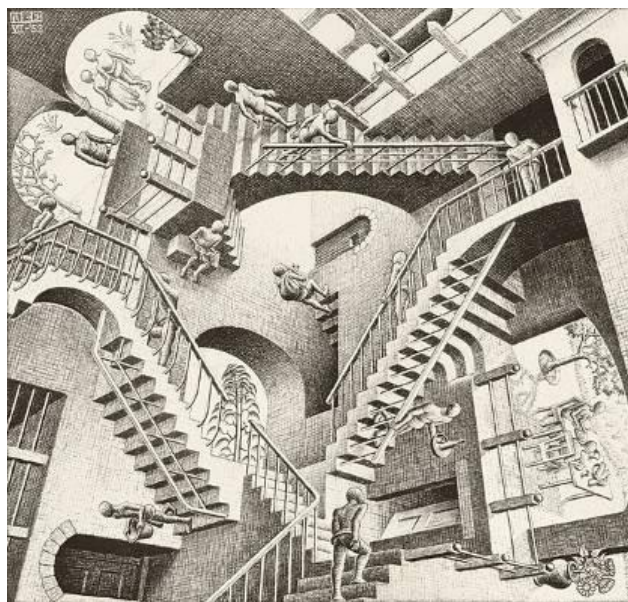




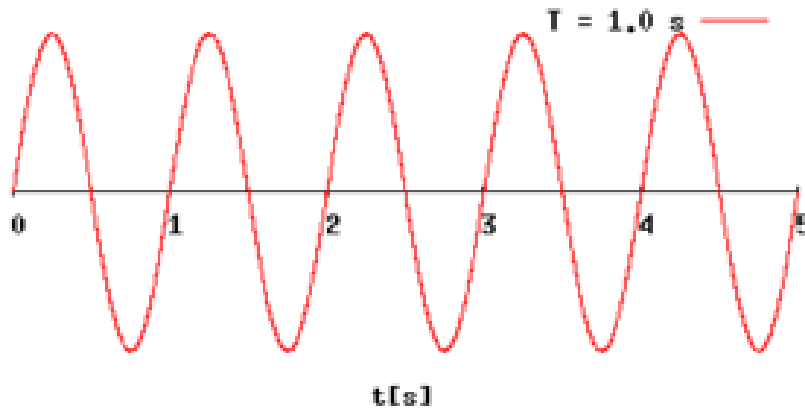
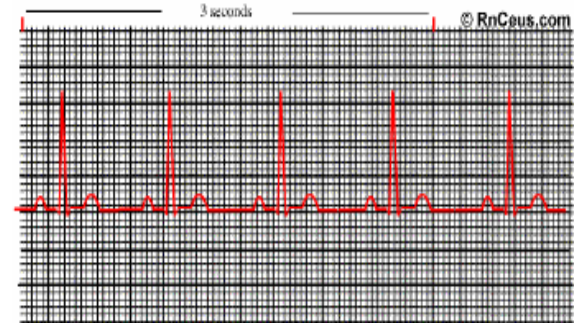
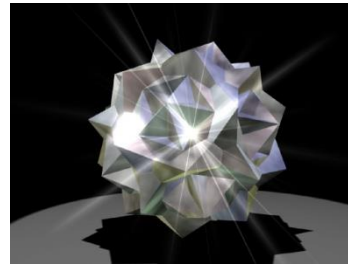
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



Περιοδικά φαινόμενα - Ταλαντώσεις



Περιοδικά φαινόμενα



**Κύμα μεταβαλλόμενης
συχνότητας όπου σημειώνεται
η περίοδος του**

• **Περιοδικά** λέμε εκείνα τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε ίσους διαδοχικούς χρόνους.

• Το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο πραγματοποιείται μια απλή επανάληψη του περιοδικού φαινομένου, καλείται **περίοδος (T)**. Ως περίοδος του φαινομένου λοιπόν ορίζεται ο ελάχιστος **χρόνος** που απαιτείται για να εκτελεστεί ένας πλήρης κύκλος του φαινομένου, μετά τον οποίο το φαινόμενο επαναλαμβάνεται. Εξ'ορισμού προκύπτει ότι $T = \Delta t / N$, όπου N είναι ο αριθμός των επαναλήψεων που έγιναν σε χρονικό διάστημα Δt . Μετρείται σε μονάδες χρόνου, π.χ. **δευτερόλεπτα** (s), **λεπτά** (min) κ.λ.π.

