



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ –ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ
Εργαστήριο Φυσικής Ι



**« ΚΙΝΗΣΗ ΠΛΑΝΗΤΩΝ-ΝΟΜΟΙ
ΚΕΠΛΕΡ-ΝΟΜΟΣ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑΣ
ΕΛΞΗΣ»**

Βλάχου Αγγελική - Α.Μ. = MM21005

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Γενικά	4
1.1. Ο Γαλαξίας μας	4
1.2. Άπειρο	6
2. Κέπλερ	8
2.1. Ο Γιοχάνες Κέπλερ	8
2.2. Η φιλοσοφία του σαν μυστικιστής και αστρολόγος	10
3. Οι νόμοι της κίνησης των πλανητών	15
3.1. Ιστορία των νόμων.	15
3.2. Νόμοι του Κέπλερ	18
3.2.1. Το νόμισμα	19
3.2.2. Πρώτος νόμος Κέπλερ: Ο Νόμος των ελλειπτικών τροχιών ή νόμος πλανητικών τροχιών.	23
3.2.3. Ο δεύτερος νόμος Κέπλερ ή νόμος των εμβαδών	26
3.2.4. Ο Τρίτος νόμος Κέπλερ ή Νόμος αστρικών περιφορών	33
3.2.5. Νόμος της παγκόσμιας έλξης	36
4. Βιβλιογραφία	37

ΚΙΝΗΣΗ ΠΛΑΝΗΤΩΝ.

ΝΟΜΟΙ ΚΕΠΛΕΡ.

ΝΟΜΟΣ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑΣ ΕΛΞΗΣ.



1. Γενικά

1.1.Ο Γαλαξίας μας.

Ο Γαλαξίας μας αποτελεί μέρος του σύμπαντος που με το τηλεσκόπιο HUBBLE και άλλες συσκευές οι επιστήμονες έχουν παρατηρήσει μια διάσταση γύρω στο 10^{35} .

Κάθε γαλαξίας αποτελείται από πολλά ηλιακά συστήματα, δηλ. συστήματα που έχουν ως σημείο αναφορά τους τον εκάστοτε "Ήλιο" και πλανήτες που κινούνται γύρω από αυτόν.

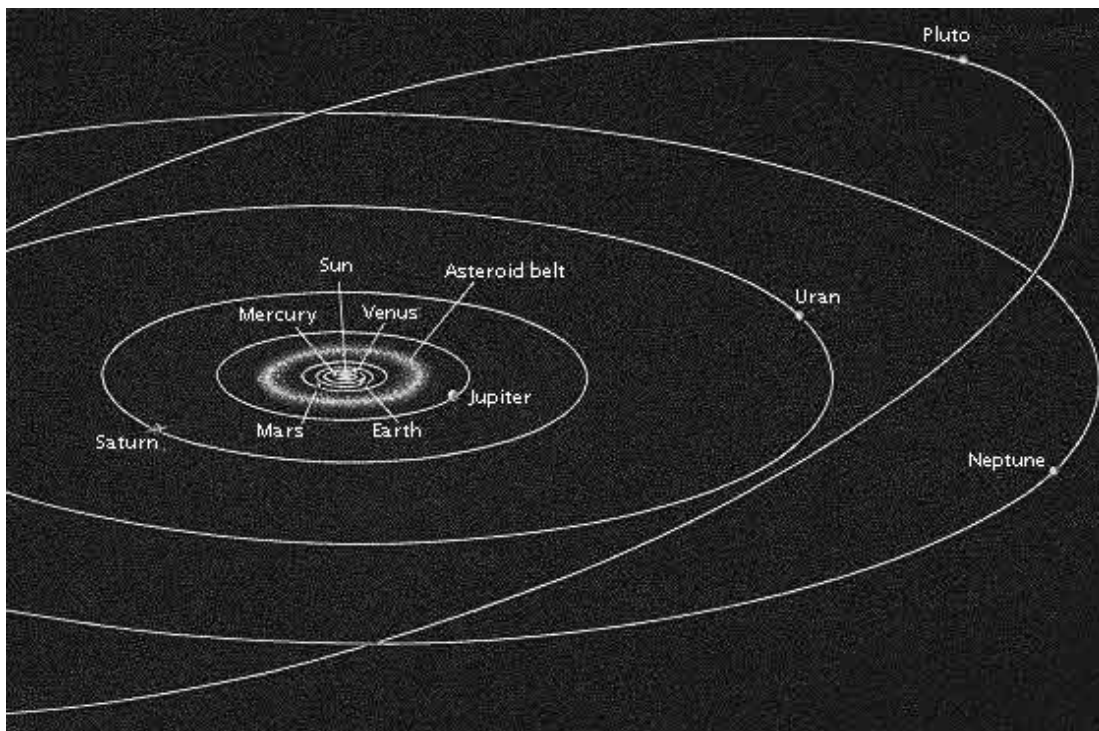
Για το δικό μας ηλιακό σύστημα κινούνται σε ελλείψεις και ακολουθούν του νόμους του Κέπλερ και προφανώς του Νεύτωνα. Ο γαλαξίας μας έχει σπειροειδή δομή όπως η Ανδρομέδα, δηλαδή τα ηλιακά συστήματα που το αποτελούν βρίσκονται σε σπείρες γύρω από το κεντρικό σημείο όπου έχει και την μεγαλύτερη πυκνότητα ηλιακών συστημάτων. Το ηλιακό μας σύστημα βρίσκεται σε κάποια από τις σπείρες γύρω από το κεντρικό σημείο.

Μια εικόνα ενός σπειροειδούς γαλαξία.



Υπάρχουν γαλαξίες που δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε με τα όργανα παρατήρησης ή άλλες μεθόδους γιατί η θέση τους δεν είναι ιδανική ως προς εμάς και έτσι δεν μπορούμε να τους κατηγοριοποιήσουμε και άλλοι που μόλις διακρίνουμε πίσω ή μπροστά από άλλους γαλαξίες, ή άλλοι που βρίσκονται μακριά και έχουν σημειακή απεικόνιση. Αν τα όργανα παρατήρησης είχαν εμβέλεια το άπειρο τότε σύμφωνα με τον νόμο των πιθανοτήτων η εικόνα που θα παίρναμε φωτογραφίζοντας μια περιοχή του σύμπαντος θα ήταν μια κίτρινη πλάκα, στο σύνολο της. Γιατί πίσω ή μπροστά και δίπλα από κάθε γαλαξία υπάρχει η πιθανότητα αν όχι η βεβαιότητα ότι υπάρχει άλλος γαλαξίας, όσο μακριά και αν βρίσκεται.

Οι τροχιές των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος.

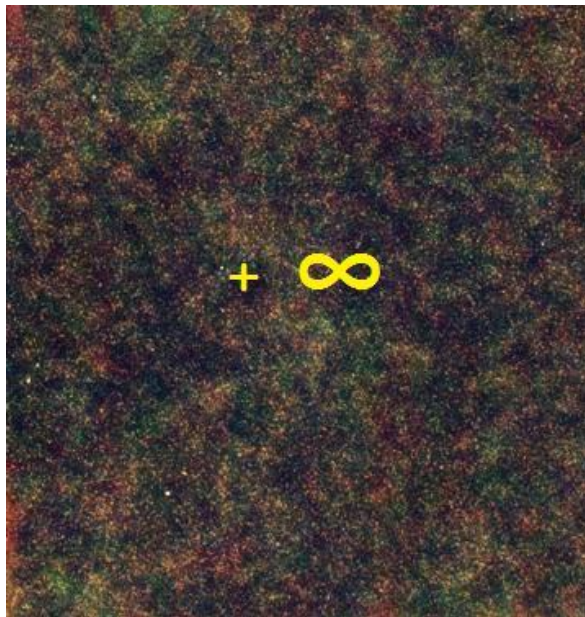


Βλέπουμε λοιπόν ότι όλοι οι πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος έχουν ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον ήλιο και το ίδιο επίπεδο κίνησης εκτός από τον Πλούτωνα (Pluto) που το επίπεδο κίνησης του εμφανίζει σημαντική κλίση με το επίπεδο κίνησης των άλλων πλανητών.

Η γη εκτελεί τροχιά ελλειπτική γύρω από τον ήλιο με εκκεντρότητα περίπου 0,2 που πλησιάζει τον τέλειο κύκλο πράγμα που εξέπληξε τον Κέπλερ. Η ταχύτητα κίνησης της είναι 1770 (Km / h) .

1.2. Άπειρο.

Γνωρίζοντας ότι τα όργανα παρατήρησης, οπτικά τηλεσκόπια ή ραδιοτηλεσκόπια, γήινα ή διαστημικά, είτε διαστημικοί βολιστήρες και μη επανδρωμένα εξερευνητικά διαστημόπλοια, έχουν εξερευνήσει περιοχή διαστάσεως 10^{35} , είναι προφανές ότι πρέπει να αναφερθούμε στην έννοια του απείρου. Το άπειρο στο σύμπαν είναι η υπαρκτή έννοια του μαθηματικού απείρου. Βασικά θεωρούμε ότι άπειρο είναι το σύμπαν σε διαστάσεις. Το άπειρο σύμφωνα με τα μέχρι τώρα δεδομένα αποτελεί αξίωμα για το σύμπαν.



Εικόνα του σύμπαντος στο παρατηρήσιμο άπειρο από το τηλεσκόπιο Herschel.

Τα μαθηματικά είναι εργαλείο μετρήσεων και καθορισμού των αλγεβρικών εξισώσεων που το σύμπαν ακολουθεί. Όμως το άπειρο στην αστροφυσική είναι τριών κατηγοριών:

1. το κατονομαζόμενο, πέρα από τα όργανα παρατήρησης, που ισχύουν οι νόμοι του Κέπλερ του Νεύτωνα και του Αϊνστάιν.
2. Το άπειρο που μπορούμε να φανταστούμε και να ποσοτικοποιήσουμε με τους θεμελιώδεις νόμους, χωρίς να έχουμε στοιχεία.
3. Το πραγματικό άπειρο ως επέκταση της έννοιας των μαθηματικών, που όμως δεν έχουμε κανένα στοιχείο και δεν μπορούμε να το προβλέψουμε, και είναι βέβαιο ότι μας ξεφεύγουν πολλά από τις θεωρητικές και πρακτικές γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα.

2. Ο Γιόχαν Κέπλερ.

2.1.Ο Γιοχάνες Κέπλερ (Johannes Kepler).

Γερμανός αστρονόμος η κατά την σημερινή ορολογία αστροφυσικός. Γεννήθηκε στις 15 Νοεμβρίου 1571 στην Βυτεμβέργη της Γερμανίας. Ήρθε στο κόσμο 7-μηνος και γι' αυτό έμμεινε ασθενικός και αδύναμος σε όλη του την ζωή. Είχε 3 αδερφούς και 1 αδερφή. Όμως, γεννημένος πρόωρα και γενικά ασθενικό παιδί προσβάλλεται από ευλογία κάτι που τον αφήνει με εξασθενημένη όραση. Κατάφερε να αποφοιτήσει του γυμνασίου με δυσκολία¹.



Πορτρέτο του Κέπλερ.

Ταξιδεύουμε στο 1577, όπου ένα παιδί πέντε ετών παρατηρεί έναν κομήτη στην πόλη Weil der Stadt της Γερμανίας – κάπου κοντά στη σημερινή Στουτγκάρδη – μέχρι που η μητέρα του αναλαμβάνει να το πάει στο βουνό, για να μπορέσει να δει καλύτερα τον κομήτη.

¹ Απότοκο αυτού ήταν η στροφή του από την Παρατηρησιακή Αστρονομία στη θεωρητική και στα Μαθηματικά.

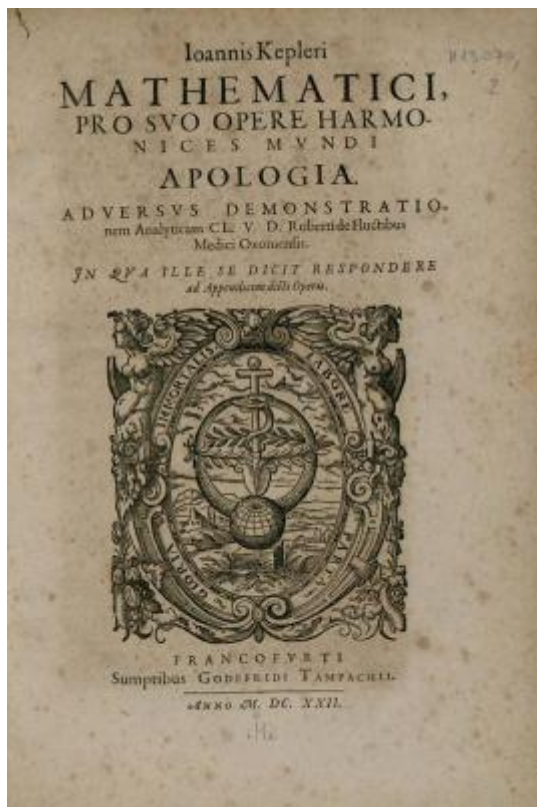
Αν και μικρός σε ηλικία, γοητευμένος από τα ουράνια σώματα ο Κέπλερ εντυπωσίαζε τους ταξιδιώτες στο πανδοχείο του παππού του με τις απίστευτες γνώσεις του στα μαθηματικά, ενώ λίγα χρόνια αργότερα παρατηρεί μία ολική έκλειψη σελήνης και σημειώνει ότι το “φεγγάρι φαινόταν αρκετά κόκκινο”.

