

Κεφάλαιο M13

Παγκόσμια βαρύτητα

Κίνηση των πλανητών

Μέχρι το 1687, είχε συγκεντρωθεί μεγάλος όγκος δεδομένων για την κίνηση των πλανητών.

- Οι δυνάμεις που σχετίζονταν με τις κινήσεις αυτές παρέμεναν ακόμα ασαφείς.
- Ο Ισαάκ Νεύτωνας έδωσε την απάντηση.

Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα

- Ο Νεύτωνας παρατήρησε ότι, εφόσον η Σελήνη δεν κινείται ευθύγραμμα, πρέπει να ασκείται σε αυτήν μια δύναμη.
- Έτσι συμπέρανε ότι αυτή η δύναμη ήταν η βαρυτική έλξη που ασκεί η Γη στη Σελήνη.

Ο Νεύτωνας συνειδητοποίησε ότι αυτή η έλξη ήταν ειδική περίπτωση μιας γενικής, παγκόσμιας έλξης που αναπτύσσεται μεταξύ των σωμάτων.

Παγκόσμια βαρύτητα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε στην περιγραφή της κίνησης των πλανητών.

- Μελετώντας την κίνηση των πλανητών μπορούμε να ελέγξουμε την εγκυρότητα του νόμου του Νεύτωνα.

Οι νόμοι του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών

- Απορρέουν από τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας και από την αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Επίσης, θα συντάξουμε μια γενική σχέση για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος.

- Θα μελετήσουμε την κίνηση των πλανητών και των δορυφόρων από ενεργειακή άποψη.

Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα

Κάθε σωματίδιο που υπάρχει στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο σωματίδιο με δύναμη ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους.

$$F_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Όπου το G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και ισούται με $6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

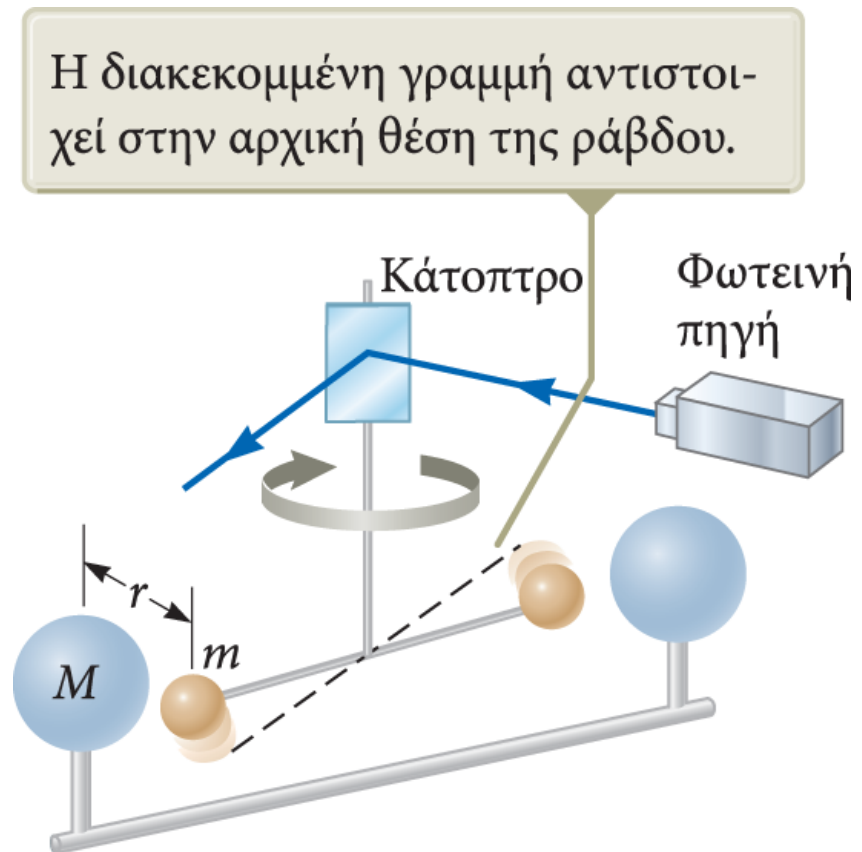
Ο υπολογισμός της σταθεράς G

Το 1789, ο Henry Cavendish μέτρησε την τιμή της σταθεράς G .

Στερέωσε δύο μικρές σφαίρες στα άκρα μιας αβαρούς, οριζόντιας ράβδου.

Κοντά στις μικρές σφαίρες τοποθέτησε δύο σφαίρες μεγάλης μάζας.

Προσδιόρισε τη γωνία στροφής των μικρών σφαιρών μετρώντας την εκτροπή μιας δέσμης φωτός, την οποία ανακλούσε ένας καθρέφτης στερεωμένος στον κατακόρυφο βραχίονα ανάρτησης.



Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας (συνέχεια)

Ο νόμος αναφέρεται συχνά και ως **νόμος του αντίστροφου τετραγώνου**.

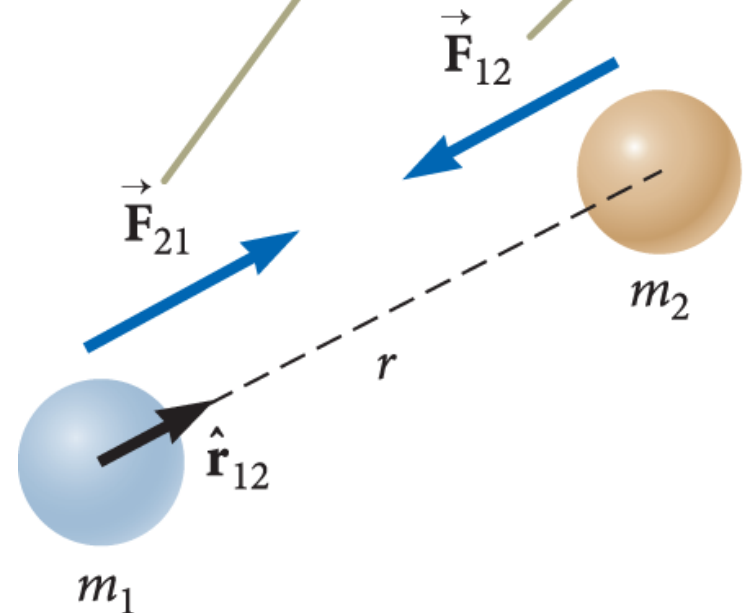
- Το μέτρο της δύναμης είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης που χωρίζει τα σωματίδια.

Ο νόμος μπορεί να εκφραστεί σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

- Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι η δύναμη είναι ελκτική.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.



Συμβολισμοί

$\vec{F}_{12}$: Η δύναμη που ασκεί το σωματίδιο 1 στο σωματίδιο 2.

Το αρνητικό πρόσημο στη διανυσματική μορφή της εξίσωσης υποδεικνύει ότι το σωματίδιο 2 έλκεται από το σωματίδιο 1.

$\vec{F}_{21}$: Η δύναμη που ασκεί το σωματίδιο 2 στο σωματίδιο 1.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Οι δυνάμεις σχηματίζουν ζεύγη δράσης-αντίδρασης, όπως προβλέπει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα.

Περισσότερα για τις δυνάμεις

Η βαρυτική δύναμη είναι μια δύναμη από απόσταση, η οποία αναπτύσσεται πάντοτε μεταξύ δύο σωματιδίων, ανεξάρτητα από το μέσο που βρίσκεται ανάμεσά τους.

Η δύναμη μεταξύ των σωματιδίων μειώνεται ταχύτατα όσο αυξάνεται η μεταξύ τους απόσταση.