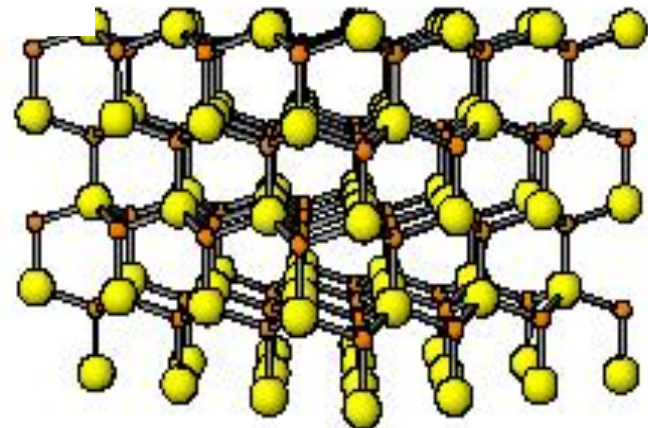
■ Περιοδικά φαινόμενα – Ταλαντώσεις

Ας θυμηθούμε από το λύκειο:

- **Ταλάντωση** = περιοδική κίνηση πάνω σε μια τροχιά, γύρω από κάποιο σημείο,
- **Αρμονική ταλάντωση** = ταλάντωση, κατά την οποία η απομάκρυνση του ταλαντωτή γύρω από τη θέση ισορροπίας περιγράφεται από αρμονικές (ημιτονοειδείς) συναρτήσεις του χρόνου,

$$y = A \sin \omega t$$

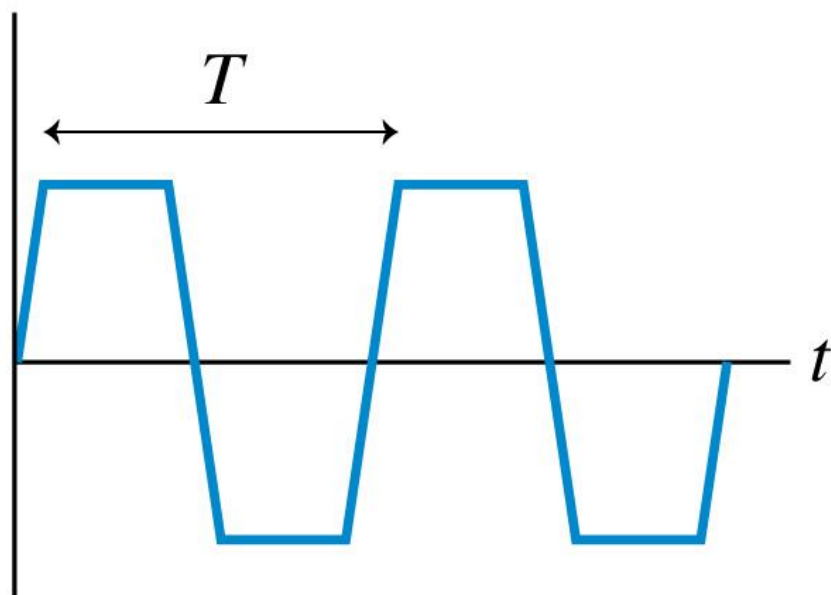
Απλή αρμονική ταλάντωση



Κάποιες ταλαντώσεις ΔΕΝ είναι ημιτονοειδείς:

(a)