Τελειώνοντας το σχολείο, άρχισε τις σπουδές Θεολογίας στο ιεροδιδασκαλείο του Τύμπινγκεν. Εκδιώχτηκε από εκεί και επειδή είχε ανήσυχο και ανεξάρτητο πνεύμα, αμέσως μετά γράφτηκε στο πανεπιστήμιο της ίδια πόλης και σπούδασε Φιλοσοφία και Θεολογία, ενώ αναδείχθηκε σε εξέχοντα μαθηματικό και κέρδισε τη φήμη επιδέξιου αστρολόγου.

Στις 27 Απριλίου 1557 ο Γιοχάνες Κέπλερ νυμφεύεται, παρά τις αρχικές αντιρρήσεις του πεθερού του, την 23χρονη Μπάρμπαρα Μύλερ, η οποία έχει ήδη χηρέψει δύο φορές και έχει και μια θυγατέρα από έναν προηγούμενο γάμο της. Μαζί της θα αποκτήσει δύο γιούς και ενδιάμεσως άλλα δύο παιδιά που πέθαναν πριν κλείσουν το πρώτο έτος της ηλικίας τους.

Ο Κέπλερ έζησε σε μια περίοδο που δεν υπήρχε σαφής διαχωρισμός μεταξύ της Αστρονομίας και της Αστρολογίας, αλλά μεταξύ της Αστρονομίας που τότε ήταν κλάδος των Μαθηματικών και της Φυσικής, η οποία με τη σειρά της αποτελούσε κλάδο της Φυσικής Φιλοσοφίας.

Διδάχθηκε από τον Michael Maestlin (1550-1631) τόσο το πτολεμαϊκό όσο και το ηλιοκεντρικό σύστημα και από τότε πίστεψε το δεύτερο, υπερασπίζοντάς το τόσο



θεωρητικά όσο και θεολογικά σε φοιτητικές συζητήσεις. Παρά την επιθυμία του να γίνει εφημέριος, κατά το τέλος των σπουδών του ο Κέπλερ προτάθηκε για μία θέση δασκάλου των Μαθηματικών και της Αστρονομίας στο Προτεσταντικό Σχολείο του Γκράατς της Αυστρίας. Αποδέχθηκε τη θέση τον Απρίλιο 1594, σε ηλικία 23 ετών.

Μετά από δύο χρόνια, το 1596, ο Κέπλερ δημοσίευσε στην γερμανική πόλη Τύμπινγκεν ένα σπουδαίο βιβλίο Αστρονομίας γραμμένο στην Λατινική γλώσσα, το πρώτο αστρονομικό βιβλίο του υπό τον τίτλο «**Mysterium Cosmographicum**» (Κοσμογραφικό Μυστήριο), με το οποίο θεμελίωσε την υπόθεση του Κοπέρνικου για το

ηλιοκεντρικό πλανητικό σύστημα.

Ο Κέπλερ επιχειρεί να εξηγήσει με πολύ πετυχημένο τρόπο την κοσμολογική του θεωρία, η οποία βασίζεται στο ηλιοκεντρικό σύστημα, σύμφωνα με το οποίο οι πλανήτες και τα λοιπά ουράνια σώματα περιστρέφονται γύρω από τον Ήλιο.

Το βιβλίο σαφώς και δεν περνάει απαρατήρητο αποτελώντας την πρώτη γραπτή υποστήριξη της θεωρίας του αναγεννησιακού μαθηματικού και αστρονόμου Νικόλαου Κοπέρνικου, που τοποθετούσε τον Ήλιο κι όχι την Γη στο κέντρο του Σύμπαντος.



Το πείσμα και η φιλοδοξία του τον ώθησαν να προχωρήσει παρακάτω έχοντας πάντα στο πλάι του την πολύτιμη βοήθεια των επιθεωρητών των σχολείων της πόλης Γκρατς. Προγραμματίζε την συγγραφή άλλων τεσσάρων βιβλίων που θα αποτελούσαν κατά κάποιον τρόπο την συνέχεια της προηγούμενης εκδοτικής επιτυχίας του. Ζήτησε για το εγχείρημα αυτό και την άποψη άλλων συναδέλφων ανάμεσα στους οποίους ήταν και ο Δανός αστρονόμος και αλχημιστής Τύχο Μπράχε.

Τότε, ο Tycho Brahe, τον κάλεσε στην Πράγα για να συνεργαστούν. Η συνεργασία τους όμως δεν ευδοκίμησε παρόλο που οι διαφωνίες τους φάνηκαν εποικοδομητικές. Ο Brahe είχε αναθέσει στον Κέπλερ να

μελετήσει τις τροχιές των πλανητών - που τότε ήταν γνωστοί μόνο οι έξι - και ιδιαίτερα να υπολογίσει την τροχιά του Άρη από την αρχή.

Αρχικά υπήρξαν πολλές εντάσεις και έντονη ανταλλαγή απόψεων, αφού ο Δανός είχε ενστάσεις και γενικότερα αμφέβαλε, καθώς δεν δεχόταν τα συμπεράσματα του Κοπέρνικου πάνω στα οποία βασιζόταν πολύ ο Κέπλερ.

Όμως δεν μπόρεσε να την ερμηνεύσει με βάση τον κύκλο, που τότε ήταν η επικρατούσα άποψη για την κίνηση των πλανητών.

Το 1611 απεβίωσε η σύζυγός του και μετά από 2 χρόνια ξαναπαντρεύτηκε και απέκτησε 11 παιδιά. Αργότερα ταξίδεψε για την Αυστρία όπου έγινε καθηγητής γυμνασίου και αστρονόμος της αυλής του αυτοκράτορα. Εκδιώχτηκε όμως. Η μητέρα του καταδικάστηκε σε θάνατο στην πυρά με το αιτιολογικό της μαγείας. Παρόλα

αυτά ακυρώθηκε η θανατική καταδίκη της, με την παρέμβαση του γιού της, αλλά παρέμεινε στην σκοτεινή φυλακή όπου και πέθανε.

Ο επιστήμονας περιφρονούσε τους αστρολόγους που ικανοποιούσαν τις ορέξεις των απλών ανθρώπων χωρίς γνώση των γενικών και αφηρημένων κανόνων, αλλά έβλεπε πως μόνο μέσα από τις αστρολογικές προβλέψεις μπορεί κανείς να βγάλει τα προς το ζην και γι' αυτόν τον λόγο επιθυμούσε κάτι παραπάνω. Ίσως αν δεν ήταν αστρολόγος με αυτήν την επιθυμία, πιθανότατα δε θα είχε παράγει όλο αυτό το έργο για την κίνηση των πλανητών.

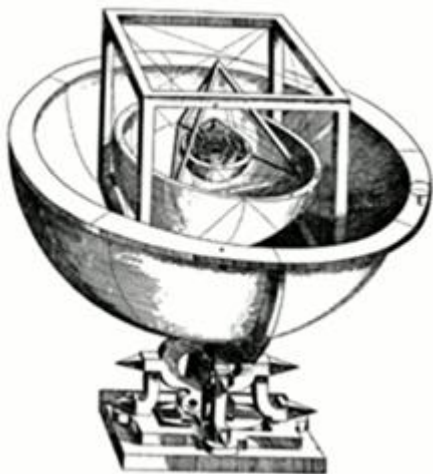
Ο Κέπλερ ενσωμάτωσε θρησκευτικά επιχειρήματα στο έργο του με συλλογιστική πορεία, υποκινούμενος από τη θρησκευτική πεποίθηση, ότι ο Θεός δημιούργησε τον κόσμο σύμφωνα με ένα προσβάσιμο σχέδιο μέσω του φυσικού φωτός της λογικής.

Καθόλη την διάρκεια του βίου του ήταν πάντα άτυχος και είχε ασυνείδητους προϊσταμένους που τον εκμεταλλεύονταν που όμως η αγάπη του για την επιστήμη ποτέ δεν το εγκατέλειψε. Δεν κατάφερε ποτέ να πάρει περισσότερα χρήματα απ' όσα του χρειαζόνταν. Πέθανε στο Ρέγκενσμπουργκ, 15 Νοεμβρίου 1630, γέρος και τον έθαψαν μπροστά στις πύλες της πόλης και το μνήμα του έχει το επίγραμμα που συντάξε ο ίδιος:

**«Ζώντας μετρούσα τα ουράνια, τώρα τα έρημα σκοτάδια·
το πνεύμα ήταν ουράνιο, το σώμα σκιάζει την γη.»**

2.2. Η φιλοσοφία του σαν μυστικιστής και αστρολόγος

Ο Κέπλερ ως προς την φιλοσοφία του είχε επηρεαστεί από τον Κοπέρνικο, αλλά ήταν ένας Πυθαγόρειος: Πίστευε ότι το θεμέλιο ολόκληρης της Φύσεως είναι μαθηματικές σχέσεις και ότι όλη η Δημιουργία αποτελεί μία ενιαία ολότητα. Αυτό ερχόταν σε αντίθεση με την πλατωνική και την αριστοτελική άποψη ότι η Γη ήταν θεμελιωδώς διαφορετική από το υπόλοιπο Σύμπαν (τον «υπερσελήνιο» κόσμο) και ότι σε αυτή ίσχυαν διαφορετικοί φυσικοί νόμοι. Στην προσπάθειά του να ανακαλύψει τους συμπαντικούς φυσικούς νόμους, ο Κέπλερ εφάρμοσε τη γήινη φυσική σε ουράνια σώματα, από όπου και εξάχθηκαν οι τρεις νόμοι του για την κίνηση των πλανητών. Επίσης, ο Κέπλερ ήταν πεπεισμένος ότι τα ουράνια σώματα επιδρούν στα επίγεια γεγονότα. Υπέθεσε έτσι σωστά ότι η Σελήνη σχετίζεται με την αιτία που δημιουργεί τις παλίρροιες.



Το μοντέλο του Kepler του Ηλιακού Συστήματος με τα πλατωνικά στερεά από το έργο του *Mysterium Cosmographicum*

Ως Πυθαγόρειος έβλεπε ότι δεν μπορούσε να είναι σύμπτωση το γεγονός ότι ο αριθμός των τέλειων πολυέδρων ήταν μικρότερος κατά 1 του αριθμού των τότε γνωστών πλανητών. Καθώς υπεστήριζε το ηλιοκεντρικό σύστημα, προσπάθησε επί χρόνια να αποδείξει ότι οι αποστάσεις των πλανητών από τον Ήλιο δίνονταν από τις ακτίνες σφαιρών εγγεγραμμένων σε τέλεια πολύεδρα, έτσι ώστε η σφαίρα του ενός πλανήτη να είναι και περιγεγραμμένη στο πολύεδρο του εσωτερικού του πλανήτη.

Η εσώτατη τροχιά, του Ερμή, αντιπροσώπευε τη μικρότερη σφαίρα. Με τον τρόπο αυτό ταύτιζε τα 5 πλατωνικά στερεά με τα πέντε διαστήματα ανάμεσα στους έξι τότε γνωστούς πλανήτες, αλλά και με τα 5 αριστοτελικά «στοιχεία».

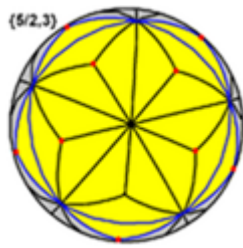
Περισσότερο απ' όλα, ο Κέπλερ με το έργο του εισήγαγε μια νέα αντίληψη για τη Μουσική των Σφαιρών, όχι αυτή τη φορά από την πλευρά της Γης, όπως όλοι πριν απ' αυτόν, αλλά από την πλευρά του Ήλιου. Δεν είναι μια Αρμονία φτιαγμένη για το καλό του πλανήτη μας, αλλά το τραγούδι που ο Κόσμος τραγουδά στον Αφέντη και το Κέντρο του, τον Ήλιο, τον Ηλιακό Λόγο.

Στο έργο του *De Harmonice Mundi* σχεδίασε την παρτιτούρα επάνω στην οποία εκτελούσαν οι πλανήτες τη συμπαντική τους συναυλία. Πρόκειται για ένα βιβλίο ουράνιας μουσικής παρά Αστρονομίας, γιατί κάπου γράφει:

«Ο Κρόνος και ο Δίας τραγουδούν ως μπάσοι, ο Άρης ως τενόρος, η Αφροδίτη και η Γη ως κοντράλτο και ο Ερμής ως σοπράνο».

Ο συνδυασμός των θεολογικών σπουδών που δεν πρόλαβε να τελειώσει, των μαθηματικών και του μυστικισμού (ανιμισμός) που εκφραζόταν από διάφορα φιλοσοφικά ρεύματα εκείνη την εποχή ώθησαν τον Κέπλερ να αναζητήσει το λόγο για τον οποίον ο Θεός επέλεξε να κατασκευάσει το σύμπαν με έξι αντί για επτά πλανήτες.

Σύμφωνα με το ηλιοκεντρικό σύστημα του Κοπέρνικου, η σελήνη ήταν δορυφόρος της γης, ενώ, σύμφωνα με τον γεωκεντρισμό, η σελήνη ήταν πλανήτης.



Υποστήριξε ότι αυτό οφειλόταν στην ύπαρξη μιας «μυστικής αρμονίας» μεταξύ των πλανητών και των γεωμετρικών σχημάτων. Τα γεωμετρικά σχήματα, τα οποία, σύμφωνα με τον Κέπλερ, μπορούσαν να εκφράσουν την αρμονία της δομής του σύμπαντος, ήταν τα πέντε πλατωνικά κανονικά πολύεδρα: το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο (αριστερό σχήμα) και το εικοσάεδρο. Ο Κέπλερ θεώρησε πως, αν υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πολύεδρα, τότε δεν είναι δυνατόν παρά να υπάρχουν έξι πλανήτες.

