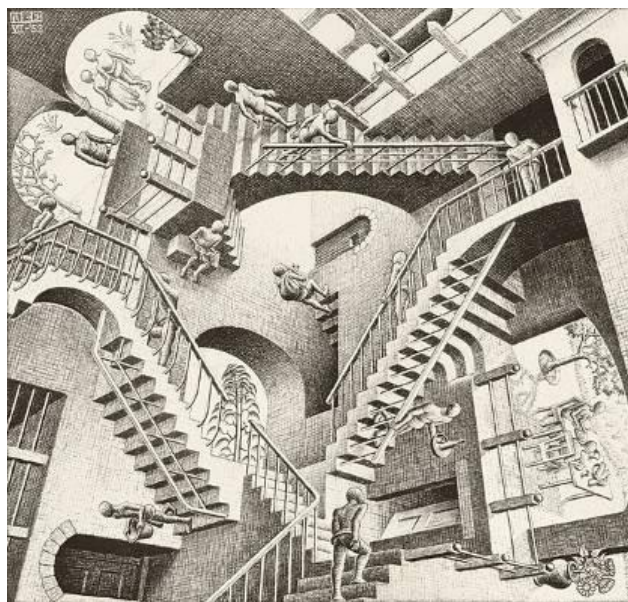




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



## *Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις*



## Ταλαντώσεις με απόσβεση

Η ύπαρξη δυνάμεων που αντιστέκονται στις ταλαντωτικές κινήσεις, όπως π.χ. οι δυνάμεις τριβής, έχουν ως αποτέλεσμα την απώλεια ενέργειας από το σύστημα και κατά συνέπεια τη μείωση του πλάτους των εκτελούμενων ταλαντώσεων, μέχρις ότου οι ταλαντώσεις να σταματούν. Οι ταλαντώσεις αυτές ονομάζονται **φθίνουσες ταλαντώσεις**.

Στη περίπτωση αυτή, η εξίσωση κίνησης περιγράφεται από μια **γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως** με σταθερούς συντελεστές της γενικής μορφής:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1)$$

όπου  $m$  είναι η μάζα του σώματος,  $r$  είναι ο συντελεστής τριβής ή απόσβεσης και  $k$  ο συντελεστής «δυσκαμψίας» του ελατηρίου.

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής:  $x = Ce^{\alpha t}$  (2)

Παραγωγίζουμε την (2):

$dx/dt = \alpha Ce^{\alpha t}$ ,  $d^2x/dt^2 = \alpha^2 Ce^{\alpha t}$  και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$Ce^{\alpha t} (m\alpha^2 + r\alpha + k) = 0 \quad (3)$$

Λύσεις της εξίσωσης (3):  $\begin{cases} Ce^{\alpha t} = 0 & (\text{τετριμμένη λύση, ισχύει αν } C=0) \\ (m\alpha^2 + r\alpha + k) = 0 & (\text{τριώνυμο β' βαθμού}) \end{cases}$

## 📊 Ταλαντώσεις με απόσβεση (συνέχεια)

Το τριώνυμο  $(m\alpha^2 + r\alpha + s) = 0$  έχει λύσεις της μορφής:

$$\alpha = \frac{-r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (4)$$

Άρα η μετατόπιση  $x$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$x = C_1 e^{\frac{-rt}{2m} + \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} t} + C_2 e^{\frac{-rt}{2m} - \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} t}$$

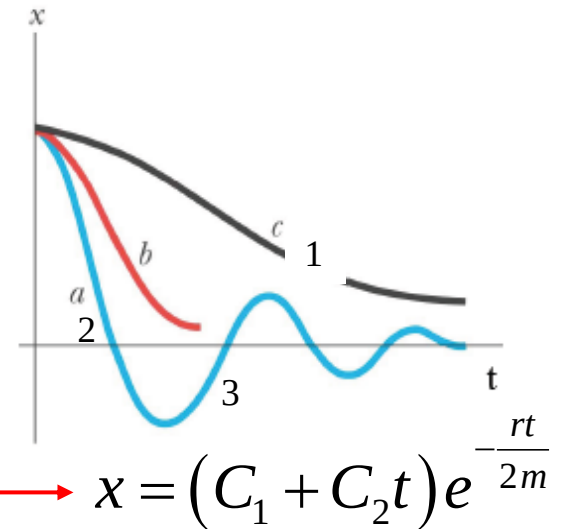
Διερευνούμε το πρόσημο της διακρίνουσας (υπόριζος ποσότητα) στη σχέση (4):

$$1). \quad \frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0 \implies \text{υπεραπόσβεση}$$

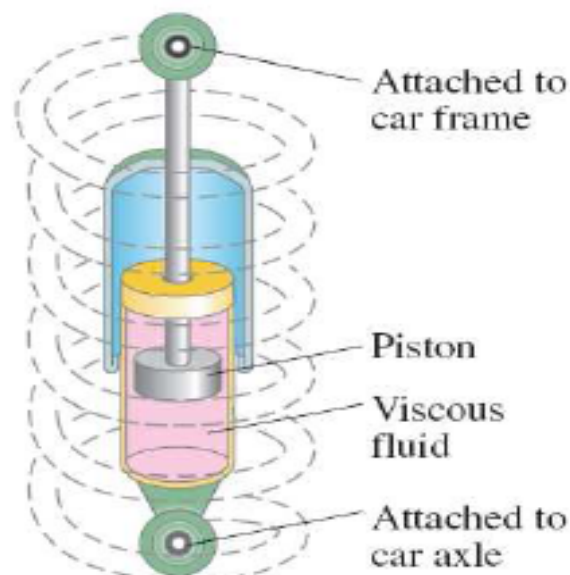
$$2). \quad \boxed{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0} \implies \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}} \quad \text{αρμονική ταλάντωση}$$

$$3). \quad \frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0 \implies r^2 = 4km = 4m^2\omega_0^2 \quad \text{με ασθενή απόσβεση}$$

κρίσιμη απόσβεση



## 14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης



Υπάρχουν συστήματα όπου ο εφησυχασμός είναι ανεπιθύμητος, π.χ. τα ρολόγια.

Σε άλλες περιπτώσεις όπως τα αμορτισέρ του αυτοκινήτου, ή αντισεισμική θωράκιση κτιρίων ο εφησυχασμός είναι μέρος του σχεδιασμού.