- Αυτή είναι μια συνέπεια του νόμου του αντίστροφου τετραγώνου.

Η βαρυτική δύναμη που ασκεί μια κατανομή μάζας

Η βαρυτική δύναμη που ασκεί μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας με πεπερασμένο μέγεθος σε ένα σωματίδιο που δεν ανήκει σε αυτή την κατανομή είναι ίδια με την αντίστοιχη δύναμη που θα προέκυπτε αν ολόκληρη η μάζα ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της κατανομής.

Για παράδειγμα, το μέτρο της δύναμης που ασκεί η Γη σε ένα σωματίδιο μάζας m , το οποίο βρίσκεται κοντά στην επιφάνειά της, είναι

$$F_g = G \frac{M_E m}{R_E^2}$$

G και g

Μην μπερδεύετε τα σύμβολα G και g .

Το G είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας.

- Έχει την ίδια τιμή παντού.

Το g είναι η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

- Στην επιφάνεια της Γης είναι $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.
- Η τιμή του g μεταβάλλεται ανάλογα με τη γεωγραφική θέση.

Υπολογισμός του g από το G

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m , το οποίο βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση κοντά στην επιφάνεια της Γης, είναι ίσο με mg .

Μπορούμε να εξισώσουμε αυτή την ποσότητα με το μέτρο της δύναμης της παγκόσμιας βαρύτητας που δέχεται το σώμα.

$$mg = G \frac{M_E m}{R_E^2} \rightarrow g = G \frac{M_E}{R_E^2}$$

Αν ένα σώμα βρίσκεται σε ύψος h επάνω από την επιφάνεια της Γης, τότε η απόσταση r γίνεται ίση με $R_E + h$.

$$g = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι όσο αυξάνεται το ύψος, το g μειώνεται.

Καθώς $r \rightarrow \infty$, το βάρος του σώματος τείνει στο μηδέν.

Μεταβολή του g με το ύψος

ΠΙΝΑΚΑΣ M13.1

*Τιμές της επιτάχυνσης της
βαρύτητας g σε διάφορα ύψη
επάνω από την επιφάνεια της Γης*

Ύψος h (km)	g (m/s ²)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

Γιοχάνες Κέπλερ

1571–1630

Γερμανός αστρονόμος

Έγινε γνωστός για τους νόμους της κίνησης των πλανητών που διατύπωσε.

- Βασίστηκε στις παρατηρήσεις του Τίχο Μπράχε.



Οι νόμοι του Κέπλερ

Ο πρώτος νόμος του Κέπλερ

- Όλοι οι πλανήτες διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές, η μία εστία των οποίων συμπίπτει με τη θέση του Ήλιου.

Ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ

- Το ακτινικό διάνυσμα (ή επιβατική ακτίνα) που ξεκινά από τον Ήλιο και καταλήγει σε έναν πλανήτη καλύπτει ίσες επιφάνειες σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Ο τρίτος νόμος του Κέπλερ

- Το τετράγωνο της περιόδου της τροχιακής κίνησης κάθε πλανήτη είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του.

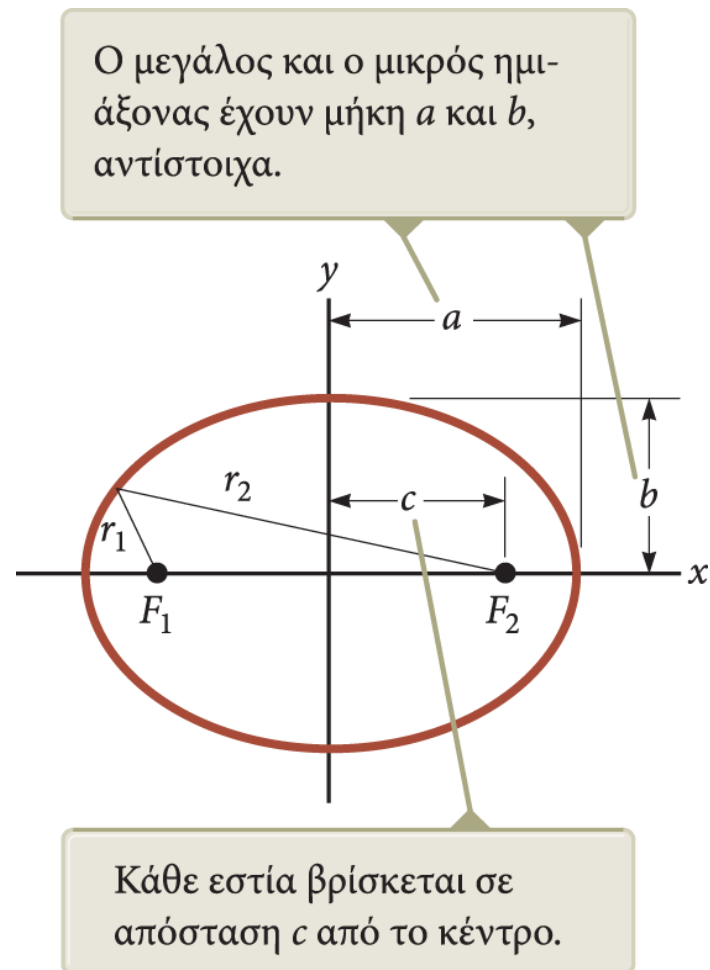
Σημειώσεις για τις ελλείψεις

Τα σημεία F_1 και F_2 ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης.

- Βρίσκονται σε απόσταση c από το κέντρο.
- Το άθροισμα των αποστάσεων r_1 και r_2 έχει σταθερή τιμή.

Η ευθεία που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ σημείων της έλλειψης και διέρχεται από το κέντρο της ονομάζεται **μεγάλος άξονας**.

- Η απόσταση a ονομάζεται **μεγάλος ημιάξονας**.



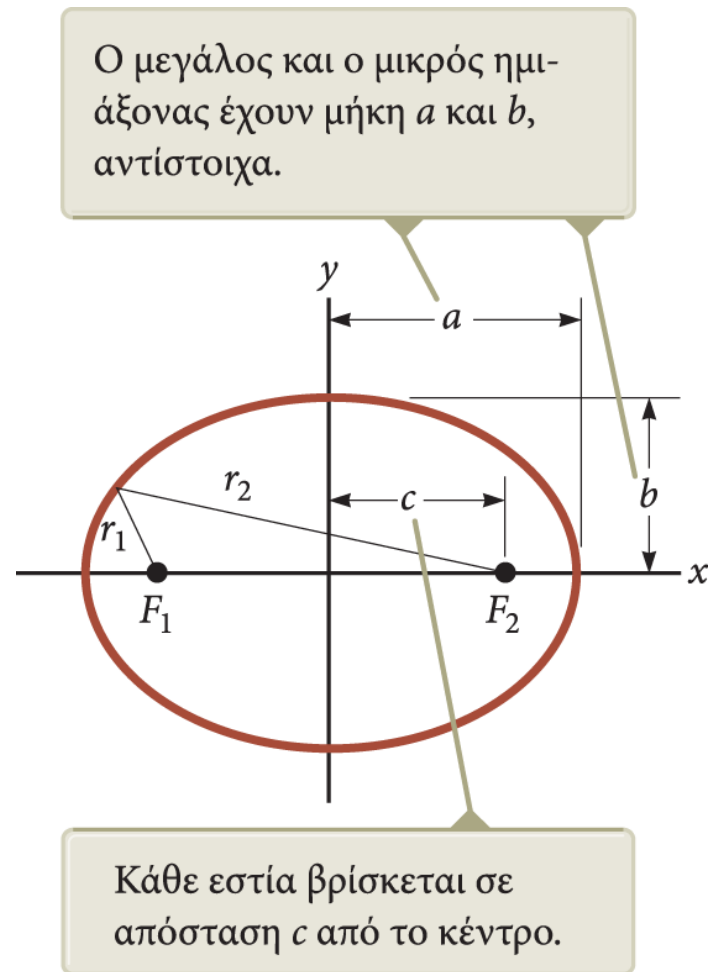
Σημειώσεις για τις ελλείψεις (συνέχεια)

Η ευθεία που αντιστοιχεί στη μικρότερη απόσταση μεταξύ σημείων της έλλειψης και διέρχεται από το κέντρο της ονομάζεται **μικρός άξονας**.