Στο *Mysterium cosmographicum* προσπάθησε να αποδώσει τις σχέσεις μεταξύ των ακτινών των πλανητών και των γεωμετρικών σχημάτων. Κατασκεύασε ένα σύστημα με πολύεδρα και εγγεγραμμένους σε αυτά κύκλους, αποδεικνύοντας μεταξύ άλλων ότι οι άνισες αποστάσεις που χωρίζουν τις τροχιές των έξι γνωστών τότε πλανητών μπορούν να καθοριστούν ακριβώς από τα πέντε κανονικά πολύεδρα. Υποστήριξε ότι η γη ήταν το μέτρο των πάντων και κατασκεύασε γύρω από αυτήν ένα εγγεγραμμένο δωδεκάεδρο.

Ο κύκλος που περιέβαλλε το δωδεκάεδρο ήταν ο Άρης, ενώ γύρω από αυτόν εγγραφόταν ένα τετράεδρο. Ο κύκλος που περιέβαλλε το τετράεδρο ήταν ο Δίας και γύρω του κατασκεύασε έναν εγγεγραμμένο κύβο. Ο κύκλος που περιέβαλλε τον κύβο ήταν ο Κρόνος. Στο εσωτερικό τη γης, ο Κέπλερ σχεδίασε ένα εικοσάεδρο, ενώ ο κύκλος που το περιέβαλλε ήταν η Αφροδίτη. Μέσα στην Αφροδίτη κατασκεύασε ένα οκτάεδρο και ο κύκλος που το περιέβαλλε ήταν ο Ερμής.

Το *Mysterium cosmographicum* αποτελεί έναν ενδιαφέροντα συνδυασμό των, νεοπλατωνικής επιρροής, φιλοσοφικών απόψεων του Κέπλερ και της νέας κοπερνίκειας αντίληψης για τον κόσμο. Η γεωμετρία και η Αναγέννηση συντίθενται δημιουργικά σε ένα μεγάλης έμπνευσης έργο. Στα επόμενα έργα του, ο Κέπλερ, θα αφιερωθεί στο υλικό των αστρονομικών του παρατηρήσεων. Οι ίδιες οι παρατηρήσεις θα υπερβούν την μεταφυσική του.

Ο Κέπλερ αργότερα πείστηκε ότι ο ήλιος βρίσκεται στο κέντρο του ηλιακού συστήματος, και αφαίρεσε την απαίτηση που υπήρχε μέχρι τότε ότι οι πλανήτες κινούνται σε κυκλικές τροχιές με σταθερές ταχύτητες.

Για τον μυστικιστή Κέπλερ, ο ήλιος ήταν η πηγή της ζωής και της κίνησης. Μέσα του κρυβόταν μια κινητήρια δύναμη, η *anima motrix* [κινητήρια ψυχή], η οποία μπορούσε να προκαλέσει όλες τις κινήσεις των ουράνιων σωμάτων. Αν και είχε βαθιά πίστη σε κάτι που δεν μπορούσε να το παρατηρήσει αλλά διαισθανόταν την ύπαρξή του, αποφάσισε να ελέγξει κατά πόσον η πίστη του σε μια φιλοσοφική αντίληψη

μπορούσε να επιβεβαιωθεί από τις ίδιες τις ακριβείς παρατηρήσεις. Ο Κέπλερ ήθελε να κατανοήσει τις κινήσεις των πλανητών όχι βασιζόμενος σε μεταφυσικές αρχές, όπως συνήθιζαν οι προγενέστεροι αστρονόμοι, οι οποίοι συναρτούσαν τα αποτελέσματα των παρατηρήσεών τους με αυτά πίστευαν, αλλά βασιζόμενος σε φυσικές εξηγήσεις.

Όμως οι ανώμαλες τροχιές των πλανητών και πάλι δεν μπορούσαν να εξηγηθούν ικανοποιητικά με τη μετατόπιση του Κοπέρνικου. Το τελικό πλανητικό μοντέλο του δημιουργήθηκε μόνο αφού εξάντλησε κάθε συνδυασμό κυκλικών κινήσεων που θα μπορούσε να συλλάβει.

Την εποχή του Κέπλερ, η Αστρονομία και η Αστρολογία δεν ήταν διαχωρισμένες όπως σήμερα. Ο Κέπλερ περιφρονούσε τους αστρολόγους που ικανοποιούσαν τις ορέξεις των απλών ανθρώπων χωρίς γνώση των γενικών και αφηρημένων κανόνων, αλλά είδε τη σύνταξη αστρολογικών προγνώσεων ως το μόνο δυνατό τρόπο για να συντηρήσει την οικογένειά του, ιδίως μετά την έναρξη του φοβερού και άκρως καταστρεπτικού για την πατρίδα του «Τριακονταετούς Πολέμου».

Ωστόσο, ο ιστορικός John North, σημειώνει την επίδραση της αστρολογίας στην επιστημονική του σκέψη ως εξής:

«αν δεν ήταν και αστρολόγος, πιθανότατα δεν θα είχε παραγάγει το αστρονομικό του έργο για τους πλανήτες στη μορφή που το έχουμε σήμερα».

Πάντως οι απόψεις του Κέπλερ για την Αστρολογία ήταν ριζικά διαφορετικές από εκείνες της εποχής του. Υποστήριζε ένα αστρολογικό σύστημα βασισμένο στις «αρμονικές» του, δηλαδή στις γωνίες που σχηματίζουν μεταξύ τους τα ουράνια σώματα και σε αυτό που ονομάστηκε «η μουσική των σφαιρών». Πληροφορίες για τις θεωρίες του αυτές υπάρχουν στο έργο του *Harmonice Mundi*.

Η προσπάθειά του να θέσει την Αστρολογία σε στερεότερες βάσεις οδήγησε στο έργο του *De Fundamentis Astrologiae Certioribus* («Περί των περισσότερο ασφαλών θεμελίων της Αστρολογίας») (1601). Στο «Ο ενδιάμεσος τρίτος», μία «προειδοποίηση προς θεολόγους, ιατρούς και φιλοσόφους» (1610), θέτοντας τον εαυτό του ως «τρίτο άνθρωπο» ανάμεσα στις δύο ακραίες θέσεις «υπέρ» και «κατά» της Αστρολογίας, ο Κέπλερ συνηγόρησε για το δυνατό της ευρέσεως μιας καθορισμένης σχέσεως μεταξύ των ουράνιων φαινομένων και των γήινων γεγονότων.

Περί τα 800 ωροσκόπια και γενέθλιοι χάρτες που συνέταξε ο Κέπλερ σώζονται σήμερα, συμπεριλαμβανομένων του δικού του και μελών της οικογένειάς του. Ως μέρος των καθηκόντων του στο Γκρατς, ο Κέπλερ εξέδωσε μία πρόγνωση για το έτος 1595 στην οποία **προέβλεψε μία εξέγερση των χωρικών, εισβολή των Τούρκων και δριμύ ψύχος, όλα με επιτυχία**, η οποία του έδωσε φήμη. Ως αυτοκρατορικός

μαθηματικός εξήγησε στον Ροδόλφο Β΄ τα ωροσκόπια του Αυτοκράτορα Αυγούστου και του Προφήτη Μωάμεθ, και έδωσε μια αστρολογική γνωμάτευση για το αποτέλεσμα ενός πολέμου ανάμεσα στη Γαληνοτάτη Δημοκρατία της Βενετίας και τον Παύλο Ε΄.

Στην 300η επέτειο του θανάτου του Κέπλερ (1930), ο Αϊνστάιν ανέφερε για τον μεγάλο αστρονόμο:

«Ο Κέπλερ, ήταν εξαιρετικός και πρᾶος επιστήμονας... Τόσο μεγάλη ήταν η πίστη του στη λειτουργία φυσικών νόμων, ώστε είχε τη δύναμη να αφιερώσει ολόκληρες δεκαετίες επίπονης και υπομονετικής εργασίας, στην εμπειρική έρευνα της κίνησης των πλανητών, καθώς και στους μαθηματικούς νόμους που κυβερνούν αυτή την κίνηση, ένα τεράστιο έργο που το έφερε εις πέρας εντελώς μονάχος, με την υποστήριξη κανενός και με την κατανόηση τόσων ολίγων...».

3. Οι νόμοι της κίνησης των πλανητών.

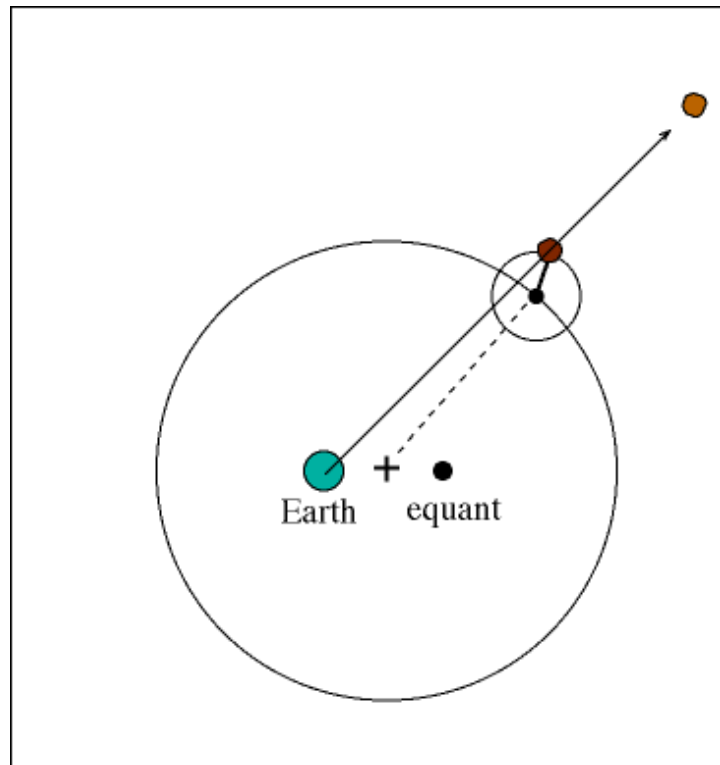
3.1. Ιστορία των νόμων.

Οι νόμοι ανακαλύφθηκαν από τον Κέπλερ από το 1609 έως το 1618. Ο Κέπλερ συνεργάστηκε στην Πράγα-Τσεχία με τον διάσημο Δανό αστρονόμο Tycho Brahe και βασίστηκε στο έργο του. Στους νόμους που διατύπωσε βασίστηκε ο Νεύτων για να επαληθεύσει τον δικό του νόμο της παγκόσμιας έλξης των μαζών. Απεδείχθη ότι οι παλίρροιες οφείλονται στην ελκτική δύναμη της Σελήνης και ότι ο αέρας έχει βάρος.

Μετά τον θάνατο του Τύχωνα κατόρθωσε να ανακαλύψει τους πραγματικούς χρόνους κίνησης των πλανητών. Το δόγμα της κυκλικότητας των κινήσεων των πλανητών με σταθερές ταχύτητες, που είχε πρυτανεύσει στην ανάλυση των πλανητικών τροχιών επί 2.600 χρόνια είχε επιτέλους καταρρεύσει.

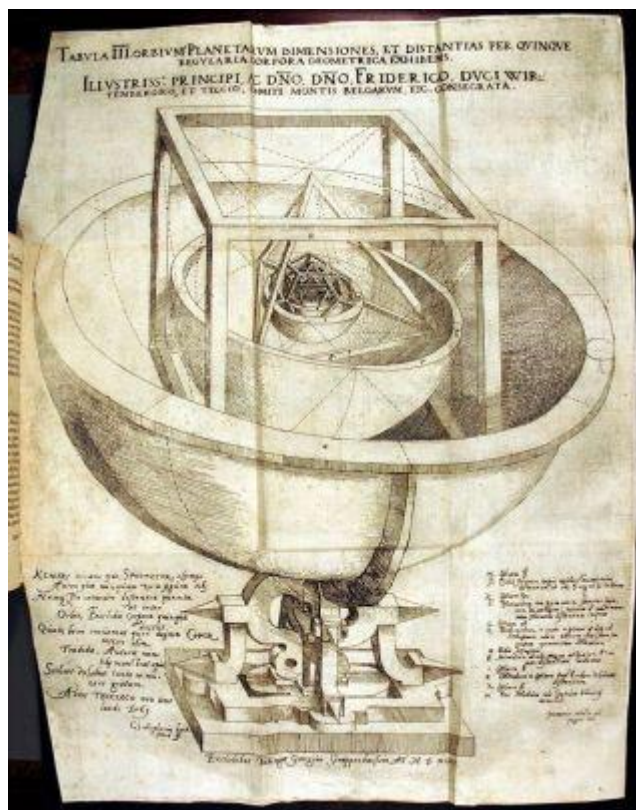
Υποστήριξε επίσης την ηλιοκεντρική άποψη του Κοπέρνικου για τον Κόσμο αλλά όπως είπαμε αφαίρεσε τις κυκλικές τροχιές των πλανητών. Όμως το μοντέλο αυτό δημιουργήθηκε μόνο αφού εξάντλησε κάθε συνδυασμό κυκλικών κινήσεων που θα μπορούσε να συλλάβει. Βασίζοντας την εργασία του στις λεπτολόγες και υπερβολικά ακριβείς παρατηρήσεις που έκανε με τα μάτια του ο Δανός αστρονόμος Tycho Brahe, ο Κέπλερ προσπάθησε περισσότερο από μια δεκαετία να ταιριάζει τις θέσεις του Άρη με κάποιο είδος κυκλικής κίνησης. Αλλά μόνο όταν αντικατάστησε τον κύκλο με την έλλειψη, μπόρεσε να ταιριάζει τις θέσεις του Άρη στο νέο μοντέλο του, όπως και τους άλλους πλανήτες.

Έχοντας στα χέρια του ακριβέστερα δεδομένα και παρατηρήσεις εφάρμοσε το μοντέλο της έλλειψης για του πλανήτες γύρω από τον ήλιο και με βάση αυτό, το 1609, εξέδωσε το “Astronomia Nova” που περιλαμβάνει τον πρώτο και δεύτερο νόμο του, όπως τους γνωρίζουμε σήμερα.