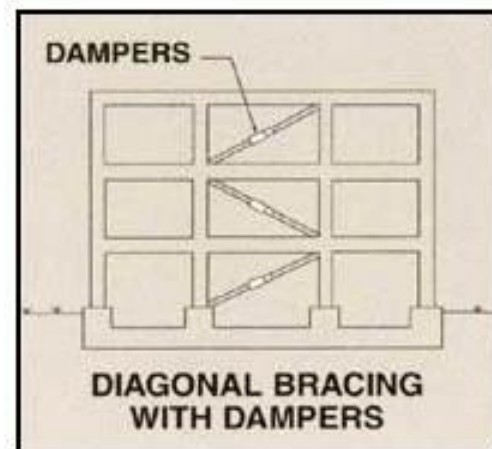
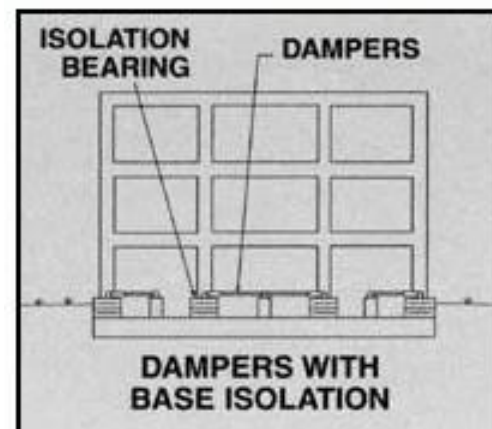
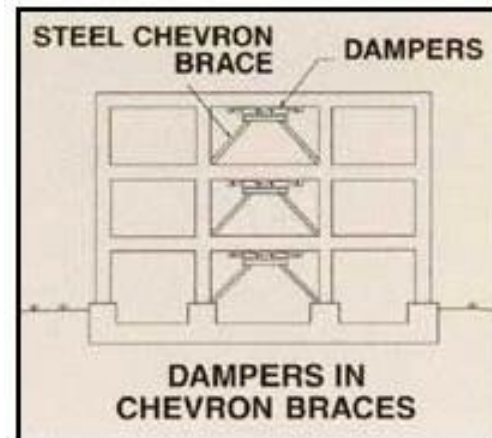
# ■ Ταλαντώσεις με απόσβεση - συστήματα απόσβεσης

## Resonance Dampers



Αποσβεστήρες σε αυτοκίνητα (Car dampers)

Αποσβεστήρες σε κτίρια (Building Dampers)

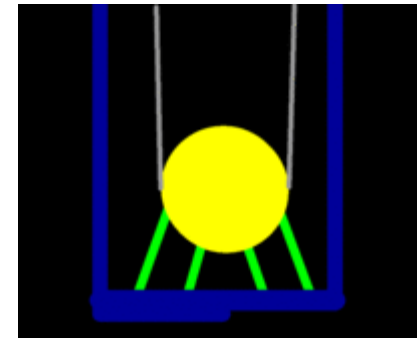




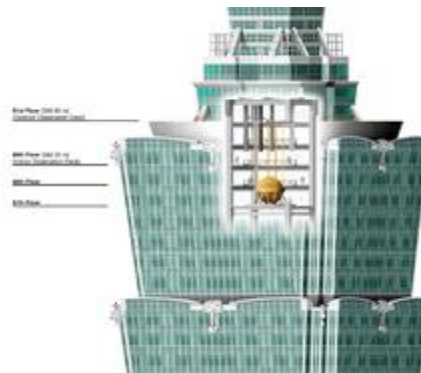
# 🇬🇷 Συστήματα απόσβεσης σε κτίρια – ένα παράδειγμα



The main tuned mass damper atop Taipei 101



An animation showing the movement of a skyscraper versus the mass damper. Shown in green are the hydraulic cylinders used to damp the motion of the skyscraper



Location of Taipei 101's largest tuned mass damper

[https://www.youtube.com/watch?v=NVNeSS-U\\_go&feature=player\\_detailpage](https://www.youtube.com/watch?v=NVNeSS-U_go&feature=player_detailpage)

## Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

❖ Οι ελεύθερες ταλαντώσεις με τριβές αργά ή γρήγορα σβήνουν.

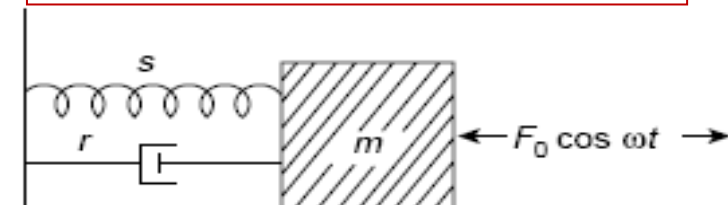
❖ Για να διατηρηθεί το πλάτος των ταλαντώσεων σταθερό στο χρόνο, **το σύστημα πρέπει να τροφοδοτείται περιοδικά με ενέργεια.**

❖ Στα μηχανικά συστήματα αυτό επιτυγχάνεται με την **άσκηση μιας περιοδικής δύναμης πάνω στο σώμα**, συνήθως ημιτονικής μορφής, αν και αυτό δεν είναι απαραίτητο (η μορφή της διεγείρουσας δύναμης μπορεί να είναι π.χ. τύπου τριγωνικών ή τετραγωνικών παλμών).

❖ Οι ταλαντώσεις που διεγείρονται στο σύστημα υπό την επίδραση κάποιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης είναι τώρα **εξαναγκασμένες.**



[Εμπνευσμένο από πίνακα του Fragonard και τη σελίδα:  
<http://ylikonet.gr/profiles/blogs/3647795:BlogPost:189625> ]



## Εξαναγκασμένη ταλάντωση και η επιστήμη του Αρχιτέκτονα Μηχανικού

### Vibrations and built structures

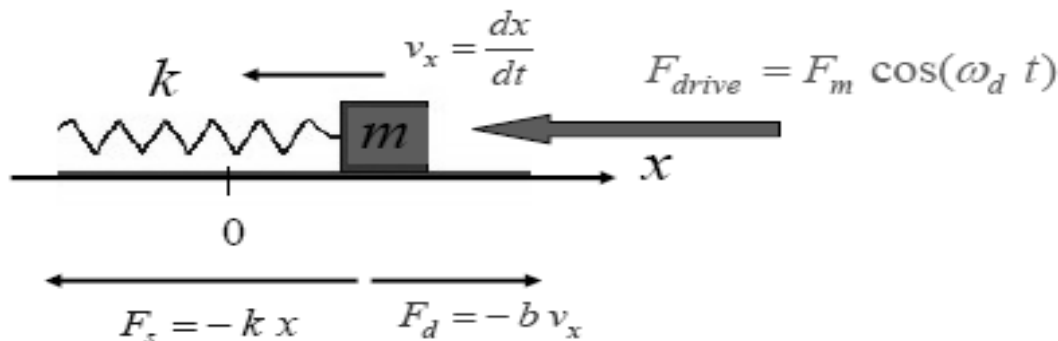
→ <http://www.insula.com.au/physics/1279/L13.html>

Οι δονήσεις στα οικοδομήματα μπορεί απλά να είναι μια ενόχληση, ή να προκαλέσουν ασθένεια, ή ακόμα και δομικές ζημιές. Οι δονήσεις προέρχονται από δύο κύριες πηγές, εσωτερικά ή εξωτερικά αίτια.

Στο εσωτερικό των κτιρίων, οι δονήσεις προέρχονται από μηχανήματα, όπως **μονάδες κλιματισμού**, **αντλίες**, **ανελκυστήρες**, **ανεμιστήρες**, **φορτωτές**, **πρέσες**, κλπ., ή από άτομα που περπατούν ή πηδούν ή τρέχουν τριγύρω.

Οι εξωτερικές δονήσεις προέρχονται από τις οδικές και τις σιδηροδρομικές μεταφορές, από υπόγειες διαβάσεις, οικοδομικές εργασίες, σεισμούς και ισχυρούς ανέμους. Οι άνεμοι προκαλούν διαλείπουσες και χαοτικές δυνάμεις σε κτίρια, αλλά μπορεί να δημιουργήσουν ταλαντώσεις από:

- αεροδυναμική αστάθεια (αρνητική απόσβεση) που παράγει αυτο-επαγόμενες ταλαντώσεις/κραδασμούς στη δομή,
- περιοδικούς σχηματισμούς δινών (Strouhal δίνες), και
- τυχαίες επιδράσεις των διακυμάνσεων στην ταχύτητα και διεύθυνση του ανέμου. Ο στροβιλισμός που δημιουργείται από τα εμπόδια μπορεί να φτάσει μέχρι και 100 φορές το ύψος της δομής.