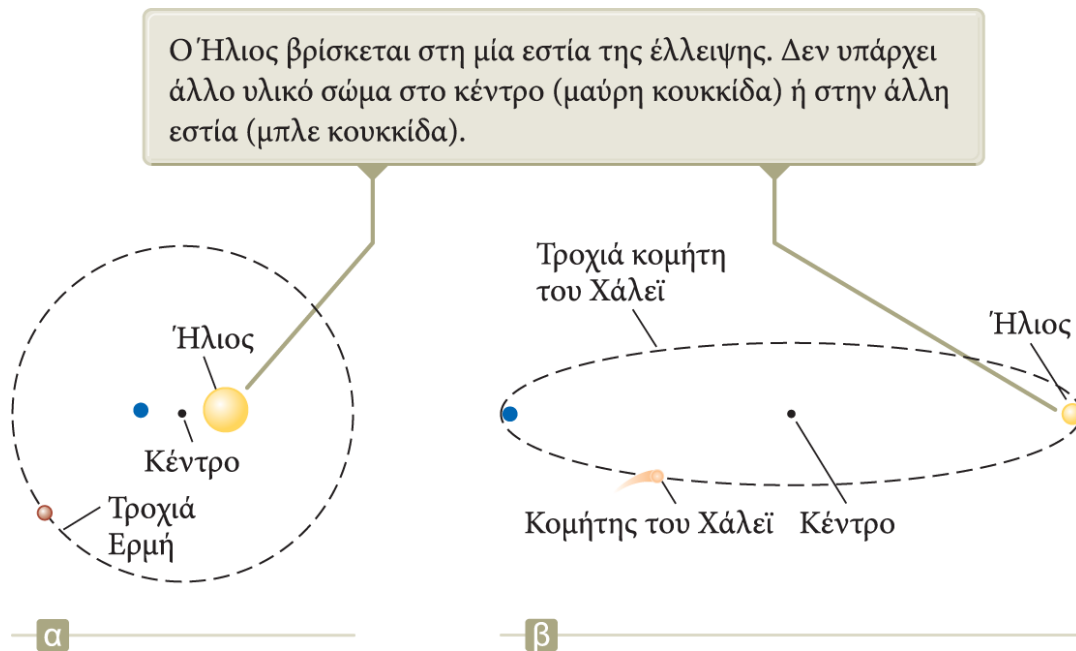
- Η απόσταση b ονομάζεται *μικρός ημιάξονας*.

Η **εκκεντρότητα** της έλλειψης ορίζεται ως $e = c / a$.

- Για τον κύκλο $e = 0$.
- Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης κυμαίνεται μεταξύ $0 < e < 1$.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του e , τόσο μεγαλύτερο μήκος και μικρότερο πλάτος έχουν οι ελλείψεις.



Εκκεντρότητες των πλανητικών τροχιών – Παραδείγματα



Η τροχιά του Ερμή έχει τη μεγαλύτερη εκκεντρότητα από όλους τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος.

Η εκκεντρότητα της τροχιάς που διαγράφει ο κομήτης του Χάλεϊ έχει πολύ μεγαλύτερη τιμή.

- $e = 0.97$

Σημειώσεις για τις ελλείψεις – Πλανητικές τροχιές

Ο Ήλιος βρίσκεται στη μία εστία της έλλειψης.

- Δεν βρίσκεται στο κέντρο της έλλειψης.
- Στην άλλη εστία δεν υπάρχει τίποτα.

Για ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο:

Αφήλιο είναι το σημείο με τη μέγιστη απόσταση από τον Ήλιο.

- Η απόσταση για το αφήλιο είναι $a + c$.
 - Για ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη Γη, το σημείο αυτό ονομάζεται *απόγειο*.

Περιήλιο είναι το σημείο με την ελάχιστη απόσταση από τον Ήλιο.

- Η απόσταση για το περιήλιο είναι $a - c$.
 - Για ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη Γη, το σημείο αυτό ονομάζεται *περίγειο*.

Ο πρώτος νόμος του Κέπλερ

Η κυκλική τροχιά είναι μια ειδική περίπτωση ελλειπτικής τροχιάς.

Η ελλειπτική τροχιά είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η βαρυτική δύναμη ακολουθεί τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.

Οι ελλειπτικές και οι κυκλικές τροχιές είναι επιτρεπτές τροχιές για τα δέσμια σώματα.

- Ένα **δέσμιο** σώμα περιφέρεται σε τροχιά γύρω από το κέντρο της βαρυτικής δύναμης.
- Ένα **ελεύθερο** σώμα ενδέχεται να περάσει κοντά από το κέντρο της βαρυτικής δύναμης μία φορά και να μην επιστρέψει ποτέ.
 - Οι τροχιές αυτών των σωμάτων είναι παραβολές ($e = 1$) ή υπερβολές ($e > 1$).

Ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ

Ο νόμος αυτός είναι συνέπεια της διατήρησης της στροφορμής για ένα απομονωμένο σύστημα.

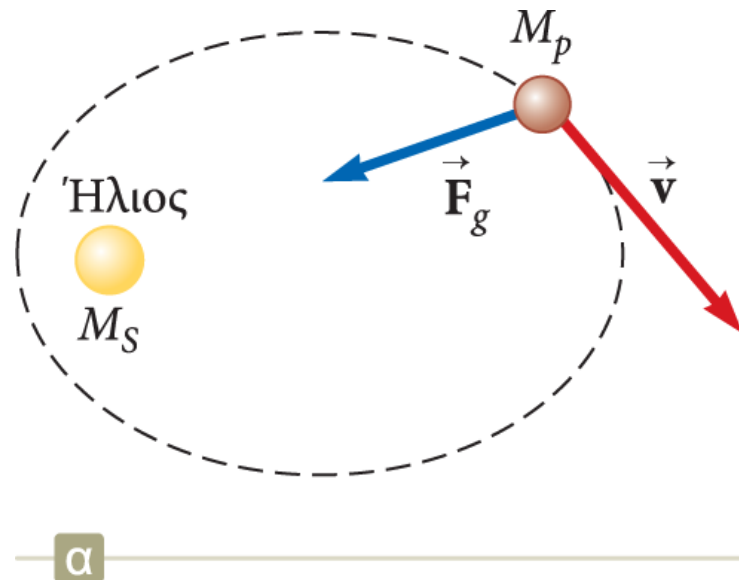
Θεωρούμε τον πλανήτη ως σύστημα.

Μοντελοποιούμε τον Ήλιο ως ένα σώμα αρκετά μεγάλης μάζας συγκριτικά με τον πλανήτη ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ακίνητος.

Ο Ήλιος ασκεί στον πλανήτη μια βαρυτική δύναμη με διεύθυνση την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σωμάτων.