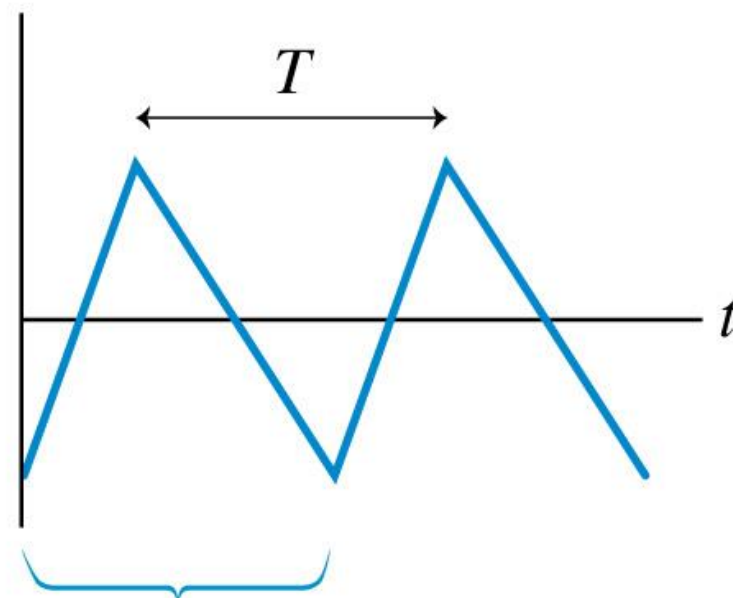
Position



Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley

(b)

Position



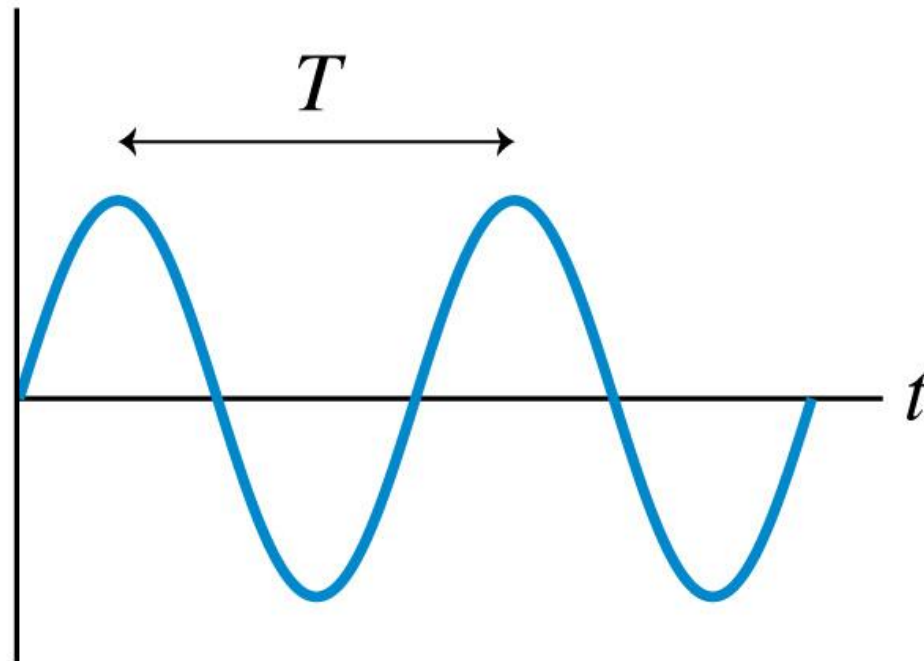
One cycle
takes time T .

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley

🌸 *Ημιτονοειδείς ταλαντώσεις = Απλή Αρμονική Ταλάντωση (AAT)*

(c)