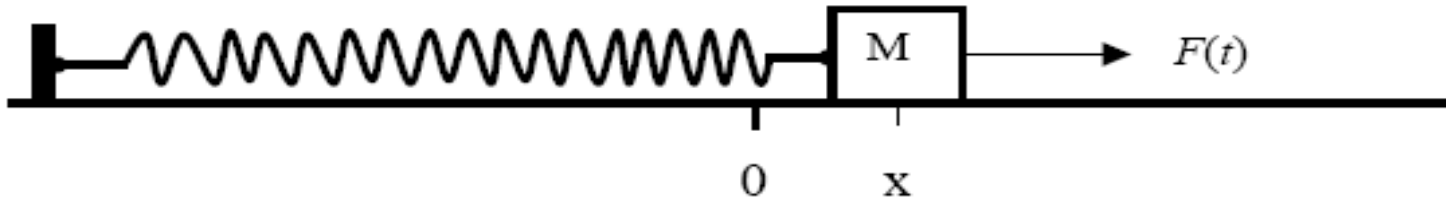


Forced Damped Harmonic Oscillator



## ❖ Εξαναγκασμένη ταλάντωση

❖ Οι ταλαντώσεις που διεγείρονται στο σύστημα υπό την επίδραση κάποιας εξωτερικής περιοδικής δύναμης λέγονται **εξαναγκασμένες**.



Η εξίσωση κίνησης του σώματος το οποίο εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση είναι:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

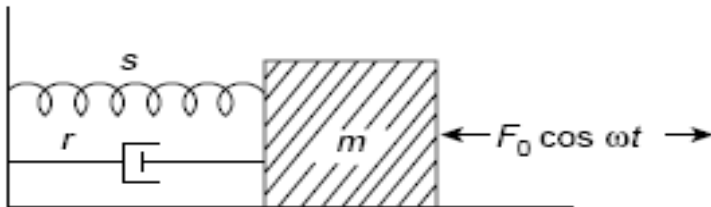
(1) όπου θεωρούμε ότι η διεγείρουσα δύναμη είναι της μορφής:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Ας θυμηθούμε τον τύπο του Euler:  $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

## ■ Εξαναγκασμένη ταλάντωση (συνέχεια)

Θέτοντας  $\gamma=r/m$  και  $\omega_0^2=s/m$  και θεωρώντας ότι η εξωτερική διεγείρουσα δύναμη μπορεί να εκφρασθεί με τη γενική μιγαδική μορφή  $F=F_0 e^{i\omega t}$ , από την οποία μπορούμε να πάρουμε το πραγματικό μέρος, η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F'_0 \cos \omega t \quad (2)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) για κάθε χρονική στιγμή θα αποτελείται από τη συνεισφορά της αντίστοιχης ομογενούς (**μεταβατική κατάσταση**) συν τον όρο που οφείλεται στην εξωτερική δύναμη. Λόγω της απόσβεσης, σε κάποιο χρονικό διάστημα, ανάλογο του  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$  η ταλάντωση θα φθάσει στη λεγόμενη **μόνιμη κατάσταση**, όπου η εξωτερική διεγείρουσα δύναμη θα επιβάλλει τη συχνότητά της στον ταλαντωτή.

**Στη μόνιμη κατάσταση** (η οποία φυσικά δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες) μπορούμε να θεωρήσουμε μια γενική λύση για την απομάκρυνση, της μορφής:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t]$$

## Εξαναγκασμένη ταλάντωση (συνέχεια)

Τη λύση αυτή, την  
παραγωγίζουμε κ.λ.π. και  
την αντικαθιστούμε στην  
(2)

⇒

$$\begin{aligned} \cos \omega t [(\omega_o^2 - \omega^2)A + \gamma \omega B] + \sin \omega t [(\omega_o^2 - \omega^2)B - \gamma \omega A] &= \frac{F_o}{m} \cos \omega t \\ \Downarrow \\ (\omega_o^2 - \omega^2)B - \gamma \omega A &= 0 \quad \text{and} \quad (\omega_o^2 - \omega^2)A + \gamma \omega B = \frac{F}{m} \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει  
η σχέση:

$$A = \frac{(\omega_o^2 - \omega^2) F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad \text{and} \quad B = \frac{\gamma \omega F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Και η γενική λύση γράφεται:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\omega_o^2 - \omega^2) F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \cos \omega t + \frac{\gamma \omega F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin \omega t \\ &= \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \left[ \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos \omega t + \frac{\gamma \omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \sin \omega t \right] \quad (3) \\ &= \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

## Εξαναγκασμένη ταλάντωση (συνέχεια)

Η (3) προέκυψε από τη χρήση γνωστών τριγωνομετρικών σχέσεων και θέτοντας:

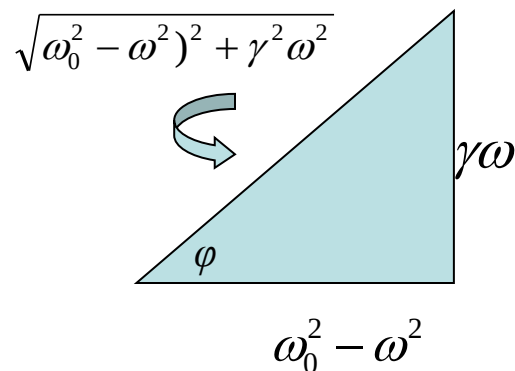
$$\sin \phi = \frac{\gamma \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad \cos \phi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

και

$$\tan \phi = \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Επομένως, όταν το σύστημα έχει φθάσει στη **μόνιμη κατάσταση**, η μετατόπιση υστερεί ως προς την εξωτερική δύναμη κατά τη φάση  $\phi$  και ταλαντώνεται με πλάτος  $A$ :