Η δύναμη δεν προκαλεί ροπή, άρα η στροφορμή είναι σταθερή.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p \vec{r} \times \vec{v} = \text{σταθερή}$$



Ο δεύτερος νόμος του Κέπλερ (συνέχεια)

Από γεωμετρικής άποψης, σε χρονικό διάστημα dt , το ακτινικό διάνυσμα $\vec{r}$ καλύπτει επιφάνεια dA , η οποία ισούται με το μισό εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

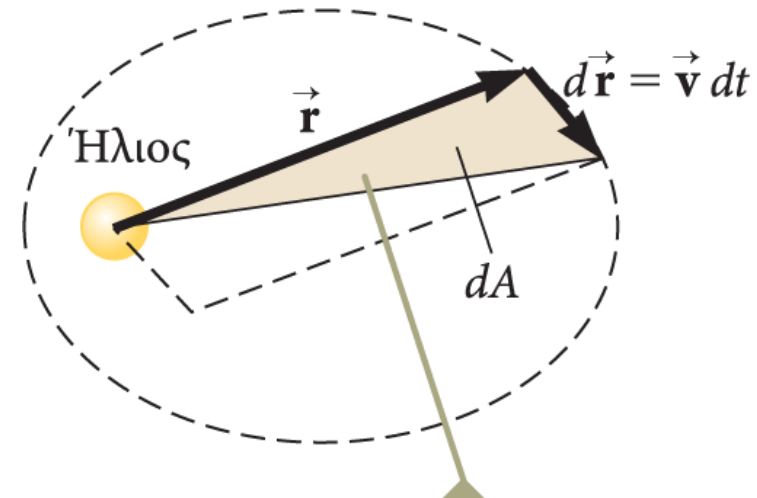
Η μετατόπιση του πλανήτη δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

Άρα

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2M_p} |\vec{r} \times M_p \vec{v}| = \frac{1}{2M_p} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{L}{2M_p} = \text{σταθερό}$$

Το ακτινικό διάνυσμα από τον Ήλιο προς οποιονδήποτε πλανήτη καλύπτει ίσα εμβαδά σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ο νόμος ισχύει για οποιαδήποτε κεντρική δύναμη, είτε ακολουθεί τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου είτε όχι.



Η επιφάνεια που σαρώνει το διάνυσμα $\vec{r}$ σε χρονικό διάστημα dt ισούται με τη μισή επιφάνεια του παραλληλογράμμου.



Ο τρίτος νόμος του Κέπλερ

Ο νόμος αυτός είναι συνέπεια του νόμου του αντίστροφου τετραγώνου.

Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας μια κυκλική τροχιά.

Η βαρυτική δύναμη δημιουργεί κεντρομόλο επιτάχυνση.

Το K_S είναι μια σταθερά

$$F_g = M_p a \rightarrow \frac{GM_{\text{Ηλίου}} M_{\text{πλανήτη}}}{r^2} = M_p \frac{v^2}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{Ηλίου}}} \right) r^3 = K_S r^3$$

Ο τρίτος νόμος του Κέπλερ (συνέχεια)

Η σχέση ισχύει και για ελλειπτικές τροχιές.

Αντικαθιστούμε την απόσταση r με την απόσταση a .

- Υπενθυμίζουμε ότι η απόσταση a είναι ο μεγάλος ημιάξονας.

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{Ηλίου}}} \right) a^3 = K_S a^3$$

Η σταθερά K_S είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του πλανήτη, οπότε ισχύει για όλους τους πλανήτες.

Για ένα σώμα που διαγράφει τροχιά γύρω από κάποιο άλλο σώμα, η τιμή της σταθεράς K εξαρτάται από το σώμα γύρω από το οποίο γίνεται η περιφορά.

Για παράδειγμα, για την περιφορά της Σελήνης γύρω από τη Γη, η σταθερά $K_{\text{Ηλίου}}$ αντικαθίσταται από τη σταθερά $K_{\text{Γης}}$.

Η μάζα του Ήλιου – Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας την απόσταση Γης-Ήλιου, την περίοδο της τροχιάς της Γης, και τον τρίτο νόμο του Κέπλερ μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα του Ήλιου.

$$M_{\text{Ήλιου}} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Παρομοίως, αν υπάρχουν δεδομένα για σώματα που περιφέρονται γύρω από ένα κεντρικό σώμα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα του τελευταίου.

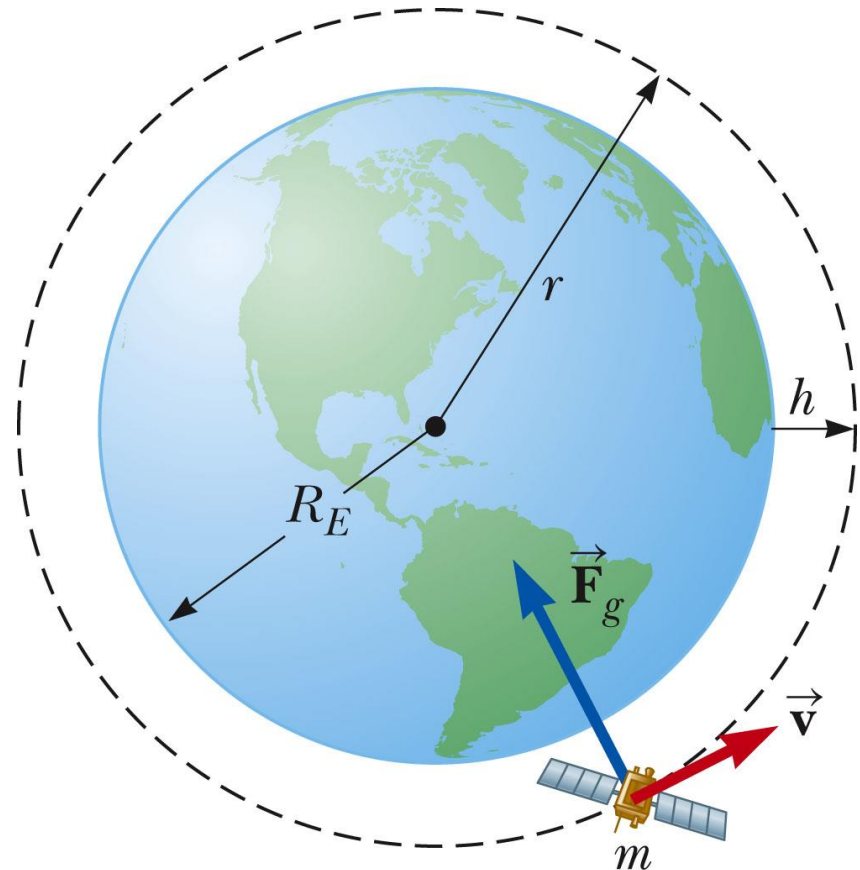
Γεωσύγχρονος δορυφόρος – Παράδειγμα

Οι γεωσύγχρονοι δορυφόροι που βρίσκονται σε κυκλική τροχιά στο επίπεδο του ισημερινού (γεωστατικοί) παραμένουν πάντοτε επάνω από το ίδιο σημείο της Γης.

Η βαρυτική δύναμη δημιουργεί κεντρομόλο επιτάχυνση.

Μοντελοποιούμε τον δορυφόρο ως σωματίδιο υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης και ως σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h ή το μέτρο v της ταχύτητας.



Το βαρυτικό πεδίο

Το **βαρυτικό πεδίο** υπάρχει σε κάθε σημείο του χώρου.

