive.com/article
- <https://oxscience.com/resonance>
- <https://www.wordreference.com>
- <https://www.metafrasi.org/aggloelliniko>
- Ταλαντώσεις: Μαθιουδάκης – Παναγιωτακόπουλος, εκδόσεις Σαββάλας