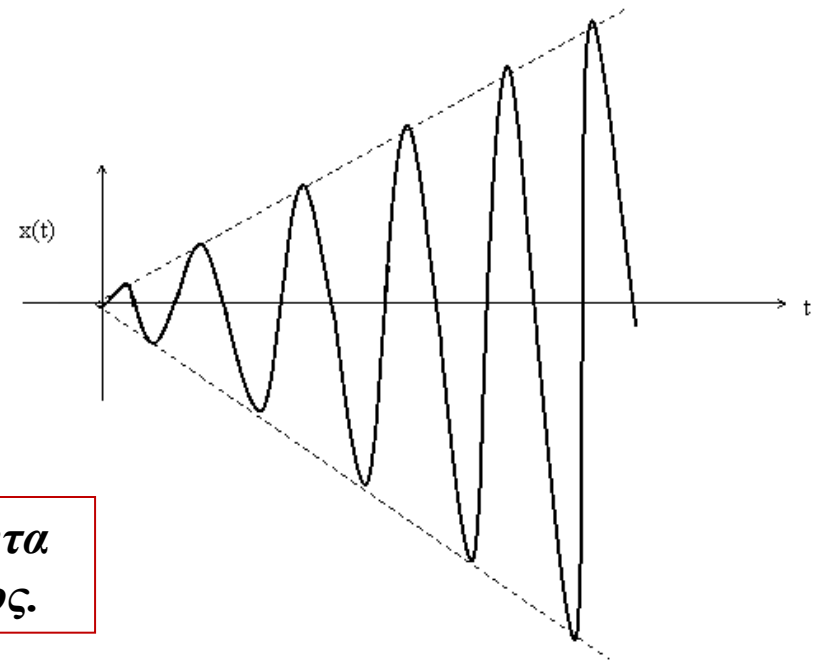
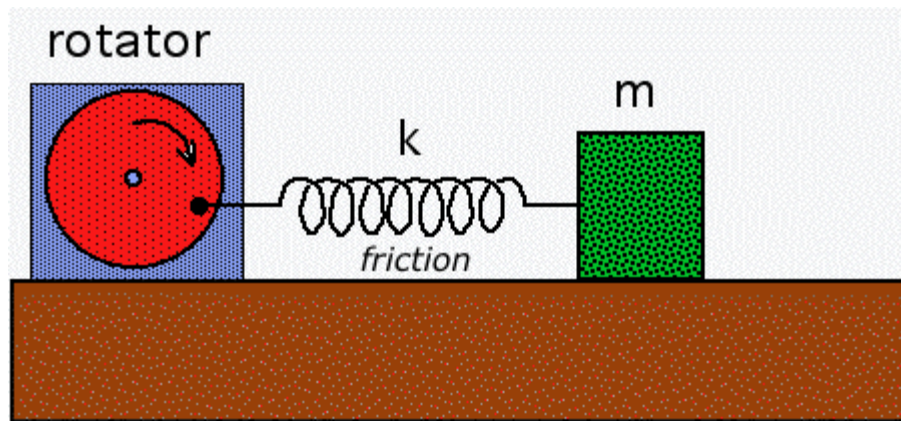
$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad (4)$$



Το τρίγωνο αριστερά απεικονίζει τη σχέση της φάσης  $\phi$  με τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης  $\omega$ .

## Εξαναγκασμένη ταλάντωση (συνέχεια)

Όπως είπαμε, η λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για κάθε χρονική στιγμή θα αποτελείται από τη συνεισφορά της αντίστοιχης ομογενούς (**μεταβατική κατάσταση**) συν τον όρο που οφείλεται στην εξωτερική δύναμη (**μόνιμη κατάσταση**), όπου η μεταβατική κατάσταση θα έχει εξασθενήσει σημαντικά και η εξωτερική διεγείρουσα δύναμη θα κυριαρχεί στον ταλαντωτή. Ο όρος **της μεταβατικής κατάστασης** εξαρτάται από τις συνθήκες για κρίσιμη, υπερκρίσιμη ή ασθενή απόσβεση.



*Η συχνότητα της δύναμης δεν είναι απαραίτητα ίδια με την φυσική συχνότητα του συστήματος.*

For the spring-plus-mass system, the natural frequency is:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

*Η μετατόπιση στην Ε.Τ. Όταν δεν υπάρχει απόσβεση*



## Εξάρτηση του πλάτους από τη συχνότητα στην εξαναγκασμένη ταλάντωση

$$A(\omega) = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

Θα διερευνήσουμε την **εξάρτηση του πλάτους** από τη συχνότητα  $\omega$  της εξωτερικής, διεγείρουσας δύναμης. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Όταν η  $\omega$  προσεγγίζει την  $\omega_0$ :

$$A(\omega_0) \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{\gamma \omega_0} = \frac{F_0}{r \omega_0}$$

2) Όταν η  $\omega \ll \omega_0$  ή  $\omega \rightarrow 0$ :

$$A(\omega \rightarrow 0) \cong \frac{F_0}{m \omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

(χαμηλές συχνότητες)

3) Όταν η  $\omega \gg \omega_0$  ή  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$A(\omega \rightarrow \infty) \cong 0$$

(πολύ υψηλές συχνότητες)

Προσδιορίζουμε την τιμή της  $\omega$  για την οποία το πλάτος γίνεται μέγιστο, δηλαδή εκεί όπου έχουμε συντονισμό μετατόπισης. Αυτό θα συμβεί όταν ο παρανομαστής στη σχέση (4) είναι ελάχιστος, δηλαδή όταν η παράγωγος της συνάρτησης  $A(\omega)$  ως προς  $\omega$  είναι μηδέν. Αν θέσουμε  $\omega_r$  τη συχνότητα συντονισμού της μετατόπισης, θα ισχύει, με βάση τα παραπάνω, η σχέση:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}$$

Για  $r^2 \geq 2m^2 \omega_0^2$  το φαινόμενο του συντονισμού δεν είναι πλέον εμφανές, ως προς το πλάτος τουλάχιστον.

## Εξάρτηση του πλάτους από τη συχνότητα στην εξαναγκασμένη ταλάντωση – συντονισμός μετατόπισης

Είδαμε ότι ο συντονισμός της μετατόπισης συμβαίνει σε μια συχνότητα λίγο χαμηλότερη από την  $\omega_0$ , την **ιδιοσυχνότητα** των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, η οποία θα δείξουμε ότι αποτελεί τη συχνότητα συντονισμού της ταχύτητας.

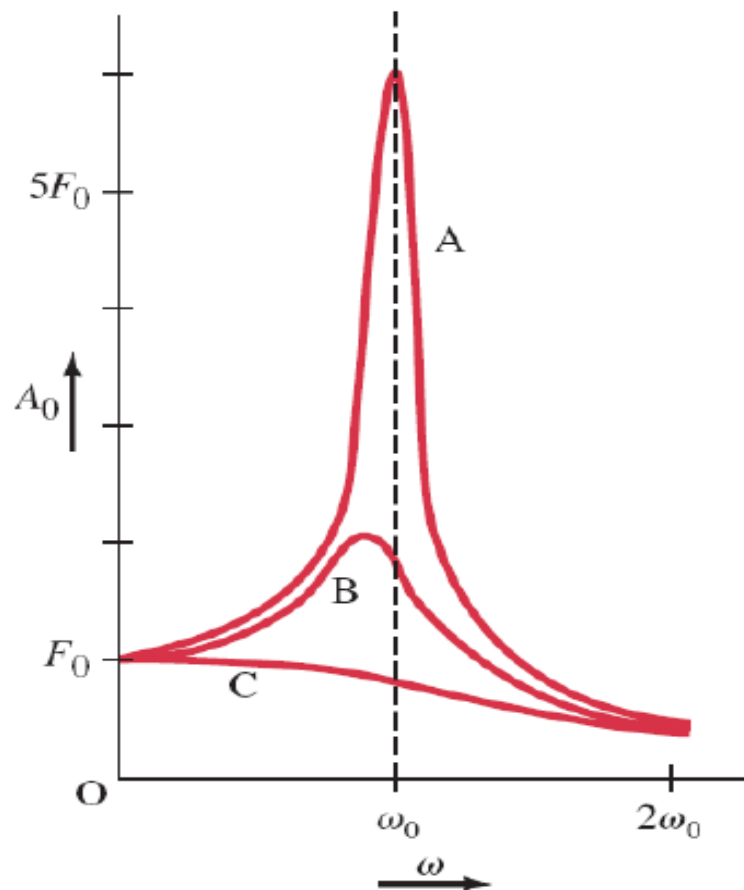
Για μικρή σταθερά απόσβεσης ή για μεγάλη μάζα, οι δύο αυτοί συντονισμοί συμβαίνουν πρακτικά στη συχνότητα  $\omega_0$ .