Αν ένα σωματίδιο μάζας m τοποθετηθεί σε ένα σημείο όπου το βαρυτικό πεδίο είναι $\vec{g}$, το σωματίδιο θα δεχτεί μια δύναμη.

Το πεδίο ασκεί στο σωματίδιο δύναμη $\vec{F}_g = m\vec{g}$.

Το βαρυτικό πεδίο (2)

Το βαρυτικό πεδίο σε ένα σημείο ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Το βαρυτικό πεδίο ισούται με το πηλίκο της βαρυτικής δύναμης, την οποία δέχεται ένα *δοκιμαστικό σωματίδιο* που βρίσκεται στο συγκεκριμένο σημείο, προς τη μάζα του σωματιδίου.

Η παρουσία του δοκιμαστικού σωματιδίου δεν είναι αναγκαία για την ύπαρξη του πεδίου.

Το σώμα το οποίο δημιουργεί το πεδίο ονομάζεται *πηγή*.

Μπορούμε να ανιχνεύσουμε την παρουσία του πεδίου και να μετρήσουμε την ισχύ του τοποθετώντας ένα δοκιμαστικό σωματίδιο μέσα στο πεδίο και καταγράφοντας τη δύναμη που δέχεται.

Το βαρυτικό πεδίο (3)

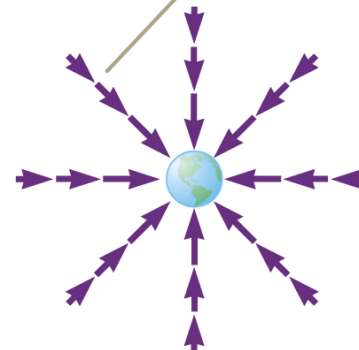
Η κατεύθυνση των διανυσμάτων του βαρυτικού πεδίου είναι ίδια με αυτή της επιτάχυνσης που θα είχε ένα σωματίδιο αν βρισκόταν μέσα στο πεδίο. Το μέτρο του διανύσματος του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο συγκεκριμένο σημείο.

Το μέτρο του διανύσματος του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο ισούται με το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο συγκεκριμένο σημείο.

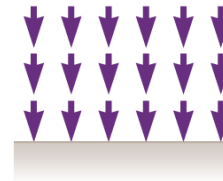
Στην εικόνα (β) φαίνονται τα διανύσματα του βαρυτικού πεδίου σε μια μικρή περιοχή κοντά στην επιφάνεια της Γης.

- Όλα τα διανύσματα έχουν ίδιο μέτρο και κατεύθυνση.

Η κατεύθυνση των διανυσμάτων του πεδίου είναι ίδια με την κατεύθυνση της επιτάχυνσης που θα είχε ένα σωματίδιο αν βρισκόταν μέσα στο πεδίο. Το μέτρο του διανύσματος του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο συγκεκριμένο σημείο.



α



β

Το βαρυτικό πεδίο (τελική διαφάνεια)

Το βαρυτικό πεδίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο «επηρεάζει» οποιοδήποτε σώμα τον κενό χώρο που το περιβάλλει συναρτήσει της δύναμης που θα δεχόταν ένα άλλο σώμα που θα βρισκόταν μέσα στον χώρο αυτό.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Κοντά στην επιφάνεια της Γης, η συνάρτηση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας για ένα σύστημα σωματιδίου-Γης είναι $U = mgy$.

- Αυτό ισχύει μόνο όταν το σωματίδιο βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, όπου η βαρυτική δύναμη είναι σταθερή.

Η βαρυτική δύναμη είναι συντηρητική.

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ενός συστήματος λόγω μιας συγκεκριμένης μετατόπισης ενός στοιχείου του συστήματος ορίζεται ως το αντίθετο του εσωτερικού έργου που παράγει η βαρυτική δύναμη στο στοιχείο αυτό κατά τη διάρκεια της μετατόπισης.

$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια (συνέχεια)

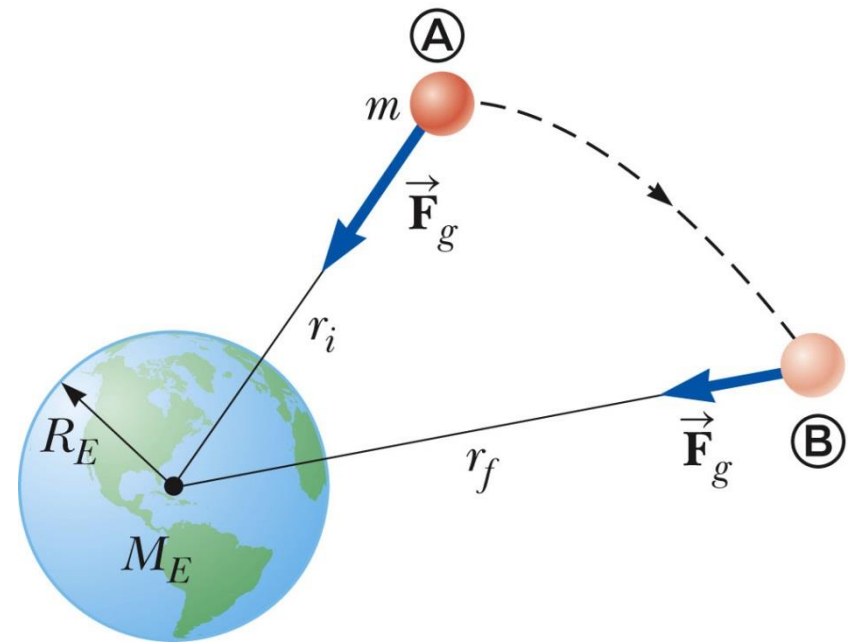
Κατά τη μετατόπιση του σωματιδίου από το A στο B , η βαρυτική δυναμική ενέργειά του μεταβάλλεται κατά ΔU .

Επιλέγουμε ως θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη θέση όπου η δύναμη της βαρύτητας είναι μηδενική.

- Αυτό σημαίνει ότι $U_i = 0$ όπου $r_i = \infty$

$$U(r) = -\frac{GM_E m}{r}$$

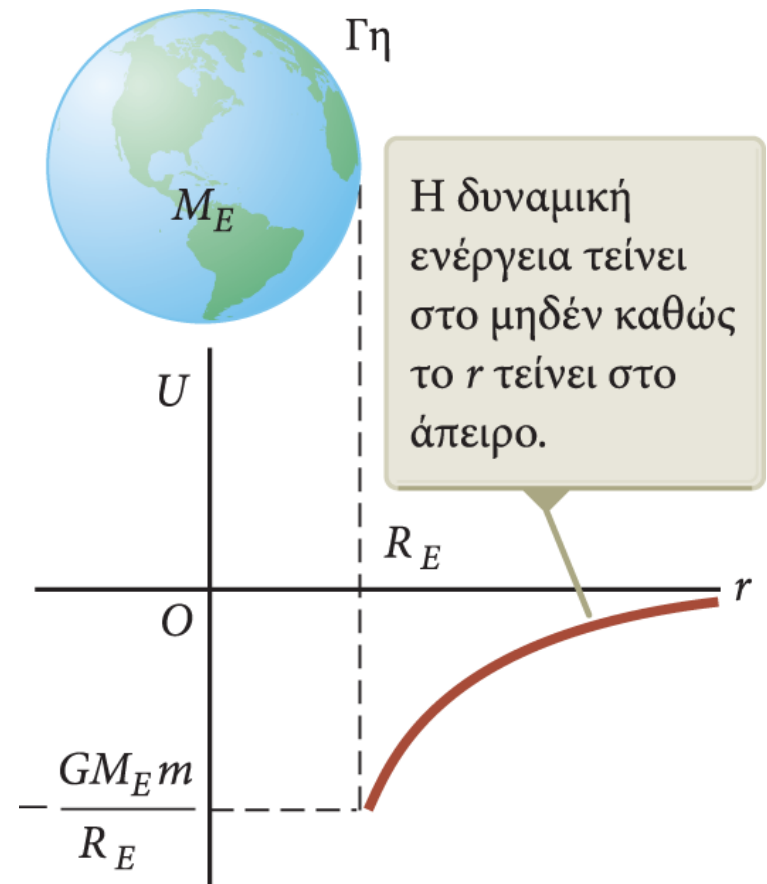
- Η σχέση ισχύει μόνο για $r \geq R_E$ και όχι για $r < R_E$.
- Λόγω της επιλογής του U_i , η συνάρτηση U είναι αρνητική.