Ο επίκυκλος ενός πλανήτη και η τοποθέτηση της Γης στο κέντρο του κύκλου. Δηλαδή στο σύστημα του Πτολεμαίου οι πλανήτες περιφέρονταν σταθερά πάνω σε έναν τέλειο κύκλο, τον επίκυκλο. Το κέντρο αυτού του κύκλου περιφερόταν σταθερά

πάνω σε έναν άλλο τέλειο κύκλο (τον φέροντα) που είχε ως κέντρο του τη Γη.



Ύστερα δε από μακρές και επίμονες δοκιμές διαφόρων υποθέσεων, ο Κέπλερ έκανε δυο βασικές διαπιστώσεις: πρώτον, ότι ο Άρης κινείται σε μια έλλειψη, με τον Ήλιο σε μία από τις δυο εστίες και, δεύτερον, ανακάλυψε το νόμο που καθορίζει την ταχύτητα με την οποία ο Άρης κινείται στα διάφορα τμήματα της τροχιάς του.

Ο Κέπλερ προσπαθούσε να βρει μήπως υπάρχει κάποια σχέση, ένας νόμος, ο οποίος να προκαθόριζε τις θέσεις των πλανητών μέσα στο χώρο του ηλιακού μας συστήματος.

Σημειώνουμε ότι την εποχή του ήταν μόνο οι 6 από τους 9 πλανήτες γνωστοί. Οι Ερμής, Αφροδίτη, Γη, Άρης, Δίας και Κρόνος.

Υπολογίζοντας τις αποστάσεις των πλανητών αυτών από τον Ήλιο, ο Κέπλερ βρήκε πως αυτές παίρνοντας ως μονάδα μέτρησης την απόσταση Γης – Ηλίου, είναι οι ακόλουθες: Ερμής 0,39, Αφροδίτη 0,72, Γη 1, Άρης 1,52, Δίας 5,2, και Κρόνος 9,55.

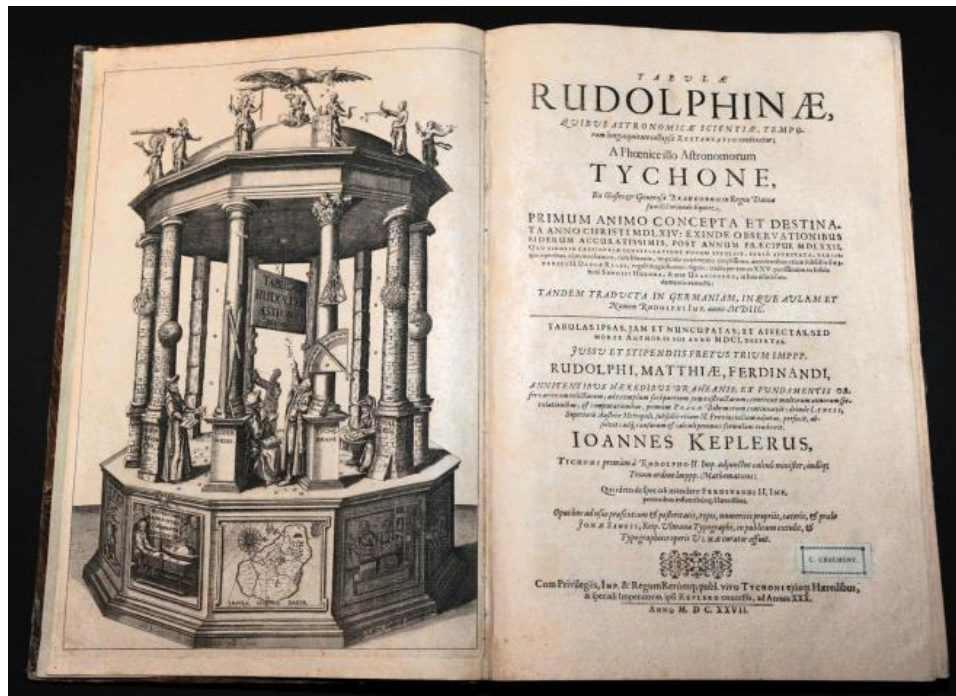
Ο επιστήμονας κατανόησε πολύ σύντομα ότι ο κόσμος είναι κάτι περισσότερο από ένα σύνολο γεωμετρικών κατασκευών και βασιζόμενος στις αρχές της φυσικής, ερμήνευσε τις κινήσεις των πλανητών με βάση τα αίτια που τις προκαλούν. Τόλμησε, δηλαδή, να αρνηθεί την επιβολή αρμονιών στη φύση που βασίζονται μόνο σε μεταφυσικές δοξασίες και δεν επαληθεύονται από τις παρατηρήσεις.

Για τον λόγο αυτό προσπάθησε να ερμηνεύσει τη δύναμη που συγκρατεί τους πλανήτες στην τροχιά τους, αναφέροντας, «βάλ' τε μια μεγαλύτερη Γη κοντά στη δική μας και η δική μας θα αποκτήσει βάρος σε σχέση με τη μεγαλύτερη και θα πέσει επάνω της, όπως μια πέτρα πέφτει στο έδαφος». Άλλωστε είναι αυτός που πρώτος υποστήριξε ότι η έλξη είναι αμοιβαία, η Γη δεν έλκει μόνο τα σώματα, αλλά και έλκεται από αυτά. Όμως, γιατί δε συγκρούονται μεταξύ τους; Αυτό που εμποδίζει τα ουράνια σώματα να συγκρουστούν είναι η τροχιά τους. Η αρχή της αδράνειας, σύμφωνα με την οποία τα σώματα συνεχίζουν την ευθύγραμμη κίνηση έως ότου κάποια παρέμβαση τα σταματήσει ή τροποποιήσει την τροχιά τους, θα διατυπωθεί από τον Νεύτωνα προς το τέλος του 17^{ου} αιώνα και δεν αποτελεί τμήμα του εννοιολογικού συστήματος του Κέπλερ. Κατά τη δική του αντίληψη χρειαζόταν κάποια δύναμη να σπρώχνει τους πλανήτες, για να συνεχίσουν να κινούνται στον ουρανό. Ο ήλιος παρείχε αυτή τη δύναμη που εξασθενούσε, όσο μεγάλωνε η ακτίνα της δράσης της.

Η δύναμη αυτή, “effluvium magneticum” (μαγνητική απορροή), ξεχυνόταν ακτινικά από τον ήλιο και περιστρεφόταν μαζί με εκείνον επενεργώντας εφαπτομενικά στους πλανήτες. Η ελλειπτική τροχιά των πλανητών οφειλόταν στις μαγνητικές ιδιότητες του ήλιου και των πλανητών, που είχαν ως αποτέλεσμα σε άλλες θέσεις ο ήλιος να τους έλκει και σε άλλες τους απωθεί.

Το 1605 ο Κέπλερ δημοσιεύει τα αποτελέσματα που προέκυψαν ύστερα από έρευνα ετών και βασίζονται σε μετρήσεις του Tycho Brahe: ο Άρης δεν έχει κυκλική τροχιά, αλλά ελλειπτική.

Το 1609 και το 1619 δημοσιεύονται τρεις νόμοι που μετέπειτα θα πάρουν το όνομά του και πάνω σ' αυτούς βασίζεται η επιστήμη της Ουράνιας Μηχανικής, που περιγράφει τους νόμους κίνησης των πλανητών γύρω από τον Ήλιο. Σημαντική υπήρξε η συνεισφορά του και στην Οπτική εξελίσσοντας κυρίως το τηλεσκόπιο.



Το 1627 δημοσιεύει τους “Ροδόλφους Πίνακες” που θα αντικαταστήσουν τους άτλαντες του Πτολεμαίου.

3.2. Νόμοι του Κέπλερ

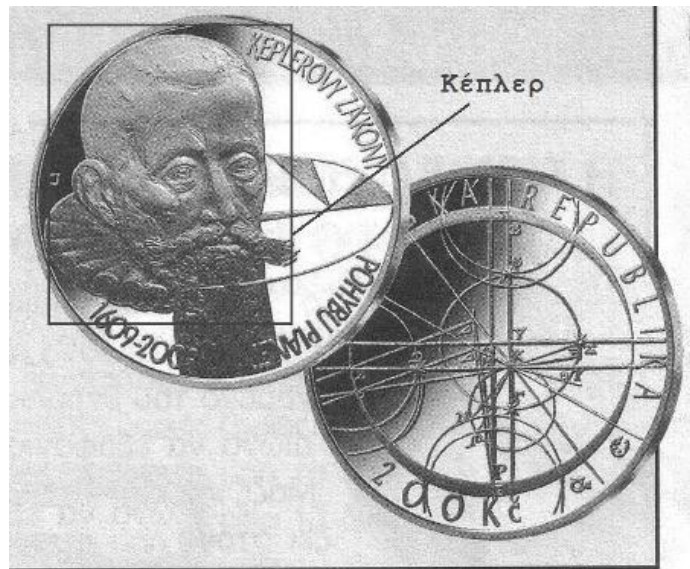
1ος Νόμος: Η τροχιά των πλανητών είναι ελλειπτική με τον Ήλιο να βρίσκεται στη μία εστία της έλλειψης.

2ος Νόμος: Η ακτίνα που ενώνει τον Ήλιο και τον κάθε πλανήτη διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά.

3ος Νόμος: Το τετράγωνο της περιόδου περιφοράς του κάθε πλανήτη είναι ανάλογο με τον κύβο του μήκους του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης που διαγράφει.

3.2.1. Το νόμισμα.

Προς τιμή του νόμισμα εκδόθηκε από το Τσέχικο νομισματοκοπείο και αποτελεί συλλεκτική έκδοση.



Γιατί όμως ένας Γερμανός εμφανίζεται σε νόμισμα της Τσεχίας;

Μην ξεχνάμε ότι είχε εκδιωχθεί και τελικά έμεινε για μεγάλο χρονικό διάστημα στην Πράγα-Τσεχία όπου όπως αναφέρεται παραπάνω συνεργάστηκε με τον Δανό Tycho Brahe και τελικά μόνος του απέδωσε του 3 νόμους.

Δεν πρόκειται για νόμισμα καθημερινής κυκλοφορίας, που κάποιοι, αν όχι η πλειονοψηφία, θα θεωρούσαν πρόκληση την απεικόνιση της μορφής ενός Γερμανού σε Τσέχικο νόμισμα. Πρόκειται για ειδική συλλεκτική και αναμνηστική έκδοση που σκοπό έχει να αποδώσει τον φυσικό χώρο, που άλλωστε αποτέλεσε άσυλο, όπου έγινε η ανακάλυψη των 3 νόμων της αστρονομίας και μετέπειτα της αστροφυσικής.

Θα επιχειρήσουμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία των νόμων του Κέπλερ με τους νόμους του Νεύτωνα ακολουθώντας τα χνάρια του μεγάλου φυσικού και δάσκαλου Richard Feynman χρησιμοποιώντας μαθηματικά Λυκείου (βασισμένοι στο βιβλίο: «Η χαμένη διάλεξη του Feynman»).

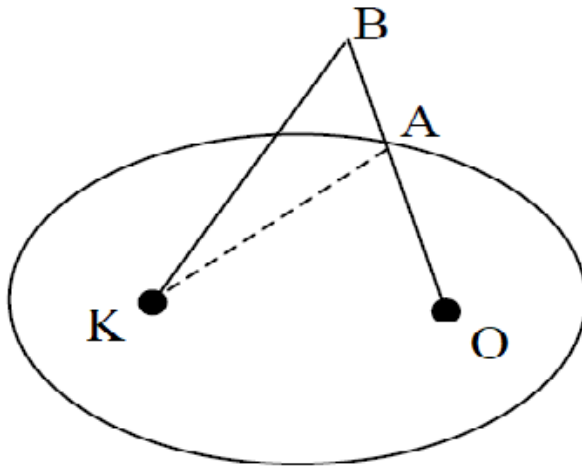
Πριν ξεκινήσουμε για την προσπάθειά μας θα αποδείξουμε ορισμένες ιδιότητες της έλλειψης².

² Η έλλειψη είναι μία κωνική τομή και προκύπτει από την τομή ενός κώνου με επίπεδο που τον τέμνει πλαγίως ως προς τον άξονά του. Μια έλλειψη χαρακτηρίζεται από τον μεγάλο ημιάξονα της και από την εκκεντρότητά της.

1. Ορισμός της έλλειψης.

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία έχουν σταθερό άθροισμα από δύο δεδομένα σημεία. (εστίες).

2. Κάθε σημείο έξω από την έλλειψη απέχει από τις δύο εστίες απόσταση μεγαλύτερη από αυτήν που απέχει ένα σημείο που ανήκει στην έλλειψη.



Απόδειξη

Έστω ένα σημείο B εκτός της
έλλειψης.