Στη συχνότητα συντονισμού μετατόπισης, η μέγιστη μετατόπιση είναι:

$$A(\omega_r) = \frac{F_0}{r\omega'}$$

όπου:

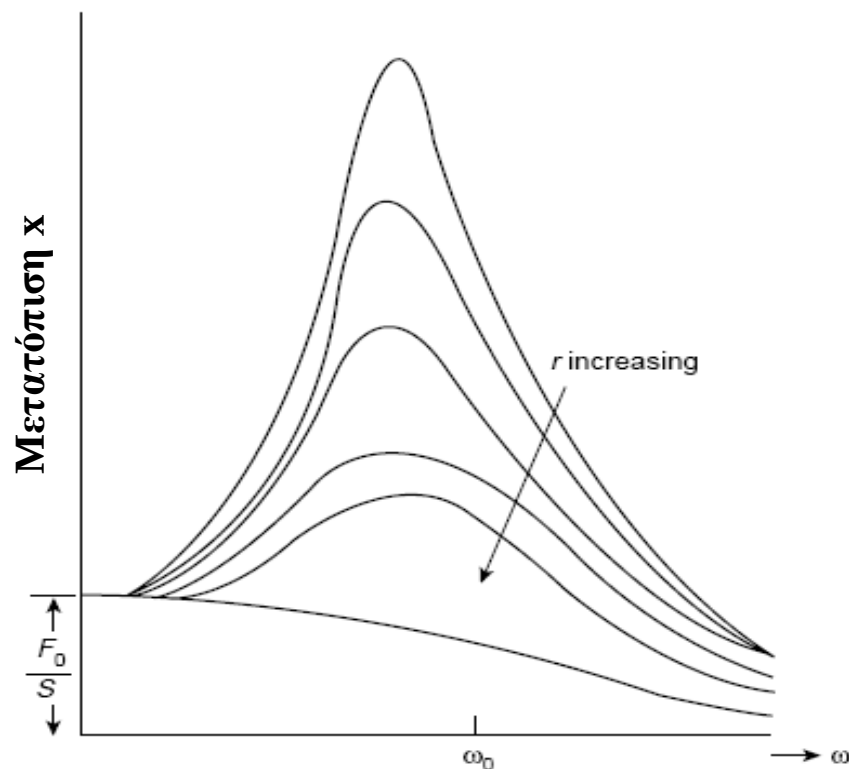
$$\omega' = \left( \frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$



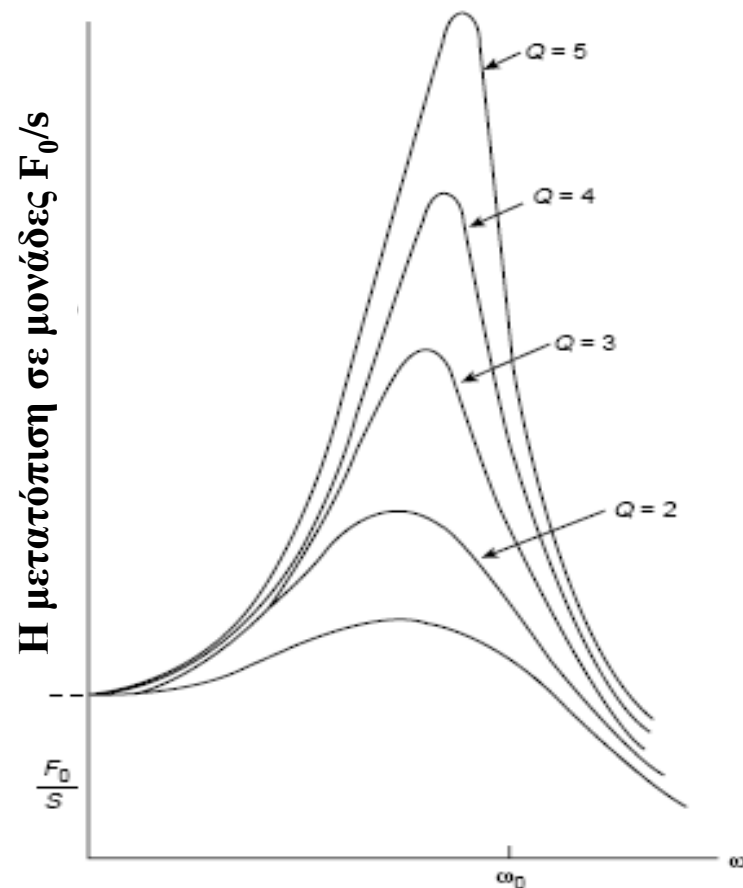
Μεταβολή του πλάτους μετατόπισης εξαναγκασμένου ταλαντωτή ως συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$  της διεγείρουσας δύναμης για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης  $r$ . Το εύρος της κορυφής συντονισμού χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα  $Q$  :  $Q = \omega_0 / \Delta\omega = m\omega_0 / r$



## Εξάρτηση του πλάτους από τη συχνότητα στην εξαναγκασμένη ταλάντωση – συντονισμός μετατόπισης



Άλλο ένα γράφημα του συντονισμού της μετατόπισης που συμβαίνει σε μια συχνότητα λίγο χαμηλότερη από την  $\omega_0$ , την ιδιοσυχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση.



Το εύρος της κορυφής συντονισμού χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα  $Q$ :  
$$Q = \omega_0 / \Delta\omega = m\omega_0 / r$$



## *Συντονισμός ταχύτητας*

$$\omega = \omega_0$$

## *Μέγιστο πλάτος*

$$v_{\max} = \frac{F_0}{m\gamma} = \frac{F_0}{r}$$

# Σύνοψη

$$A(\omega) = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

$$\gamma = \frac{r}{m}$$

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + r^2 \omega^2}}$$

## Συντονισμός πλάτους

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}$$

$$A_{\max} = \frac{F_0}{r\omega'}$$

$$\omega' = \left( \omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

## Συντονισμός ταχύτητας

$$\omega = \omega_0$$

$$v_{\max} = \frac{F_0}{m\gamma} = \frac{F_0}{r}$$

$$\tan \varphi = \frac{r\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

**Σημείωση:** Για  $r \geq \sqrt{2}m\omega_0$  δεν έχουμε συντονισμό πλάτους

# Μεταφορά ισχύος

$$dW = Fdx \Rightarrow \frac{dW}{dt} = F \frac{dx}{dt} \Rightarrow P = Fv$$

Άρα

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \langle Fv \rangle = \left\langle \left[ F_0 \cos(\omega t) \right] \left[ -\omega x_0 \sin(\omega t - \varphi) \right] \right\rangle \\&= \left\langle -F_0 \omega x_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \right\rangle \\&= -F_0 \omega x_0 \left\langle \frac{1}{2} \sin(2\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} \sin(-\varphi) \right\rangle \\&= -F_0 \omega x_0 \left( 0 + \frac{1}{2} \sin(-\varphi) \right) = \frac{1}{2} F_0 \omega x_0 \sin \varphi\end{aligned}$$



# Μεταφορά ισχύος II

Επομένως η μέση ισχύς που μεταφέρεται από τον διεγέρτη στο σύστημα γίνεται μέγιστη όταν

$$\sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Όμως

$$\tan \varphi = \frac{r\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Άρα για