Position

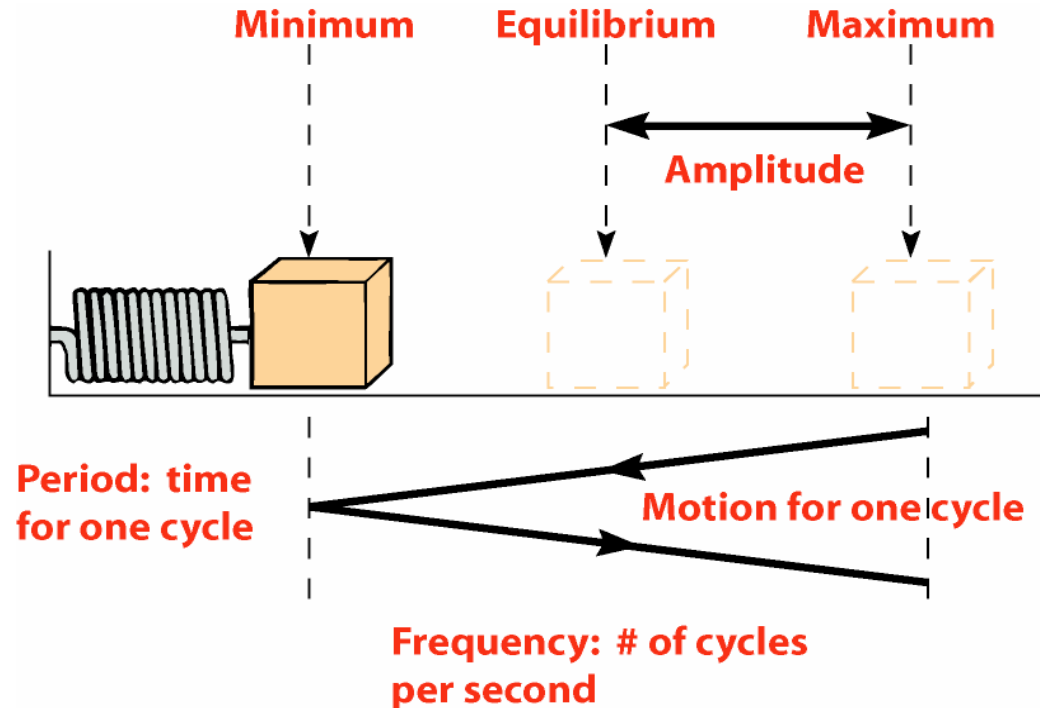
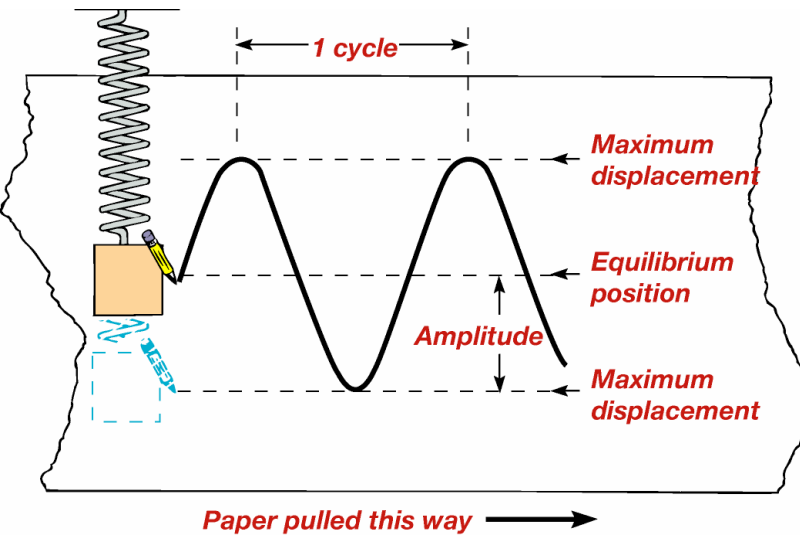


Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley

Sinusoidal oscillations = Simple Harmonic Motion (SHM)

Περιγράφοντας ταλαντώσεις: Ελατήρια

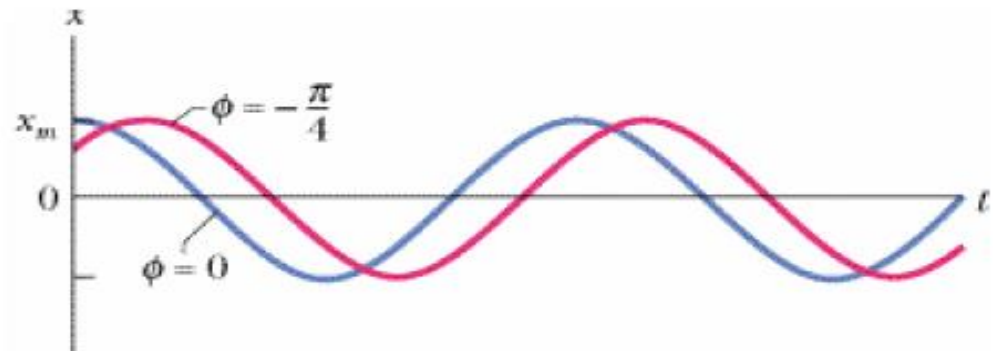
Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας (η ταλάντωση χαρακτηρίζεται πλήρως, σε κάθε στιγμή, από μια μεταβλητή).