Βαρυτική δυναμική ενέργεια για την Γη (συνέχεια)

Το γράφημα βαρυτικής δυναμικής ενέργειας U ως προς την απόσταση r για ένα σώμα το οποίο βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Καθώς το r τείνει στο άπειρο, η δυναμική ενέργεια τείνει στο μηδέν.



Βαρυτική δυναμική ενέργεια, γενικά

Για δύο οποιαδήποτε σωματίδια, η συνάρτηση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας γίνεται

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σωματιδίων είναι ανάλογη του $1/r$.

- Θυμηθείτε ότι η δύναμη είναι ανάλογη του $1/r^2$.

Η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική επειδή η δύναμη είναι ελκτική και επειδή έχουμε ορίσει ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι άπειρη.

Κάποιος εξωτερικός παράγοντας πρέπει να παραγάγει θετικό έργο για να αυξήσει την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων.

- Το έργο που παράγει αυτός ο εξωτερικός παράγοντας αυξάνει τη δυναμική ενέργεια καθώς τα δύο σωματίδια απομακρύνονται το ένα από το άλλο.
 - Οι τιμές της συνάρτησης U αυξάνονται.

Ενέργεια σύνδεσης

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας είναι η **ενέργεια σύνδεσης**.

Αν ο εξωτερικός παράγοντας παρέχει ενέργεια μεγαλύτερη από την ενέργεια σύνδεσης, τότε η πλεονάζουσα ενέργεια εκδηλώνεται ως κινητική ενέργεια των σωματιδίων όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι άπειρη.

Συστήματα τριών ή περισσότερων σωματιδίων

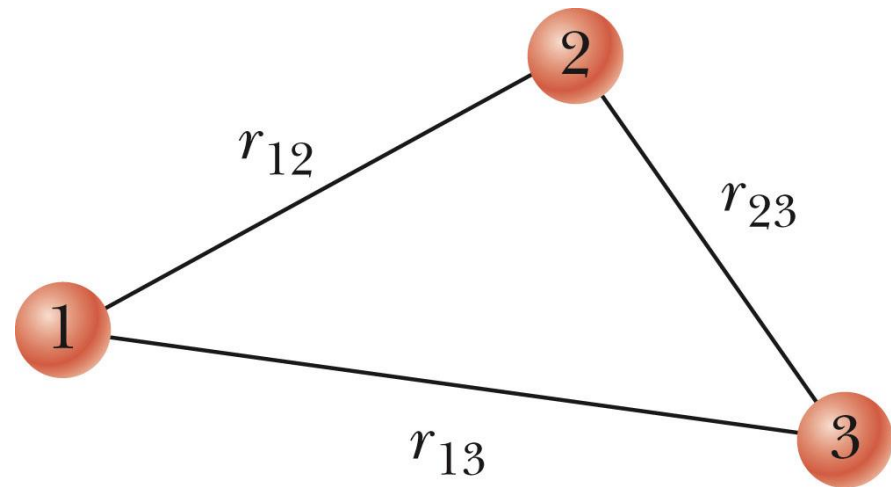
Η συνολική βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με το άθροισμα των ενεργειών όλων των ζευγών σωματιδίων.

Κάθε ζεύγος αντιστοιχεί σε έναν όρο της συνάρτησης U .

Για τρία σωματίδια:

$$U_{\text{συν.}} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$
$$= -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right)$$

Η απόλυτη τιμή της $U_{\text{συν.}}$ είναι το έργο που απαιτείται για να βρεθούν τα σωματίδια σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους.



Ενέργεια και κίνηση δορυφόρων

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα μέτρου v κοντά σε ένα πολύ μεγάλο σώμα μάζας M .

- $M \gg m$

Ας υποθέσουμε ότι το σώμα μάζας M είναι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Η συνολική ενέργεια του συστήματος ισούται με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειάς του.

Συνολική ενέργεια συστήματος $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

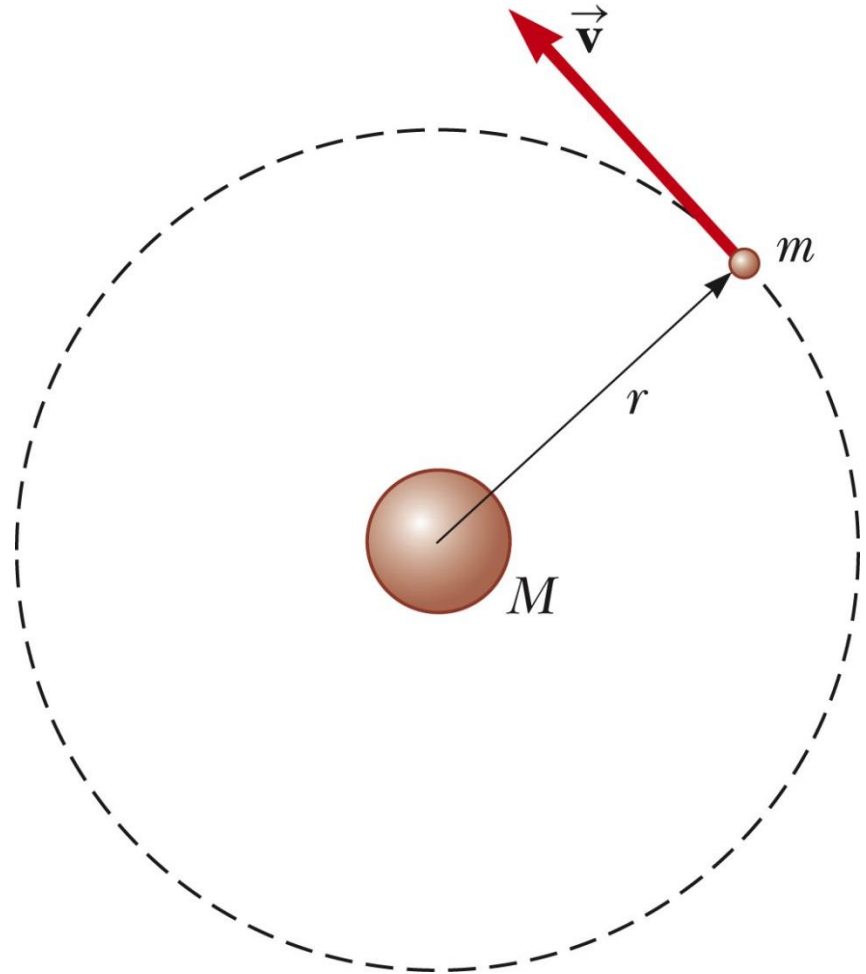
Σε ένα δέσμιο σύστημα, η ενέργεια E είναι υποχρεωτικά μικρότερη από 0.