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \tan \varphi \rightarrow \infty \Rightarrow \omega = \omega_0$$

Επομένως η μέση ισχύς που μεταφέρεται από τον διεγέρτη στο σύστημα γίνεται μέγιστη όταν η συχνότητα του διεγέρτη ισούται με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος

# Ενέργεια συστήματος

## Δυναμική ενέργεια συστήματος

$$E_P = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2 (\omega t - \varphi) \Rightarrow \langle E_P \rangle = \frac{1}{4} kx_0^2$$

## Κινητική ενέργεια συστήματος

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2 (\omega t - \varphi) \Rightarrow \langle E_K \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 x_0^2$$

## Ολική ενέργεια συστήματος

$$E_{tot} = E_P + E_K = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2 (\omega t - \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 \sin^2 (\omega t - \varphi) \Rightarrow$$
$$\langle E_{tot} \rangle = \frac{1}{4} kx_0^2 + \frac{1}{4} m \omega^2 x_0^2 = \text{const} \tan t$$

# *Λόγος μέγιστης (μέσης) κινητικής προς δυναμική ενέργεια*

$$\frac{E_{K,\max}}{E_{P,\max}} = \frac{\langle E_K \rangle}{\langle E_P \rangle} = \frac{\frac{1}{2} m v_0^2}{\frac{1}{2} k x_0^2} = \frac{m}{k} \frac{v_0^2}{x_0^2} = \frac{m}{k} \frac{\omega^2 x_0^2}{x_0^2} = \frac{m}{k} \omega^2 = \frac{\omega^2}{k/m} = \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

*Επομένως*

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = \langle E_P \rangle + \langle E_K \rangle = \langle E_P \rangle \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] = \langle E_K \rangle \left[ 1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

# Παράδειγμα

Σώμα μάζας  $m=100\text{ Kg}$  και σταθεράς ελατηρίου  $K=400\text{ N/m}$  υπόκειται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα  $\omega=10\text{ rad/sec}$ . Εάν η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι  $x_0=25\text{ cm}$  να υπολογισθούν η μέγιστη δυναμική ενέργεια, η μέγιστη κινητική ενέργεια, η μέση μηχανική ενέργεια και η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος. Εάν υποθέσουμε ότι μέση μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή πόση θα είναι η μέγιστη απομάκρυνση και η μέγιστη ταχύτητα για  $\omega=\omega_0$ ;

# Λύση

Έχουμε ότι  $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2 \text{ rad/s}$ .

Άρα  $\omega = 5\omega_0$

Επομένως  $E_{P,\max} = (1/2) * k * x_0^2 = 12.5 \text{ J}$

$E_{K,\max} = E_{P,\max} * (\omega/\omega_0)^2 = 25 * E_{P,\max} = 312.5 \text{ J}$

Άρα  $\langle E_{TOT} \rangle = (E_{K,\max} + E_{P,\max})/2 = 162.5 \text{ J}$

$v_{\max} = \sqrt{2 * E_{K,\max} / m} = 2.5 \text{ m/s}$

Για  $\omega = \omega_0$  θα έχουμε  $E_{K,\max} = E_{P,\max}$

Επομένως  $\langle E_{TOT} \rangle = E_{K,\max} = E_{P,\max} = 162.5 \text{ J}$

Άρα  $x_0 = \sqrt{2 * E_{P,\max} / k} = 0.90 \text{ m}$

και  $v_{\max} = \sqrt{2 * E_{K,\max} / m} = 1.80 \text{ m/s}$

# Ενέργεια συστήματος II

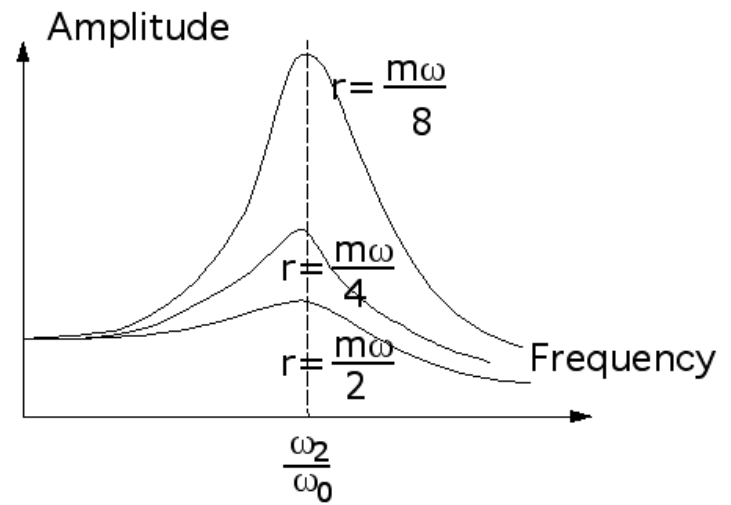
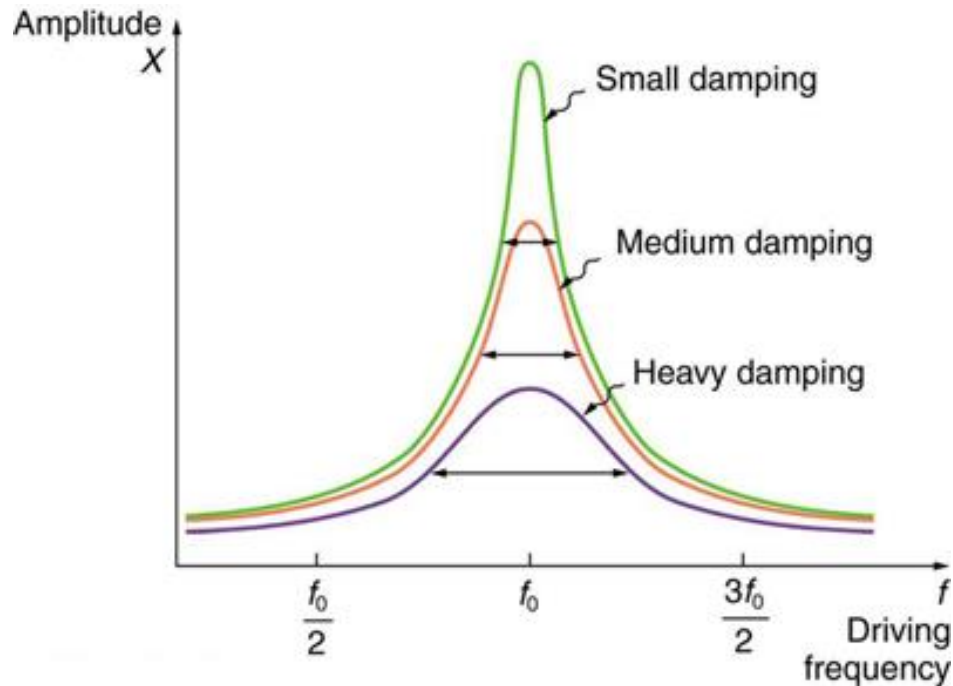
Επομένως στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η στιγμιαία τιμή της ολικής ενέργειας του συστήματος μεταβάλλεται με το χρόνο κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μέση τιμή να παραμένει σταθερή

Άρα, η μέση τιμή της ισχύος που παρέχει ο διεγέρτης στο σύστημα (στην σταθερή κατάσταση) μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε θερμότητα μέσω του παράγοντα απωλειών

Επίσης στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις δεν ισχύει ότι η μέση (ή ισοδύναμα η μέγιστη) τιμή της δυναμικής ενέργειας ισούται με αυτή της κινητικής ενέργειας.