Period (s)

$$T = \frac{1}{f}$$

frequency (Hz)



Περιγράφοντας ταλαντώσεις – ορισμοί

- Συχνότητα ονομάζεται ο αριθμός των επαναλήψεων που έγιναν στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή ο αριθμός των επαναλήψεων διά του χρονικού διαστήματος στο οποίο μετρήσαμε. Συμβολίζεται με f (frequency) και μετριέται σε s^{-1} , ή Hz.
- Έτσι, ισχύει $f=N/\Delta t$, όπου N είναι ο αριθμός των διαταραχών που πέρασαν σε χρονικό διάστημα Δt .
- Η συχνότητα είναι αντίστροφο μέγεθος της περιόδου και ισχύει:
 $fT=(N/\Delta t)(\Delta t/N)=(N\Delta t/\Delta tN)=1$
- Η παράμετρος φ (φάση) καθορίζει την «απομάκρυνση $x(0)$ στην αρχή των χρόνων».
- Πλάτος της αρμονικής κίνησης είναι η μέγιστη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας. Συνήθως συμβολίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης A .

Γιατί ο Μηχανικός μελετά τις ταλαντώσεις;

***The Millennium Bridge a Recent Vibration Problem
(2000-1)***



LONDON MILLENNIUM BRIDGE: PEDESTRIAN-INDUCED LATERAL VIBRATION

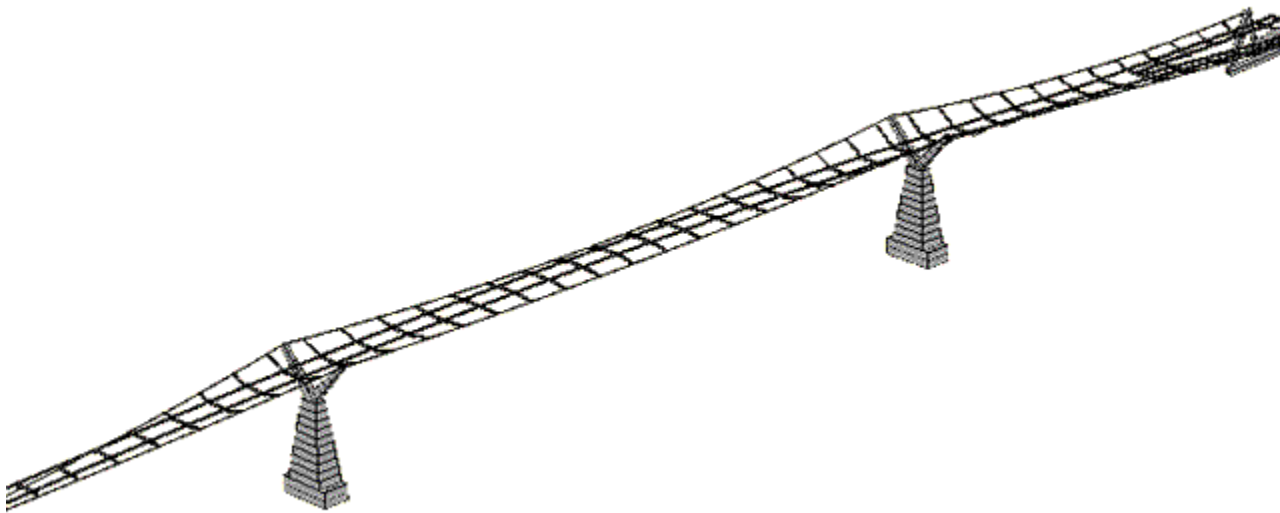
By Pat Dallard, Tony Fitzpatrick, Anthony Flint, Angus Low, Roger Ridsdill Smith, Michael Willford, and Mark Roche.

ABSTRACT: The London Millennium Footbridge is located across the Thames River in Central London. **At its opening on June 10, 2000, the bridge experienced pedestrian-induced lateral vibration.** Observations on the day of opening and studies of video footage revealed up to 50 mm of lateral movement of the south span and 70 mm of the center span. The north span did not move substantially. **The bridge was closed on June 12, 2000,** pending an investigation into the cause of the unexpected lateral movements. This paper highlights the phenomenon of pedestrian-induced lateral vibration on footbridges and the current state of knowledge of the lateral loading effect. Modification of the bridge, **introducing extensive passive damping,** is currently underway with completion scheduled for the end of 2001.