Ενέργεια σε κυκλική τροχιά

Ένα σώμα μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από ένα σώμα μάζας M .

Η βαρυτική δύναμη δημιουργεί κεντρομόλο επιτάχυνση.

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$



Ενέργεια σε κυκλική τροχιά (συνέχεια)

Όταν η τροχιά είναι κυκλική, η συνολική μηχανική ενέργεια είναι αρνητική.

Η κινητική ενέργεια είναι θετική και ίση με το μισό της απόλυτης τιμής της δυναμικής ενέργειας.

Η απόλυτη τιμή της ενέργειας E ισούται με την ενέργεια σύνδεσης του συστήματος.

Ενέργεια σε ελλειπτική τροχιά

Στις ελλειπτικές τροχιές, η ακτίνα αντικαθίσταται από τον μεγάλο ημιάξονα.

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι αρνητική.

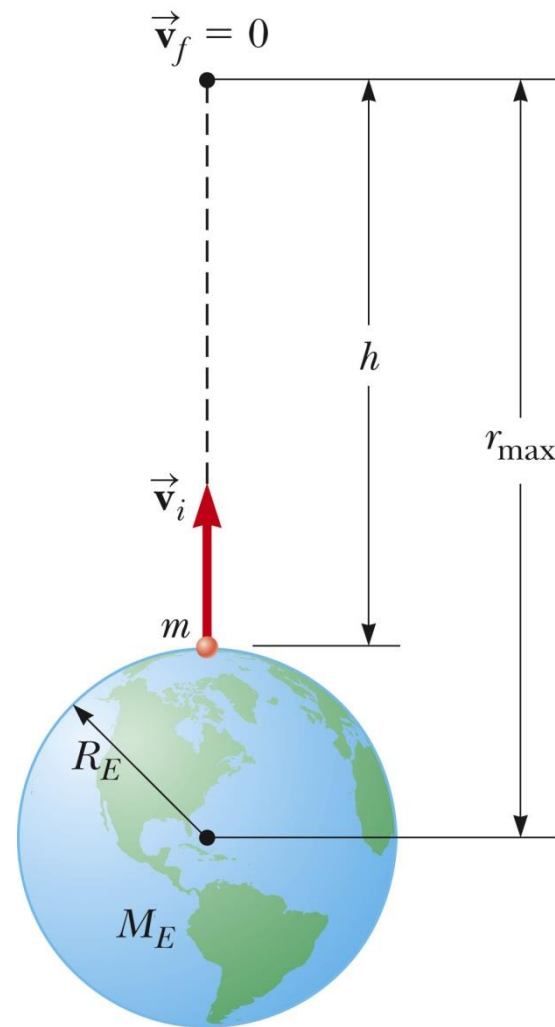
Αν το σύστημα είναι κλειστό (απομονωμένο), η συνολική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Η συνολική ενέργεια και η συνολική στροφορμή ενός συστήματος δύο βαρυτικά δέσμιων σωμάτων αποτελούν σταθερές της κίνησης.

Ταχύτητα διαφυγής από τη Γη

Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα μέτρου v_i .

Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, μπορούμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας που θα επιτρέψει στο σώμα να απομακρυνθεί από τη Γη και να βρεθεί σε άπειρη απόσταση από αυτήν.



Ταχύτητα διαφυγής από τη Γη (συνέχεια)

Αυτή η ελάχιστη ταχύτητα ονομάζεται **ταχύτητα διαφυγής**.

$$v_{\text{διαφ.}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

Σημειώστε η ταχύτητα διαφυγής $v_{\text{διαφ.}}$ δεν εξαρτάται από τη μάζα του σώματος.

Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση της ταχύτητας, ενώ δεν λαμβάνεται υπόψη ούτε η αντίσταση του αέρα.

Ταχύτητα διαφυγής, γενικά

Η σχέση ισχύει για οποιονδήποτε πλανήτη.

$$v_{\text{διαφ.}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Στον πίνακα μπορείτε να δείτε τις ταχύτητες διαφυγής από διάφορα ουράνια σώματα.

ΠΙΝΑΚΑΣ M13.3

Ταχύτητα διαφυγής από τις επιφάνειες των πλανητών, της Σελήνης, και του Ήλιου

Πλανήτης	$v_{\text{διαφ.}}$ (km/s)
Ερμής	4.3
Αφροδίτη	10.3
Γη	11.2
Άρης	5.0
Δίας	60
Κρόνος	36
Ουρανός	22
Ποσειδώνας	24
Σελήνη	2.3
Ήλιος	618

Ταχύτητα διαφυγής, συνέπειες

Η πλήρης διαφυγή από τη βαρυτική επίδραση ενός σώματος είναι αδύνατη.

- Το βαρυτικό πεδίο εκτείνεται στο άπειρο. Όσο μακριά και αν βρίσκεστε, θα δέχεστε πάντα σε κάποιο βαθμό τη βαρυτική δύναμη.

Αυτό εξηγεί γιατί κάποιοι πλανήτες έχουν ατμόσφαιρα και άλλοι όχι.

- Τα πιο ελαφριά μόρια έχουν μεγαλύτερη μέση ταχύτητα από τα πιο βαριά μόρια και άρα μεγαλύτερη πιθανότητα να αποκτήσουν την ταχύτητα διαφυγής.

Μελανές οπές

Οι μελανές οπές είναι απομεινάρια αστεριών που έχουν καταρρεύσει κάτω από την επίδραση της δικής τους βαρυτικής δύναμης.

- Για να μετατραπεί ένας αστέρας σε μελανή οπή, ο πυρήνας του πρέπει να έχει μάζα μεγαλύτερη από τρεις περίπου φορές τη μάζα του Ήλιου.

Η ταχύτητα διαφυγής από τη μελανή οπή είναι πολύ μεγάλη επειδή μια μεγάλη ποσότητα μάζας είναι συγκεντρωμένη σε μια σφαίρα πολύ μικρής ακτίνας.

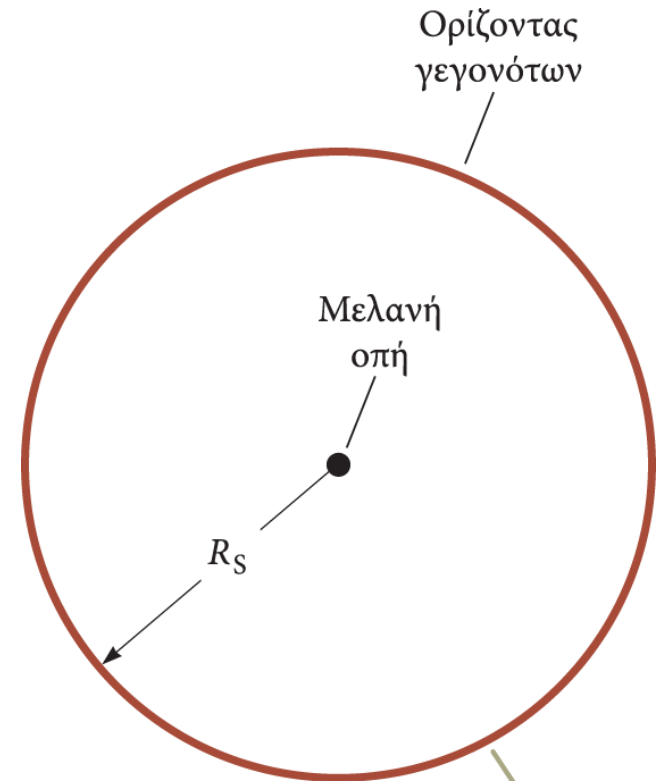
- Αν η ταχύτητα διαφυγής ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός c , τότε η ακτινοβολία από το σώμα δεν μπορεί να διαφύγει και το σώμα φαίνεται να έχει μαύρο χρώμα.