Αυτό ισχύει μόνο όταν  $\omega = \omega_0$ . Στην περίπτωση αυτή διατηρείται και η ολική ενέργεια του συστήματος με την αυστηρή έννοια του όρου, δηλαδή όχι μόνο η μέση αλλά και η στιγμιαία τιμή της ολικής ενέργειας παραμένει σταθερή.

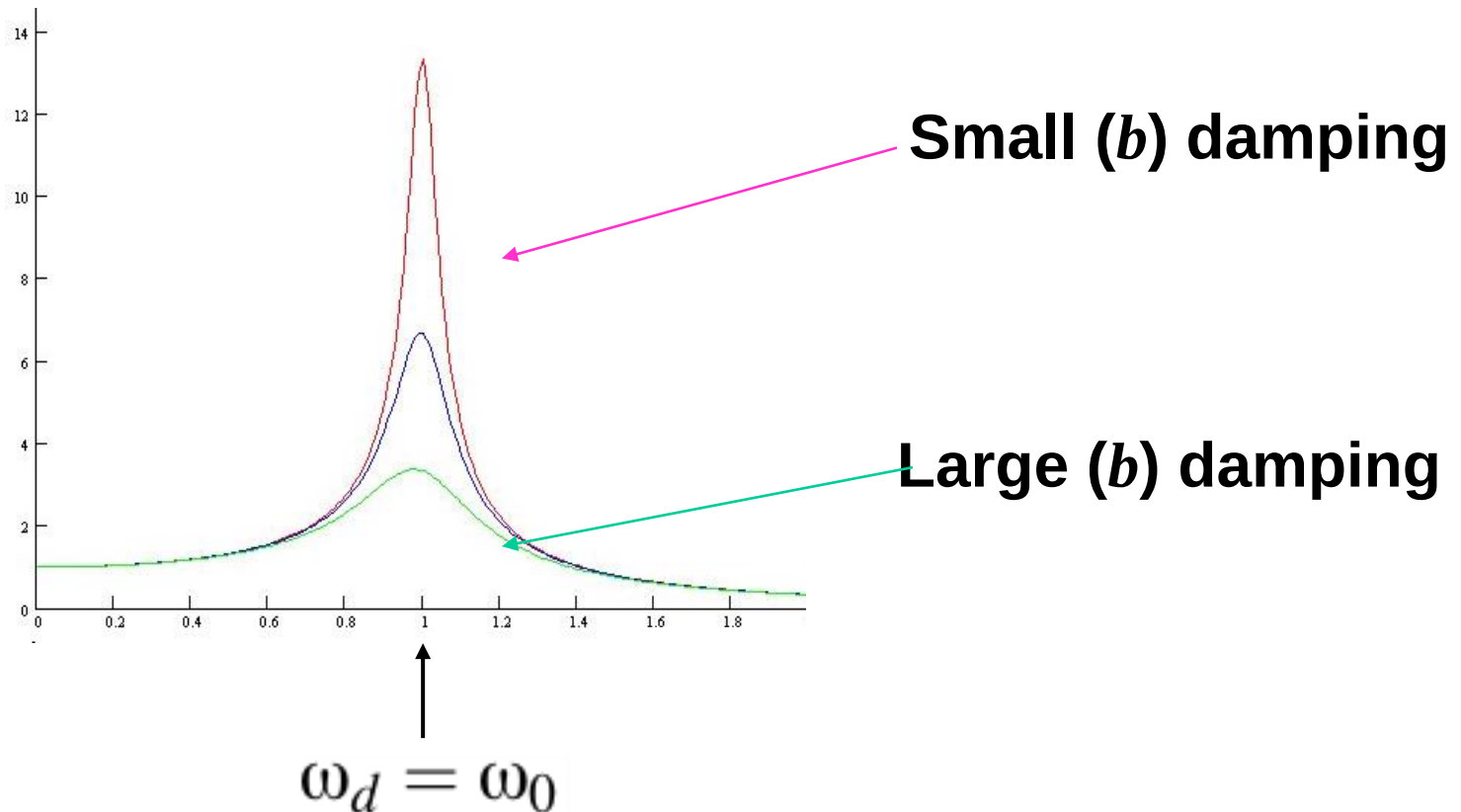
## Εξάρτηση του πλάτους από τη συχνότητα στην εξαναγκασμένη ταλάντωση – συντονισμός μετατόπισης



Μερικά παραδείγματα της μεταβολής του πλάτους μετατόπισης εξαναγκασμένου ταλαντωτή ως συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$  της διεγείρουσας δύναμης για διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης  $r$ .

# Resonance

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + (b\omega_d)^2}}$$





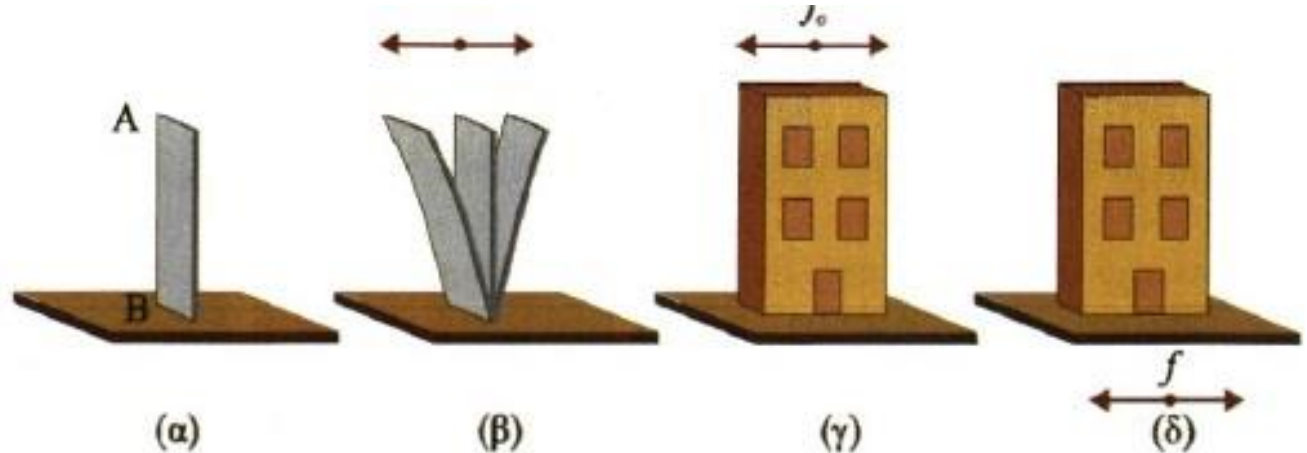
## Εφαρμογές του συντονισμού

! Όλες οι κατασκευές όπως κτίρια, γέφυρες, εξέδρες άντλησης πετρελαίου, πλοία, γερανοί, μηχανές έχουν μια συχνότητα ταλάντωσης όταν κάνουν ελεύθερη ταλάντωση (**ιδιοσυχνότητα**). Οι κατασκευές αυτές σε πολλές περιπτώσεις κάνουν **εξαναγκασμένη ταλάντωση**, λόγω της διέγερσής τους από εξωτερικά αίτια. Πχ τα κτίρια διεγείρονται από τα σεισμικά κύματα και από τον αέρα, τα πλοία από τα κύματα της θάλασσας, οι μηχανές αυτοδιεγείρονται λόγω της κίνησης των μηχανικών μερών τους κτλ. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να αποφεύγουμε το φαινόμενο του συντονισμού, το οποίο είναι καταστροφικό για τις κατασκευές αυτές, αφού το μεγάλος πλάτος ταλάντωσης σημαίνει και μεγάλες δυνάμεις που είναι έξω από τα όρια αντοχής των υλικών. Για να αποφύγουμε το φαινόμενο του συντονισμού αλλάζουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της κατασκευής και έτσι πετυχαίνουμε να αλλάξουμε την **σταθερά απόσβεσης  $b$**  οπότε το φαινόμενο του συντονισμού να μην γίνεται αντιληπτό.