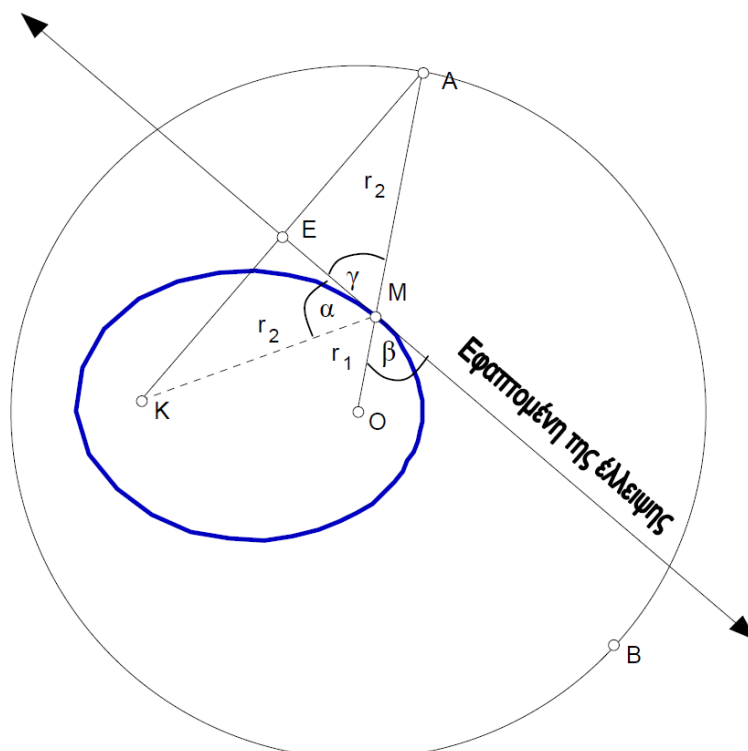
Τότε θα έχουμε $BO = BA + AO$

Αλλά $BK + BA > AK$ οπότε θα έχουμε:

$$\text{BK} + \text{BO} = \text{BK} + \text{BA} + \text{AO} > \text{AK} + \text{AO} \quad \text{o.}\varepsilon.\delta$$

3. Αν μια φωτεινή ακτίνα ξεκινήσει από μια εστία και ανακλαστεί σε ένα ελλειπτικό κάτοπτρο, μετά την ανάκλαση θα περάσει από την άλλη εστία

Απόδειξη



Έστω μια ακτίνα ΚΜ η οποία ξεκινάει από την εστία Κ. Για να περάσει μετά την ανάκλαση στην επιφάνεια της έλλειψης από την εστία Ο θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η γωνία $\alpha = \beta$.

Φέρνουμε την εφαπτόμενη στο σημείο ανάκλασης Μ και στη συνέχεια κατασκευάζουμε το συμμετρικό σημείο Α του σημείου Κ ως προς την εφαπτομένη.

Με άλλα λόγια $ΚΕ = ΕΑ$ και $ΚΕ \perp ΜΕ$.

Λόγω της ισότητας των τριγώνων $ΚΜΕ = ΜΕΑ$ θα έχουμε : $\alpha = \gamma$.

Ισχύει ακόμη $ΚΜ + ΜΟ = ΜΑ + ΜΟ =$ σταθερό

Για οποιοδήποτε άλλο σημείο Μ' της εφαπτομένης θα ισχύει $ΜΑ + ΜΟ < Μ'Α + Μ'Ο$, αφού αυτό το σημείο θα είναι σημείο εξωτερικό της έλλειψης, όπως αποδείξαμε προηγούμενα.

Άρα, για να ισχύει η ανισότητα για κάθε σημείο της θα πρέπει τα σημεία Ο, Μ, Α να βρίσκονται σε ευθεία.

Οπότε $\gamma = \beta$ αφού είναι κατακόρυφή γωνίες.

Επομένως $\alpha = \beta$ ο.ε.δ

Αφού Ο, Μ, Α σε ευθεία και $ΜΟ + ΟΑ =$ σταθερό, συνεπάγεται ότι το σημείο Α θα διαγράφει έναν κύκλο όσο το Μ κινείται πάνω στην έλλειψη.

Έτσι με την παραπάνω κατασκευή αποδείξαμε ταυτόχρονα και την επόμενη πρόταση.

4. Έστω ένας κύκλος με κέντρο Ο και ένα σημείο Κ μέσα στον κύκλο. Φέρνουμε μια τυχαία ακτίνα έστω την ΟΑ και στη συνέχεια φέρνουμε την ΚΑ. Στη συνέχεια φέρνουμε τη μεσοκάθετο στην ΚΑ που τέμνει την ΟΑ σε ένα σημείο Μ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ όταν κινείται το Α πάνω στην περιφέρεια του κύκλου είναι έλλειψη. Σε αυτή την έλλειψη η μεσοκάθετος στην ΚΑ είναι εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο Μ.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα συνημίτονων στο τρίγωνο ΟΜΚ.

$$(ΜΚ)^2 = (ΟΜ)^2 + (ΟΚ)^2 - 2(ΟΜ)(ΟΚ)\cos\varphi \quad (1)$$

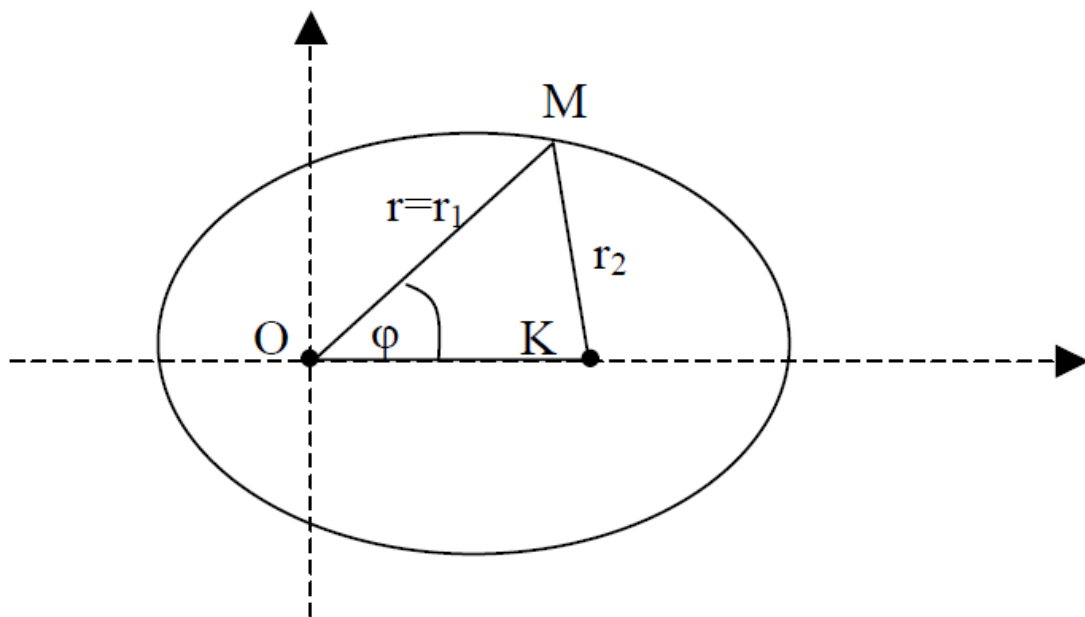
από τον ορισμό της έλλειψης έχουμε:

$$(MO) + (MK) = c \Rightarrow (MK)^2 = (MO)^2 + c^2 - 2(OM)c \quad (2)$$

από τις (1) και (2) έχουμε τα πρώτα μέλη ίσα άρα και τα δεύτερα.

$$(OM)^2 + (OK)^2 - 2(OM)(OK)\sigma\upsilon\nu\varphi = (MO)^2 + c^2 - 2(OM)c \Rightarrow$$

$$2(OM)[c - (OK)\sigma\upsilon\nu\varphi] = c^2 - (OK)^2$$



Καλούμε τη σταθερά $OK = a$ οπότε έχουμε:

$$r = \frac{c^2 - a^2}{2c - 2a\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\frac{c^2 - a^2}{2c}}{1 - \frac{a}{c}\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{b}{1 - e\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (3)$$

- Για $e < 1$ έχουμε την εξίσωση της έλλειψης
- Για $e = 1$ έχουμε την εξίσωση της παραβολής
- Για $e > 1$ έχουμε την εξίσωση της υπερβολής.

Αφού τελειώσαμε με τις βασικές ιδιότητες της έλλειψης είμαστε έτοιμοι να μπορούμε στο κυρίως θέμα, δηλαδή, την απόδειξη των νόμων του Κέπλερ (Kepler) από τους νόμους του Νεύτωνα (Newton).

.

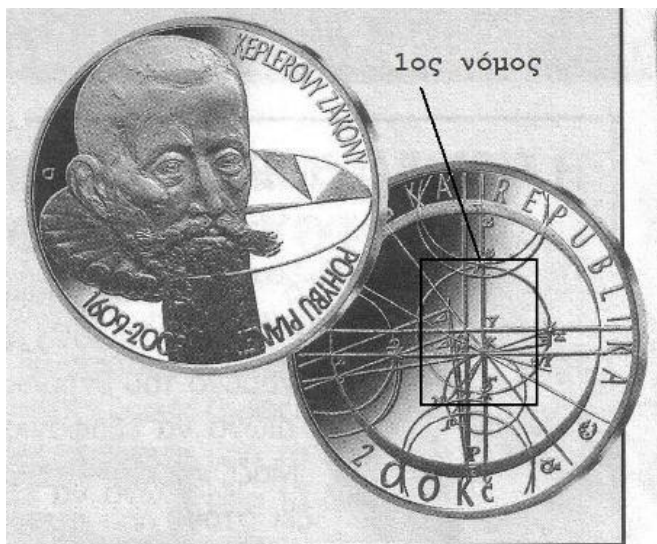
Υπενθυμίζουμε τους νόμους του Νεύτωνα.

- a. **Νόμος της αδράνειας.** Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη τότε αυτό είτε ακινητεί είτε κινείται ευθύγραμμα ομαλά
- b. **Θεμελιώδης νόμος.** Αν σε ένα σώμα ασκείται συνολικά μια δύναμη τότε αυτό αποκτά μια επιτάχυνσης ίδιας κατεύθυνσης με τη δύναμη και ανάλογου μέτρου. Ο συντελεστής αναλογίας εκφράζει τη μάζα του σώματος.
- c. **Νόμος δράσης αντίδρασης.** Αν ένα σώμα ασκεί σε ένα άλλο μια δύναμη F τότε και το άλλο σώμα ασκεί στο πρώτο μια αντίθετη δύναμη
- d. **Νόμος παγκόσμιας έλξης.** Δύο σώματα έλκονται με μια δύναμη που είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης.

3.2.2. Πρώτος νόμος Κέπλερ: Ο Νόμος των ελλειπτικών τροχιών ή νόμος πλανητικών τροχιών.

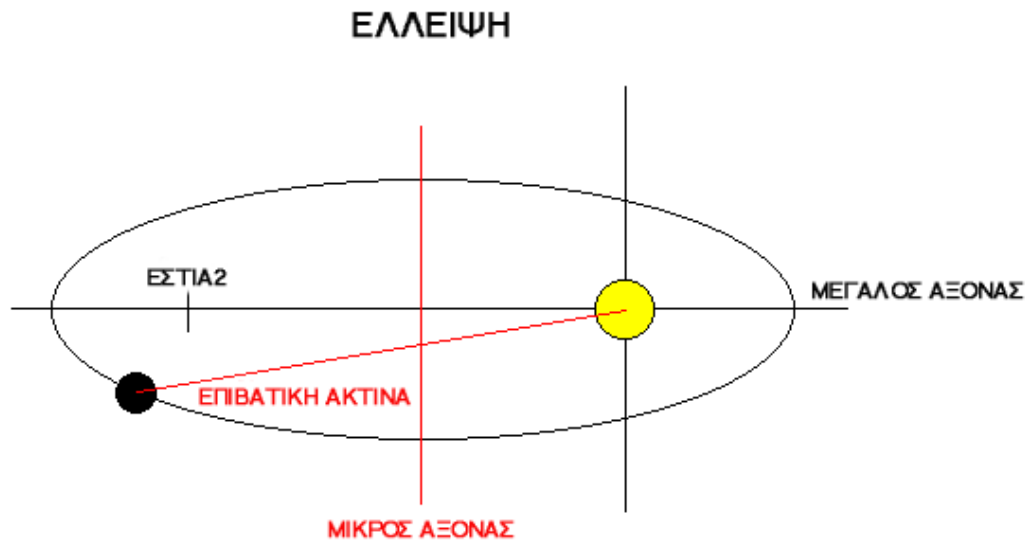
Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν:

Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις, των οποίων τη μία εστία, κοινή σε όλες τις πλανητικές τροχιές, κατέχει ο Ήλιος.



Επί της ελλειπτικής αυτής τροχιάς των πλανητών, **περιήλιο** χαρακτηρίζεται το σημείο εκείνο που βρίσκεται ο πλανήτης πλησιέστερα στον Ήλιο, συνεπώς πρόκειται για το ένα ακραίο σημείο του μεγάλου άξονα και αντίθετα **αφήλιο** το αντιδιαμετρικό σημείο του μεγάλου άξονα.

Ειδικά στις ελλείψεις των πλανητών ο μεγάλος ημιάξονας ονομάζεται **μέση απόσταση** του πλανήτη από τον Ήλιο, ενώ η ευθεία που συνδέει τον Ήλιο με την εκάστοτε θέση του πλανήτη επί της ελλειπτικής ονομάζεται **επιβατική ακτίνα**. Εξ άλλου και ο μέγας άξονας της τροχιάς ονομάζεται γραμμή των ασίδων, επειδή "φέρονται" επ' αυτόν ή άνω και η κάτω "αψίδα" της ελλειπτικής.



Εξαγωγή του νόμου των ελλειπτικών τροχιών από πρώτες αρχές

Αν και ο Κέπλερ κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειπτικές αντί για κυκλικές, δεν μπόρεσε να προσδιορίσει το είδος της δύναμης που βρίσκεται πίσω από το παρατηρησιακό αυτό γεγονός. Ο Ισαάκ Νεύτωνας ήταν ο πρώτος που κατάφερε τόσο να ποσοτικοποιήσει το είδος της δύναμης μέσω του νόμου της παγκόσμιας έλξης, όσο και να γενικεύσει το εμπειρικό αποτέλεσμα του Κέπλερ.