Μελανές οπές (συνέχεια)

Η κρίσιμη ακτίνα για την οποία η ταχύτητα διαφυγής είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός c ονομάζεται **ακτίνα Schwarzschild** (R_S).

Η υποθετική επιφάνεια της σφαίρας που έχει αυτή την ακτίνα ονομάζεται **ορίζοντας γεγονότων**.

- Είναι το όριο μέχρι το οποίο μπορεί ένα σώμα να πλησιάσει τη μελανή οπή και να έχει ακόμα τη δυνατότητα να διαφύγει.



Οι εξωτερικοί παρατηρητές δεν μπορούν να δουν τι συμβαίνει μέσα στον ορίζοντα γεγονότων.

Μελανές οπές και γαλαξίες

Υπάρχουν ενδείξεις ότι στα κέντρα των γαλαξιών υπάρχουν τεράστιες μελανές οπές.

Οι μάζες τους είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτήν του Ήλιου.

Για παράδειγμα, υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι στο κέντρο του γαλαξία μας υπάρχει μια τεράστια μελανή οπή με μάζα ίση με 2-3 εκατομμύρια φορές τη μάζα του Ήλιου.

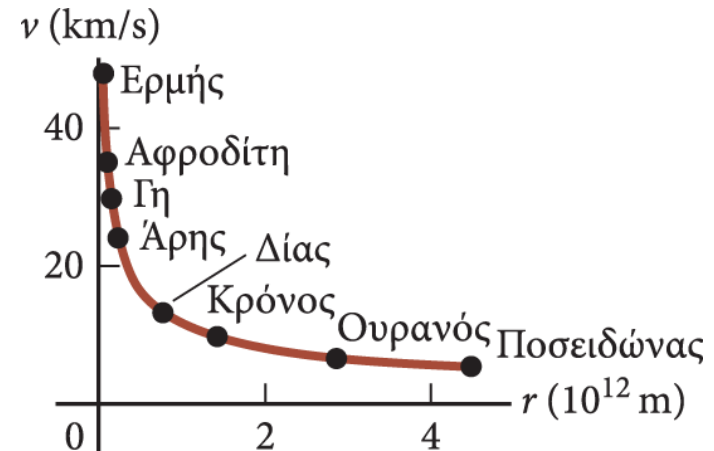
Σκοτεινή ύλη

Το μέτρο της ταχύτητας ενός σώματος που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη μειώνεται καθώς το σώμα απομακρύνεται από τη Γη.

Το ίδιο ισχύει για τους πλανήτες που βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο.

Η καφέ καμπύλη απεικονίζει τη θεωρητική πρόβλεψη του μέτρου της ταχύτητας ενός πλανήτη, συναρτήσει της απόστασής του από τον Ήλιο.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



Σκοτεινή ύλη (συνέχεια)

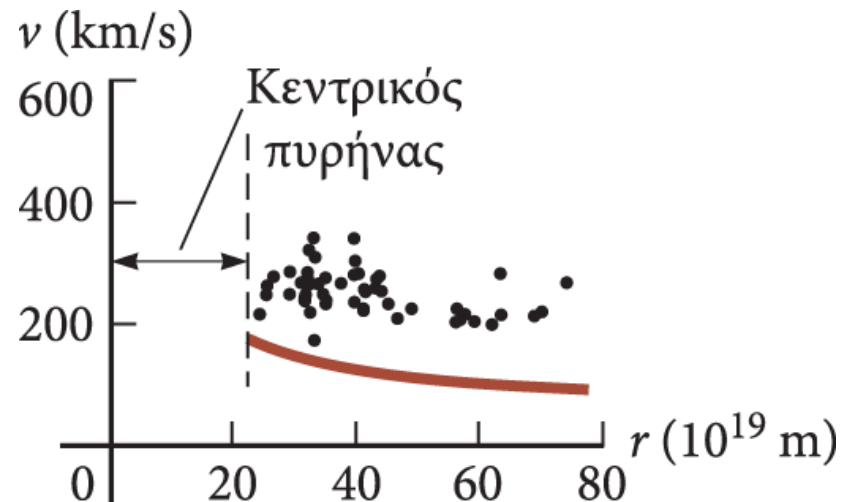
Είναι λογικό να αναμένουμε παρόμοια συμπεριφορά και από τους γαλαξίες.

- Σύμφωνα με τη θεωρία, η ταχύτητα ενός σώματος που βρίσκεται στο εξωτερικό τμήμα ενός γαλαξία πρέπει να είναι μικρότερη από αυτή των σωμάτων που βρίσκονται πιο κοντά στο κέντρο του γαλαξία.

Ωστόσο, οι παρατηρήσεις δεν επιβεβαιώνουν κάτι τέτοιο. Η καφέ καμπύλη δείχνει τις θεωρητικές τιμές της ταχύτητας.

- Η πρόβλεψη αφορά κυκλικές τροχιές γύρω από τη μάζα που είναι συγκεντρωμένη στον κεντρικό πυρήνα.

Οι κουκκίδες είναι οι πραγματικές τιμές.



Σκοτεινή ύλη (τελική διαφάνεια)

Αυτό το αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι πρέπει να υπάρχει επιπλέον μάζα ευρύτερα κατανεμημένη.

Οι επιστήμονες απέδωσαν την ταχύτερη περιστροφή των σωμάτων στην ύπαρξη της **σκοτεινής ύλης**.

Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η σκοτεινή ύλη βρίσκεται κατανεμημένη σε μια μεγάλη σφαιρική άλω περιμετρικά κάθε γαλαξία.

Επειδή η περιοχή αυτή δεν είναι φωτεινή, πρέπει να είναι είτε πολύ κρύα είτε ηλεκτρικά ουδέτερη.

- Άρα, δεν μπορούμε να «δούμε» τη σκοτεινή ύλη, παρά μόνο να αντιληφθούμε την ύπαρξή της μέσω των βαρυτικών επιδράσεών της.

Την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης υποδηλώνουν και προγενέστερες παρατηρήσεις που έγιναν για σμήνη γαλαξιών.

- Οι ταχύτητες τροχιακής κίνησης των γαλαξιών ενός σμήνους είναι επίσης πολύ μεγάλες για να προκαλούνται μόνο από τη φωτεινή ύλη του σμήνους.

Σύνθεση της σκοτεινής ύλης

Υπάρχουν διάφορες θεωρίες οι οποίες επιχειρούν να δώσουν απαντήσεις σχετικά με τη φύση της σκοτεινής ύλης.

Μία από αυτές τις θεωρίες είναι η WIMP (Weakly Interacting Massive Particles)

- Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η σκοτεινή ύλη αποτελείται από σωματίδια ύλης που αλληλεπιδρούν μέσω της ασθενούς πυρηνικής δύναμης και της βαρυτικής δύναμης.
- Σύμφωνα με την ίδια θεωρία, κάθε στιγμή διέρχονται περίπου 200 τέτοια σωματίδια από το ανθρώπινο σώμα.
- Ο Μεγάλος Επιταχυντής Αδρονίων (LHC) είναι ο πρώτος επιταχυντής σωματιδίων που διαθέτει αρκετή ενέργεια για να παραγάγει και να ανιχνεύσει την ύπαρξη τέτοιων σωματιδίων.