! Σε ορισμένες περιπτώσεις επιδιώκουμε την εμφάνιση του συντονισμού γιατί μας είναι χρήσιμος πχ όταν γυρίζουμε το κουμπί ενός συμβατικού ραδιοφώνου δεν κάνουμε τίποτα άλλο από το ρυθμίζουμε την ιδιοσυχνότητα σ ένα κύκλωμα του ραδιοφώνου σε μια τιμή που είναι ίση με την συχνότητα του πομπού. Στο ηλεκτρικό κύκλωμά του έχουμε ταλαντώσεις με μέγιστο πλάτος ρεύματος, οι οποίες έχουν συχνότητα όση ο πομπός και έτσι γίνεται δυνατό να ακούσουμε το σήμα του πομπού.

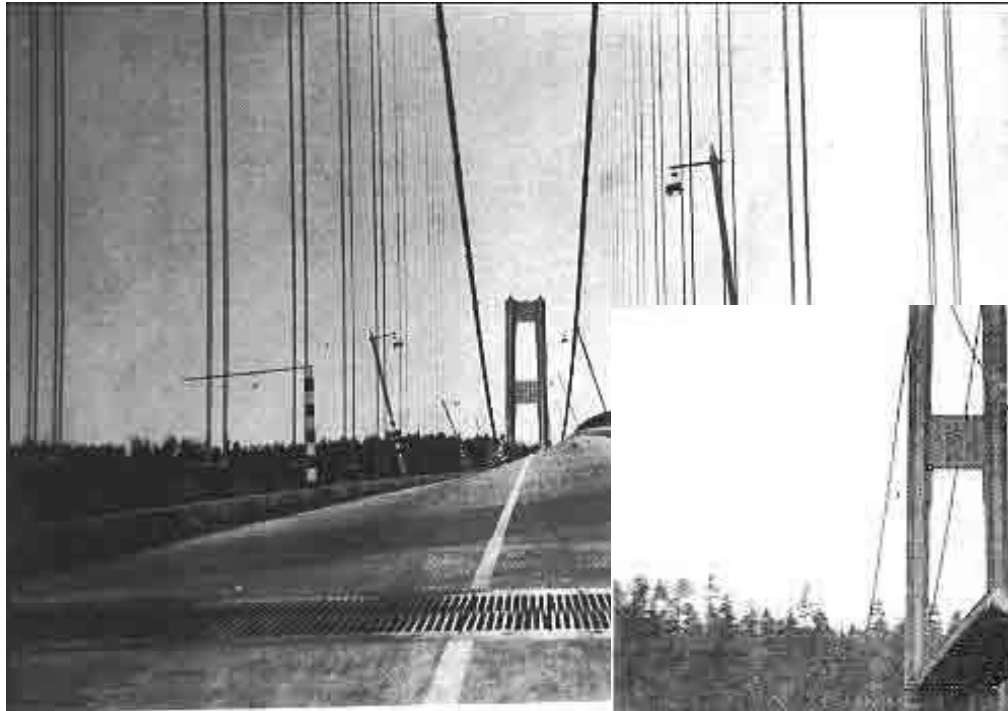
## ■ Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, με ή χωρίς απόσβεση - ένα παράδειγμα από το χώρο των εφαρμογών

**Σχ. 1.31** Το κτίριο συμπεριφέρεται όπως το μεταλλικό έλασμα. Όταν ταλαντώνεται το έδαφος (σεισμός) το κτίριο κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση.



Το AB (σχ. 1.31) είναι ένα μεταλλικό έλασμα, στερεωμένο στο κάτω άκρο του B σε ακλόνητο δάπεδο (σχ. 1.31α). Αν τραβήξουμε το άκρο A του ελάσματος και το αφήσουμε ελεύθερο, θα εκτελέσει ταλάντωση, με συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητά του (σχ. 1.31 β). Θεωρητικά ένα κτίριο (σχ. 1.31γ), αν διεγερθεί, έχει τη δυνατότητα να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση, παρόμοια με αυτή του ελάσματος με ιδιοσυχνότητα  $f_0$ . Στη διάρκεια ενός σεισμού, το έδαφος πάλλεται με συχνότητα  $f$  (σχ. 1.31 δ) και τα κτίρια εξαναγκάζονται να εκτελέσουν ταλάντωση. Αν η συχνότητα  $f$  με την οποία πάλλεται το έδαφος (διεγέρτης) είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα  $f_0$  του κτιρίου, το πλάτος της ταλάντωσης του κτιρίου θα γίνει μεγάλο, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην κατάρρευσή του.

*Ένα δραματικό παράδειγμα συντονισμού, η κατάρρευση της γέφυρας  
Tacoma Narrows το 1940*



Wind Strength  
 $\sim F_0 \cos(\omega_w t)$



$$\omega_w \approx \omega_{\text{bridge}}$$

Δείτε το video της ταλάντωσης:

<http://physics.usask.ca/~pywell/p121/Images/tacoma.avi>

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. “Φυσική των Ταλαντώσεων και των Κυμάτων”, Pain H. J., ISBN: 978-960-266-001-0, 1997.
2. “ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ”, K. U. Ingard, ISBN: 960-254-678-6, 2008.
3. **Acoustics and Vibration Animations**, Daniel A. Russell, Ph.D., Physics Department, Kettering University, Flint, MI 48504-4898.  
<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/wave-x-t/wave-x-t.html>
4. “**Physics vol. I, II**”, D. Halliday, R. Resnick, K. Krane, Wiley Int. Publ., 1992.
5. **ΦΥΣΙΚΗ** ΟΗΑΝΙΑΝ, Τόμος Α’ και Β’, Μετάφραση Α. Φίλιππα, ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, 1991
6. «Ταλαντώσεις», Μαρία Κατσικίνη, [katsiki@auth.gr](mailto:katsiki@auth.gr), [users.auth.gr/katsiki](http://users.auth.gr/katsiki)
7. [http://www.dikaoulakos.gr/themata/fysiki\\_ckat.pdf](http://www.dikaoulakos.gr/themata/fysiki_ckat.pdf)
8. PHY138 – Waves, Lecture 1, Jason Harlow
9. Ιστοσελίδες στο διαδίκτυο χωρίς σαφή αναφορά από τους συγγραφείς.
10. <http://www.walter-fendt.de/ph14e/resonance.htm>
11. <http://physics.usask.ca/~pywell/p121/Images/tacoma.avi>

[http://fysicakasta.blogspot.gr/2011\\_04\\_01\\_archive.html](http://fysicakasta.blogspot.gr/2011_04_01_archive.html)