Συγκεκριμένα, η επίλυση της εξίσωσης του Νεύτωνα με τη βαρυτική δύναμη που επιβάλλει ο νόμος της παγκόσμιας έλξης δίνει ως αποτέλεσμα την επιβατική ακτίνα, r , ενός πλανήτη σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο συναρτήσει της πολικής γωνίας θ , μετρημένη ως προς την κατεύθυνση του περιηλίου:

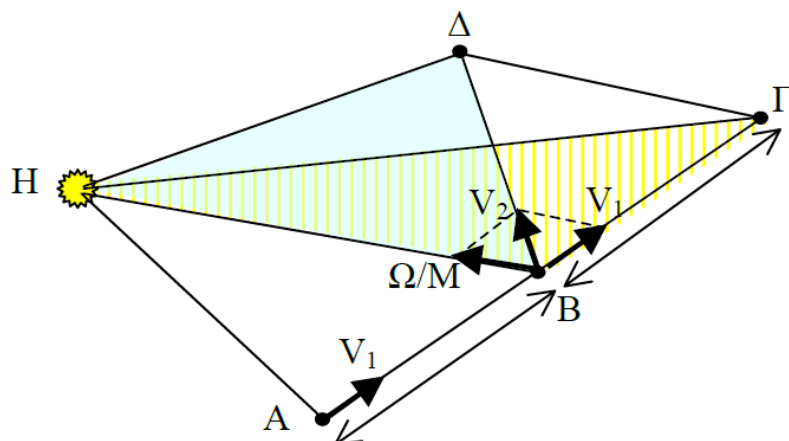
$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

όπου $0 \leq e < 1$ η εκκεντρότητα της έλλειψης και a ο μεγάλος ημιάξονας. Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει μία έλλειψη σε πολικές συντεταγμένες. Οι θέσεις του περιηλίου και αψηλίου αντιστοιχούν (από τον ορισμό της μέτρησης της γωνίας θ) σε γωνιακές συντεταγμένες $\theta = 0^\circ$ και $\theta = 180^\circ$ αντίστοιχα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι **μόνο ένας νόμος δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου** — όπως είναι η βαρυτική δύναμη — δίνει ως αποτέλεσμα επίλυσης της εξίσωσης του Νεύτωνα **κλειστές ελλειπτικές τροχιές**.

Το γεγονός ότι ο ήλιος παραμένει ακίνητος είναι απόρροια του 2ου και 3ου νόμου του Νεύτωνα. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο όση δύναμη δέχεται ο πλανήτης από τον ήλιο τόση ακριβώς ασκεί και ο πλανήτης στον ήλιο. Λόγω όμως της πολύ μεγαλύτερης μάζας του ήλιου η επιτάχυνση του ήλιου μπορεί να θεωρηθεί μηδενική. Άρα ο ήλιος είναι ακίνητος ή κινείται ευθύγραμμα ομαλά που είναι το ίδιο δυναμικά με το να θεωρηθεί ακίνητος.

Θα αποδείξουμε τώρα τον πρώτο νόμο του Κέπλερ θεωρώντας όπως προαναφέραμε τον Ήλιο να παραμένει ακίνητος.



Εάν ο ήλιος δεν ασκούσε καμία δύναμη στο σώμα, τότε ο πλανήτης θα κινιόταν ευθύγραμμα ομαλά και σε ίσους χρόνους θα διένυε ίσες αποστάσεις με ταχύτητα V_1 .

Έτσι θα έχουμε $AB = B\Gamma$. Επομένως, $\text{Εμβαδόν}(AHB) = \text{Εμβαδόν}(BH\Gamma)$

Έστω τώρα ότι ο ήλιος ασκεί μια στιγμιαία ώθηση στο σημείο B με αποτέλεσμα να αλλάξει την ταχύτητα από V_1 σε V_2 . Λόγω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε:

$$\vec{F}\Delta t = \vec{\Omega} = M\vec{V}_2 - M\vec{V}_1 \Rightarrow \frac{\vec{\Omega}}{M} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

το $\frac{\vec{\Omega}}{M}$ είναι ένα διάνυσμα που κατευθύνεται προς τον ήλιο. Ακόμη σε ίσους χρόνους θα έχουμε τη σχέση:

$$\frac{\vec{V}_2}{\vec{V}_1} = \frac{\frac{B\Delta}{\Delta t}}{\frac{B\Gamma}{\Delta t}} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$$

Άρα η $\Delta\Gamma \parallel HB$ με αποτέλεσμα $\text{Εμβαδόν}(H\Delta B) = \text{Εμβαδόν}(H\Gamma B)$

Επομένως σε ίσους χρόνους με στιγμιαία ώθηση στο σημείο B θα έχουν διανυθεί πάλι ίσα εμβαδά.

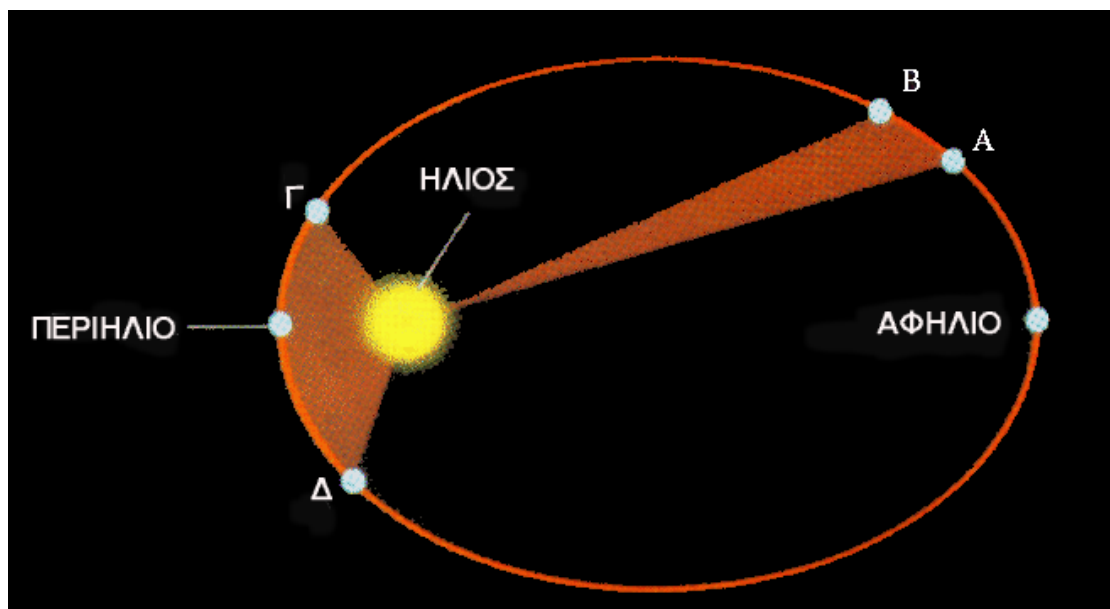
Ο ήλιος όμως δεν ασκεί ώθηση για κάποιο πολύ μικρό χρονικό διάστημα όπως υποθέσαμε αλλά συνεχώς. Αυτό όμως δεν θα φέρει κάποια αλλαγή στην απόδειξή μας αφού αν βάλουμε άλλη μια στιγμιαία ώθηση στο μέσο της διαδρομής AB δεν θα έχουμε αλλαγή του διανυόμενου εμβαδού. Το ίδιο αν προσθέσουμε μια στιγμιαία ώθηση στο μέσο της διαδρομής ΒΔ κ.ο.κ οπότε θα καταλήξουμε τελικά σε μια συνεχή άσκηση της ώθησης και η τεθλασμένη γραμμή θα καταλήξει σε λεία καμπύλη. Τα εμβαδά που θα διαγράφονται σε ίσους χρόνους θα είναι και πάλι ίσα.

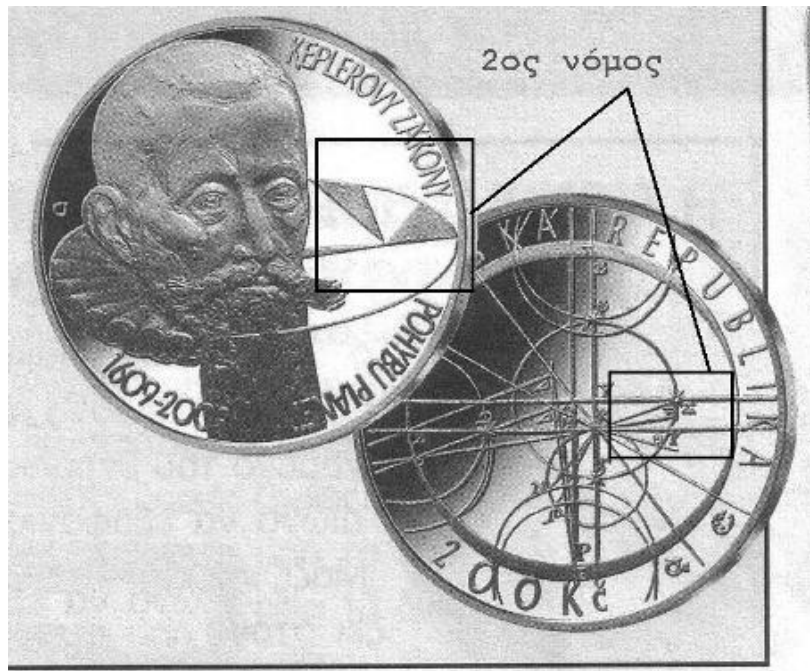
3.2.3. Ο δεύτερος νόμος Κέπλερ ή νόμος των εμβαδών.

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν:

Η επιβατική ακτίνα Ηλίου - Πλανήτη γράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους ή εμβαδά ανάλογα των χρόνων.

Αυτό συμβαίνει επειδή η επιβατική ακτίνα αφενός δεν έχει σταθερό μήκος, αλλά λαμβάνει τη μικρότερη τιμή στο περιήλιο και την μεγίστη στο αφήλιο και αφετέρου στο ότι η ταχύτητα ενός πλανήτη είναι η μεγαλύτερη όταν ο πλανήτης βρίσκεται στο περιήλιο και η μικρότερη όταν βρίσκεται στο αφήλιο. Έτσι τα μεν γραφόμενα τόξα είναι άνισα μεταξύ τους αλλά τα εμβαδά τους είναι ίσα, ανάλογα των χρόνων που αυτά γράφονται.





Μαθηματική περιγραφή

Από μαθηματικής άποψης, ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ είναι κατανοητός στα πλαίσια της κατηγορίας των κεντρικών δυνάμεων. Συγκεκριμένα, η στροφορμή (J) ενός σώματος που κινείται υπό την επίδραση μίας κεντρικής δύναμης είναι πάντοτε σταθερή:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + \frac{dp}{dt} \times r = v \times (mv) + F \times r = 0$$

αφού ο ορισμός μίας κεντρικής δύναμης F είναι ότι το εξωτερικό γινόμενο της με την επιβατική ακτίνα r ισούται με μηδέν ($F \times r = 0$).

Από την άλλη, ο ρυθμός με τον οποίο η επιβατική ακτίνα σαρώνει εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες ισούται με:

$$\dot{A} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \theta \right) = \frac{J}{2m}$$

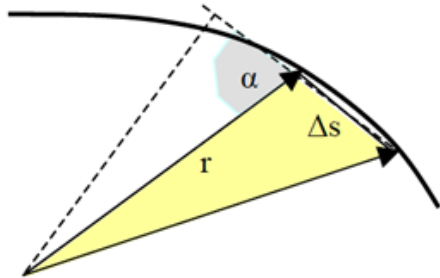
όπου η τελεία αναφέρεται σε παραγωγή ως προς το χρόνο.

Στον δεύτερο νόμο του Κέπλερ, βλέπουμε ότι, αν και η τροχιά των πλανητών είναι συμμετρική, όπως μας λέει ο πρώτος νόμος, η κίνησή τους δεν είναι.

Ένας πλανήτης επιταχύνει, καθώς είναι πιο κοντά στον Ήλιο έχοντας τη μεγαλύτερη ταχύτητα στο πιο κοντινό σημείο και μετά επιβραδύνει ξανά. Αν το κοιτάξουμε με βάση την ενέργεια, ένας πλανήτης, ενώ απομακρύνεται από τον Ήλιο, προσπαθεί να

ξεπεράσει την έλξη της βαρύτητας που δέχεται από αυτόν και χάνει ενέργεια, πηγαίνει πιο αργά. Όταν ξανά πλησιάσει, αποκτά τη “χαμένη” του ενέργεια πλήρως και επιταχύνει.

Απόδειξη δεύτερου νόμου.

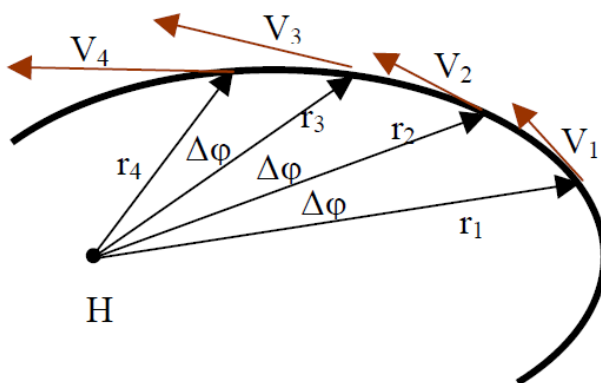


Ο ρυθμός με τον οποίο διαγράφεται το εμβαδόν ισούται με

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{\Delta t} r \cdot \eta \mu \alpha = \frac{1}{2} V \cdot r \cdot \eta \mu \alpha \quad (4)$$

Έστω ότι στο σημείο Η βρίσκεται ο ήλιος και ένας πλανήτης λόγω της παγκόσμιας έλξης διαγράφει μια τροχιά.

Θα αποδείξουμε ότι η τροχιά αυτή αν είναι κλειστή είναι μια έλλειψη, αλλιώς θα είναι μια παραβολή ή μια υπερβολή.



Χωρίζουμε τη τροχιά σε ίσες γωνίες $\Delta\phi$ όπως φαίνονται από τον ήλιο. Τότε όπως έχουμε αποδείξει προηγούμενα στα κοντινότερα σημεία από τον ήλιο θα έχουμε γενικά μεγαλύτερες ταχύτητες αφού σε ίσους χρόνους θα πρέπει να διαγράφονται ίσα εμβαδά.

Θα αποδείξουμε ότι σε ίσες γωνίες αντιστοιχούν ίσες μεταβολές της ταχύτητας. Πράγματι από τον θεμελιώδη νόμο σε συνδυασμό με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης έχουμε:

$$\Delta V = \frac{F \Delta t}{m} = \sigma \tau \alpha \theta \frac{\Delta t}{r^2} \quad (5)$$

προηγούμενα έχουμε αποδείξει ότι το εμβαδόν που διαγράφεται στη μονάδα του χρόνου είναι σταθερό. Άρα

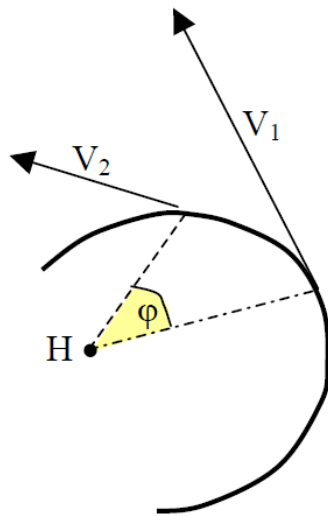
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \sigma \tau \alpha \theta' \Rightarrow \frac{r^2 \Delta \phi}{2 \Delta t} = \sigma \tau \alpha \theta' \quad (6)$$

άρα συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι

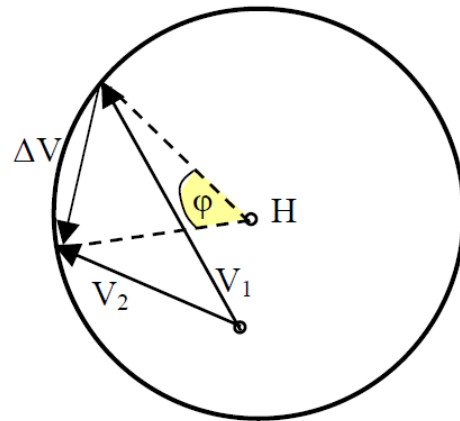
$$\frac{\Delta V}{\Delta \phi} = \sigma \tau \alpha \theta \quad (7)$$

επομένως αν χωρίσουμε την τροχιά του πλανήτη σε N ίσες γωνίες το διάγραμμα των ταχυτήτων θα είναι έτσι ώστε τα ΔV να σχηματίζουν ένα κανονικό N-γωνο.

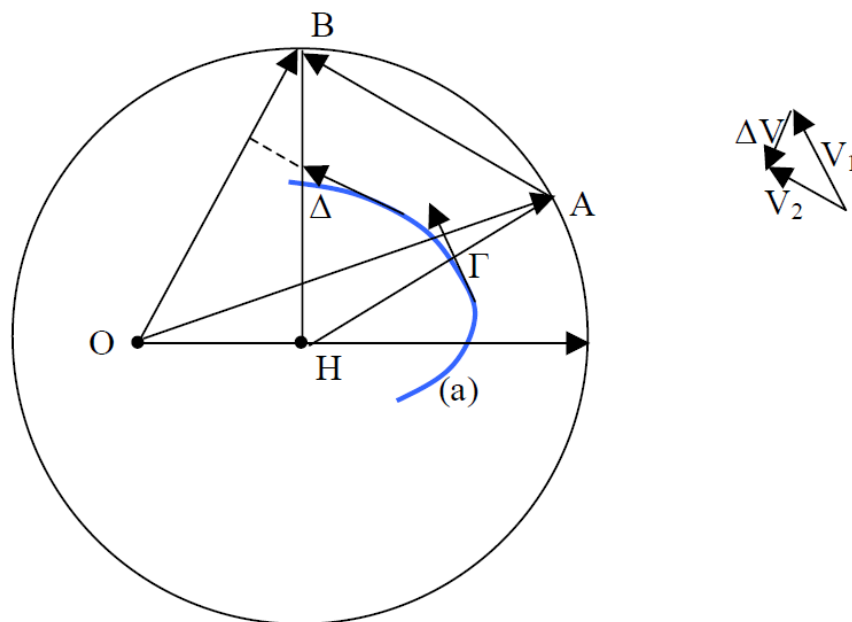
Αν το $N \rightarrow \infty$ το κανονικό πολύγωνο γίνεται κύκλος. Έτσι το διάγραμμα ταχυτήτων θα έχει την εξής μορφή.



Η πραγματική τροχιά του πλανήτη



Το αντίστοιχο διάγραμμα ταχυτήτων



Έστω ότι ο πλανήτης κινείται στη καμπύλη (α). Έστω Γ, Δ δύο θέσεις του πλανήτη. Με κέντρο τον ήλιο χαράσσουμε έναν κύκλο. Προεκτείνουμε τις ΗΓ και ΗΔ οι οποίες τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Από τα σημεία αυτά φέρνουμε ευθείες κάθετες αντίστοιχα στις ταχύτητες V_1 και V_2 . Οι ευθείες αυτές έστω ότι τέμνονται στο σημείο Ο.

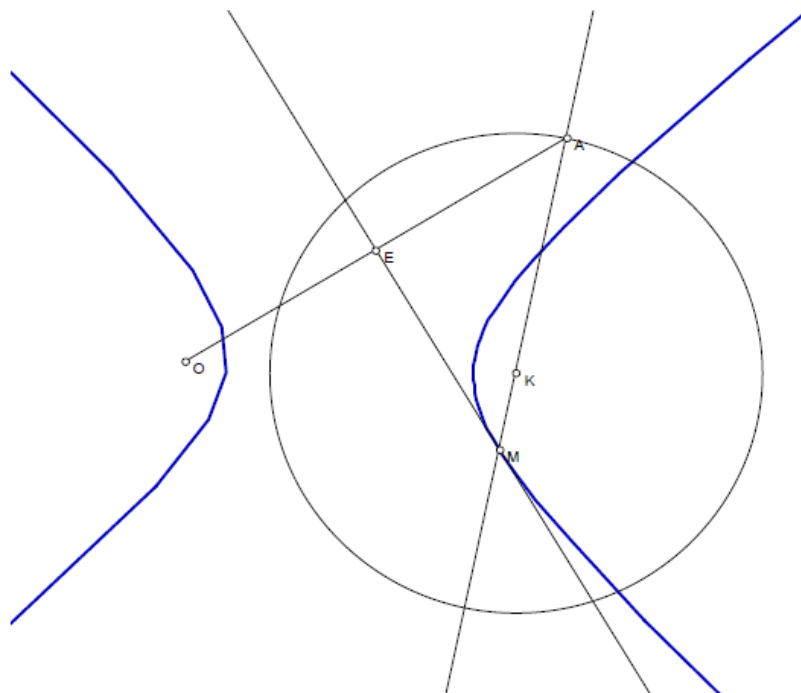
Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι όμοιο με το τρίγωνο των ταχυτήτων V_1 , V_2 και ΔV . Αυτό ισχύει γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανά δύο κάθετες. Πράγματι οι πλευρές OA_1V_1 και $OB1V_2$ λόγω κατασκευής.

Η $AB \perp \Delta V$ αφού η AB λόγω του γεγονότος ότι είναι χορδή του κύκλου είναι κάθετος στην ακτίνα. Από την άλλη η ΔV έχει την διεύθυνση προς τον ήλιο λόγω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta V$

Το σχήμα που προκύπτει δεν είναι τίποτα άλλο από το διάγραμμα ταχυτήτων στραμμένο κατά 90° . Λόγω του γεωμετρικού τόπου που προαναφέραμε στην αρχή, αν η κάθετος στην OA είναι μεσοκάθετος, τότε η τροχιά που διαγράφεται από τον πλανήτη είναι έλλειψη και έτσι αποδείξαμε αυτό που θέλαμε.

Στην περίπτωση που δεν είναι μεσοκάθετος αλλά απλή κάθετος, η καμπύλη που προκύπτει έχει σχέση ομοιότητας ως προς τον Ήλιο, δηλαδή το σημείο H . Έτσι πρόκειται για μια καμπύλη που πολλαπλασιάζεται κατά έναν παράγοντα b ομοιότητας. Λόγω όμως της εξίσωσης (3) με την αλλαγή της σταθεράς b προκύπτει πάλι εξίσωση έλλειψης.

Αν το σημείο O είναι έξω από τον κύκλο, προκύπτει υπερβολή. Πράγματι:

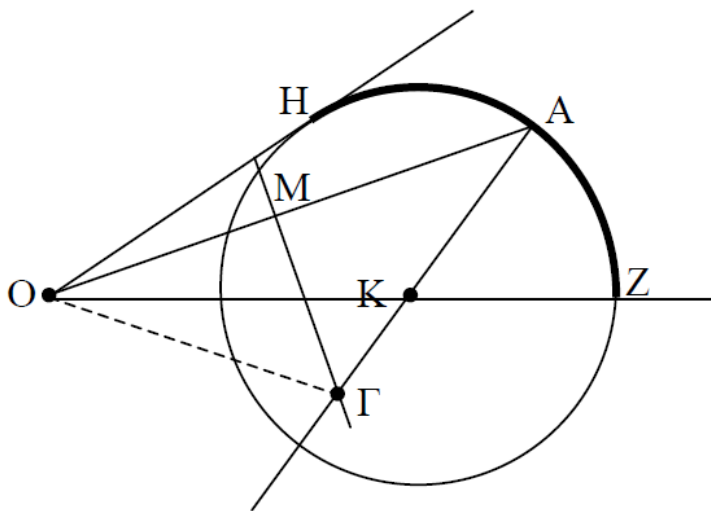


Φέρνουμε την MG μεσοκάθετη στην OA .

$$OG = GA = GK + KA \rightarrow GO - GK = KA \rightarrow r_1 - r_2 = R = \sigma \alpha \theta$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τον γεωμετρικό τόπο μιας υπερβολής.

Παρατήρηση:



Φέρνουμε την ΟΗ
εφαπτομένη στον κύκλο.
Στο σημείο Η, η
ταχύτητα του πλανήτη
που εκφράζεται από το
μήκος τους διανύσματος
ΟΗ έχει ίδια διεύθυνση
με το διάνυσμα ΔV. Άρα
το σημείο Η αντιστοιχεί
στο άπειρο. Έτσι η
τροχιά του πλανήτη
αντιστοιχεί στο τόξο ΖΗ
όπου το μέτρο του
διανύσματος ΟZ

αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ταχύτητα του πλανήτη την οποία έχει όταν βρίσκεται στην κοντινότερη απόσταση από τον ήλιο ενώ το μέτρο του διανύσματος $\vec{OH}$ εκφράζει την ταχύτητα του πλανήτη όταν βρίσκεται στο άπειρο.

Εάν το σημείο O βρίσκεται στην περιφέρεια του κύκλου, με την παρατήρηση που προηγήθηκε συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του πλανήτη στο άπειρο δηλαδή στο σημείο O είναι μηδέν και τότε όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, η τροχιά του πλανήτη είναι παραβολή.

Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Ε καθώς και την ΚΙ // ΟΑ η οποία τέμνει την εφαπτομένη στο Ι. Ψάχνουμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που αφενός μεν βρίσκονται πάνω στην ΚΑ και αφετέρου η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Μ θα πρέπει να είναι κάθετος στην ΚΙ.

Από το Ι φέρνουμε την κάθετο ΙΜ στην εφαπτομένη ΙΕ η οποία τέμνει την ΚΑ στο Μ. Θα αποδείξουμε ότι:

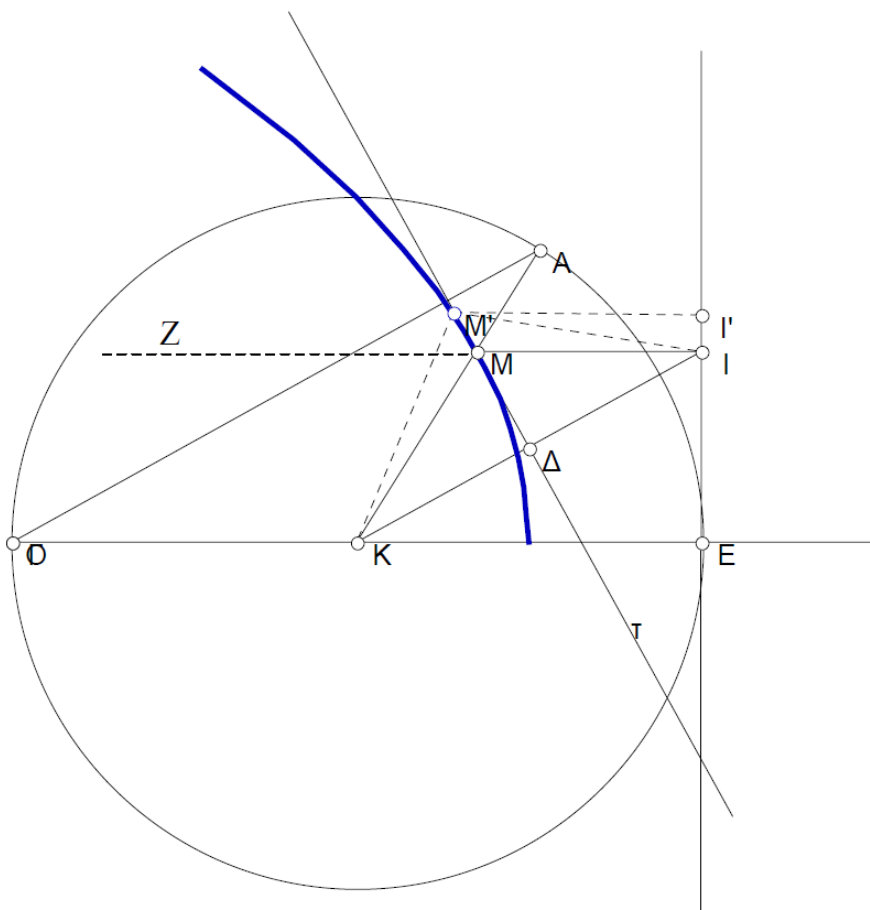
1. $MK = MI$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι πράγματι παραβολή
2. Φέρνω την MD κάθετη στην KI . Θα αποδείξουμε ότι η MD είναι μεσοκάθετος της KI και εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M .

Πράγματι, είναι ίσες οι γωνίες $\text{AOK} = \text{IKE} = \text{KIM}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Ακόμη, $\angle AOK = \angle KE$ ως εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία που βλέπουν στο ίδιο τόξο.

Άρα από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $MKI = MIK$ οπότε $MK = MI$ και το πρώτο μέλος της απόδειξης ολοκληρώθηκε. Η εφαπτομένη στο E λέγεται διευθετούσα ενώ το σημείο K εστία της παραβολής.

Αφού $MK = MI$ και $M\Delta$ κάθετος, άρα $M\Delta$ μεσοκάθετος της KI .



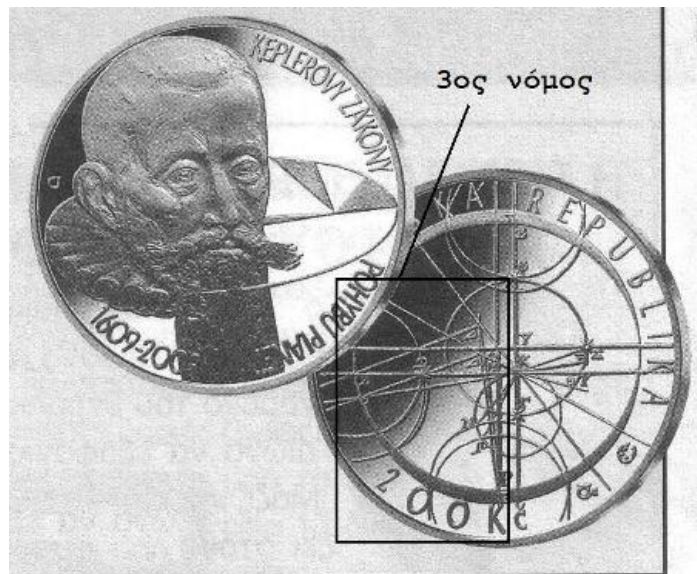
Η ΜΔ είναι και εφαπτομένη στο σημείο Μ. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι η ΜΔ τέμνει την παραβολή και σε ένα άλλο σημείο Μ'. Τότε αφού το Μ' ανήκει στην μεσοκάθετο ΜΔ θα ισχύει Μ'Κ = Μ'Ι. Ακόμη αφού το Μ' ανήκει στην παραβολή θα ισχύει ότι Μ'Κ = Μ'Ι' όπου Μ'Ι' κάθετος στην διευθετούσα. Άρα Μ'Ι' = Μ'Ι, όπερ άτοπο.

Παρατήρηση:

Κάθε φωτεινή ακτίνα που ξεκινάει από το σημείο K και ανακλάται στο παραβολικό κάτοπτρο είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' της παραβολής αφού $M'MZ = ZMK$. Έτσι παραβολικά κάτοπτρα χρησιμοποιούνται στις κεραίες στους φανούς των αυτοκινήτων κτλ.

Έτσι αποδείξαμε το δεύτερο νόμο του Κέπλερ χρησιμοποιώντας τους νόμους του Νεύτωνα.

3.2.4. Ο Τρίτος νόμος Κέπλερ ή Νόμος αστρικών περιφορών.



Ο Κέπλερ στην πραγματικότητα ανακάλυψε τον «τρίτο» Νόμο του πριν από τους άλλους δύο, στις 8 Μαρτίου 1618, αλλά απέρριψε την ιδέα μέχρι τις 15 Μαΐου 1618, οπότε και επαλήθευσε το αποτέλεσμά του, που δημοσιεύθηκε στο *Harmonice Mundi* (1619).

Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν:

Τα τετράγωνα των χρόνων των αστρικών περιφορών των πλανητών είναι ανάλογα των κύβων της μέσης απόστασης αυτών από τον Ήλιο.

Από το νόμο αυτό προκύπτει ότι, αν είναι γνωστός από παρατηρήσεις ο χρόνος που απαιτείται για να συμπληρώσει ένας πλανήτης την περιφορά του γύρω από τον Ήλιο, τότε εύκολα μπορεί να βρεθεί και η μέση απόσταση αυτού από τον Ήλιο.

Ο τρίτος και τελικός νόμος της πλανητικής κίνησής του δίνει την ακριβή σχέση μεταξύ της απόστασης ενός πλανήτη από τον ήλιο και του χρόνου περιστροφής του – το τετράγωνο του ηλιακού έτους είναι ανάλογο του κύβου της μέσης απόστασης του από τον Ήλιο. Ο τρίτος και τελευταίος νόμος του δημοσιεύτηκε το 1619, μέσα στο μυστικιστικό βιβλίο του *De Harmonica Mundi*.

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = K$$

Το τετράγωνο του χρόνου (P) που απαιτείται για να συμπληρώσει ένας πλανήτης μία πλήρη περιφορά γύρω από τον Ήλιο (η περίοδος του πλανήτη) είναι ανάλογο του

κύβου του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής του τροχιάς (R), και η σταθερά της αναλογίας είναι η ίδια για όλους τους πλανήτες.

Αν για το (P) χρησιμοποιήσουμε σαν μονάδα μέτρησης το έτος και για το (R) την αστρονομική μονάδα (AU) δηλαδή την μέση απόσταση Γης - Ήλιου που είναι 149.5

εκατομμύρια χιλιόμετρα, τότε το K παίρνει την αριθμητική τιμή $K = 1 \frac{(\text{έτος})^2}{(AU)^3}$.

Αποδείξη τρίτου νόμου.

Για τον τρίτο νόμο χρησιμοποιούμε τη σχέση που έχουμε αποδείξει.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \cdot V \cdot \eta \mu \phi = \sigma \tau \alpha \theta \quad (8)$$

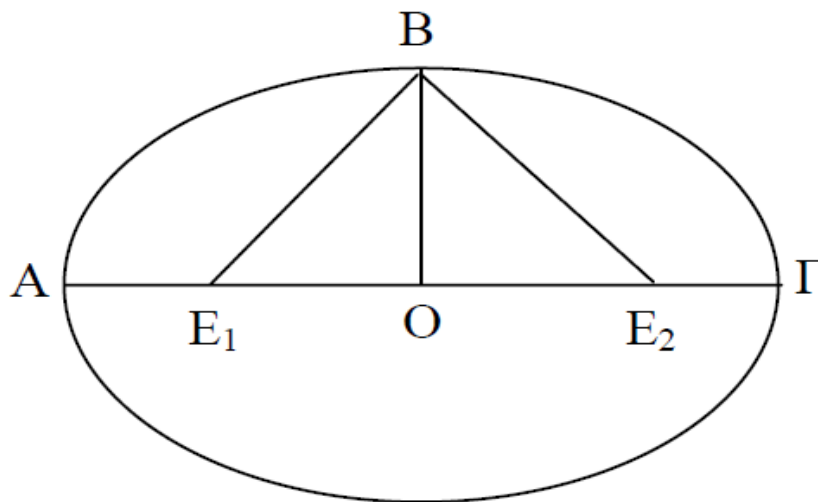
Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για ολόκληρη την περιστροφή ενός πλανήτη έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \cdot V \cdot \eta \mu \phi = \sigma \tau \alpha \theta = \frac{\pi a b}{T} \quad (9)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν της έλλειψης.

Εφαρμόζω τώρα τη σχέση για τις θέσεις (1) και (2) της έλλειψης οπότε έχω:

$$r \cdot V_1 = r_2 \cdot V_2 = \sigma \tau \alpha \theta = \frac{\pi a b}{T} \quad (10)$$



Εφαρμόζουμε ακόμη την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για τις ίδιες θέσεις και έχουμε:

$$\frac{1}{2} m V_1^2 - G \frac{M m}{r_1^2} = \frac{1}{2} m V_2^2 - G \frac{M m}{r_2^2} \quad (11)$$

Λύνουμε το σύστημα των (10),(11) με αγνώστους τα V_1 , V_2 και αντικαθιστούμε στην (9) και έχουμε:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \quad (12)$$

$$OA = a$$

$$OB = b$$

$$E_1A = r_1$$

$$E_2A = r_2$$

Από το σχήμα έχουμε: $OE_1 = OE_2 = OA - AE_1 = a - r_1$ και

$$E_1A + E_1\Gamma = OA + O\Gamma \Rightarrow r_1 + r_2 = 2a$$

Από τον ορισμό της έλλειψης έχουμε:

$$AE_1 + AE_2 = BE_1 + BE_2 \Rightarrow r_1 + a + a - r_1 = 2\sqrt{b^2 + (a - r_1)^2}$$

Άρα

$$2a = 2\sqrt{b^2 + (a - r_1)^2} \Rightarrow b = \sqrt{2ar_1 - r_1^2} \quad (14)$$

αντικαθιστώντας τις σχέσεις (12), (13), (14) στην (10) καταλήγουμε στη σχέση

$$a^3 = \frac{8GM}{\pi^2} T^2 \quad (15)$$

Που δεν είναι τίποτε άλλο από τον τρίτο νόμο του Κέπλερ.

Εφαρμόζοντας αυτούς τους νόμους, ο Κέπλερ υπήρξε ο πρώτος αστρονόμος που προέβλεψε με επιτυχία μία διάβαση της Αφροδίτης (του έτους 1631). Με τη σειρά τους, οι Νόμοι του Κέπλερ υπήρξαν συνήγοροι του ηλιοκεντρικού συστήματος, αφού ήταν τόσο απλοί μόνο με την παραδοχή ότι όλοι οι πλανήτες περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο.

3.2.5. Νόμος της παγκόσμιας έλξης

Ο Ισαάκ Νεύτων (1642-1727) διετύπωσε τον περίφημο Νόμο της παγκόσμιας έλξης.

Σύμφωνα με αυτόν:

Οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ δύο ουρανίων σωμάτων είναι ανάλογες του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της μεταξύ των κέντρων μάζας τους απόστασης.

Ο παραπάνω νόμος εκφράζεται με τη μαθηματική σχέση:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

όπου F είναι η ελκτική δύναμη σε Νιούτον, G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, m_1 και m_2 οι μάζες αδράνειας των δύο σωμάτων σε χιλιόγραμμα, και r η μεταξύ τους απόσταση σε μέτρα.

Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G , έχει συνιστώμενη τιμή βάσει της επιστημονικής επιτροπής CODATA ίση με (σε μονάδες SI):

$$G = 6.67428(67) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$$

με σχετικό σφάλμα 1 προς 10^4 .

Με τον παραπάνω νόμο δόθηκε η φυσική εξήγηση των προηγηθέντων νόμων του Κέπλερ, οι οποίοι με τη σειρά τους προέκυψαν από τις παρατηρήσεις του Τύχο Μπράχε. Όμως προς χάριν του νόμου αυτού ο Νεύτων θεωρήθηκε "πατέρας της ουράνιας μηχανικής".

Οι θεωρίες αυτές διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην επεξήγηση της εξέλιξης του σύμπαντος, και χρησιμοποιήθηκαν για να περιγράψουν το πως:

- Η Γη περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο
- Υπάρχουν οι παλιρροϊκές δυνάμεις που προκαλούν και το φαινόμενο της παλίρροιας.
- Οι γαλαξίες συγκρούονται μεταξύ τους στο σύμπαν.

Η χρήση του νόμου της παγκόσμιας έλξης για την επεξήγηση των κοσμολογικών φαινομένων, αντικαταστάθηκε από αυτή της γενικής θεωρίας της σχετικότητας του Αϊνστάιν το 1915.

Βιβλιογραφία:

1. Αραμπατζής Θ., Γαβρόγλου Κ., Διαλέτης Δ., Χριστιανίδης Γ., Κανδεράκης Ν., Βερνίκος Σ., Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας, Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 1999.
2. David L. Goodstein και Judith R. Goodstein, Η χαμένη διάλεξη του FEYNMAN - Η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, ΚΑΤΟΠΤΡΟ, 1996.
3. Bradley W. Carroll and Dale A. Ostlie, Introduction to Modern Astrophysics, Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

Διαδικτυακές Πηγές:

1. https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CE%B9%CE%BF%CF%87%CE%AC%CE%BD%CE%B5%CF%82_%CE%9A%CE%AD%CF%80%CE%BB%CE%B5%CF%81, Wikipedia.
2. <https://www-spf.gsfc.nasa.gov/stargaze/Kep3laws.htm> , Stern P. D., “Kepler’s Three Laws of Planetary Motion. An overview for Science teachers”, ημερομηνία δημοσίευσης: 21/03/2005.
3. <https://www.pantou.gr/astrol/kepler.htm>
4. <http://users.sch.gr/nikpanous/kepler/kepler.htm>
5. <https://sciencebehind.gr/>