LONDON MILLENNIUM BRIDGE: PEDESTRIAN-INDUCED LATERAL VIBRATION

Προσομοίωση των ταλαντώσεων στη γέφυρα



Δείτε τα video από την πρώτη μέρα (**June 10, 2000**) που δόθηκε στη κυκλοφορία η γέφυρα:

<http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=gQK21572oSU&feature=endscreen>

■ Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση

Ταλαντώσεις

Απλή αρμονική ταλάντωση

Ομαλή κυκλική κίνηση

Γωνιακή ταχύτητα

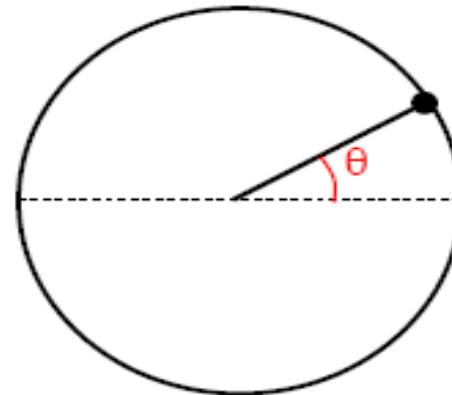
$$\omega = \frac{\vartheta}{t} \Rightarrow \vartheta = \omega \cdot t$$

$$\frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow \text{s}^{-1}$$

Γραμμική ταχύτητα

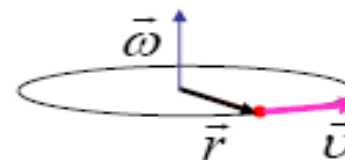
$$v = \frac{ds}{dt}$$

$\rightarrow \frac{m}{s}$



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Μέτρο της ταχύτητας: $v = \omega \cdot r$

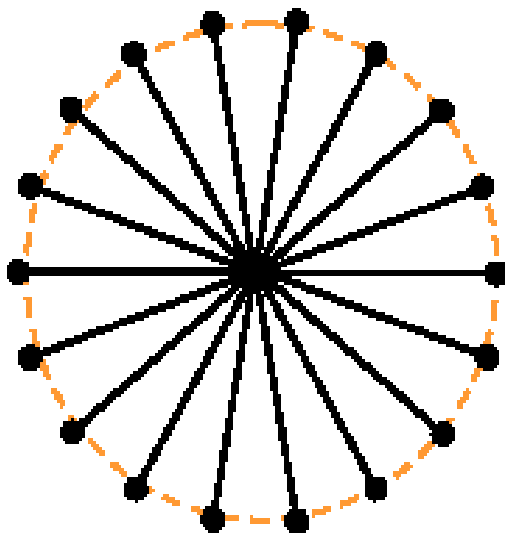


$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \Rightarrow a_x = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

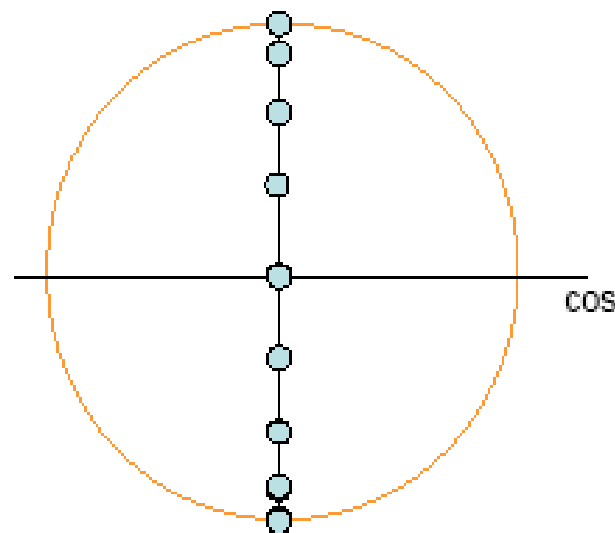
■ Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \Rightarrow a_x = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x$$

Απλή αρμονική ταλάντωση



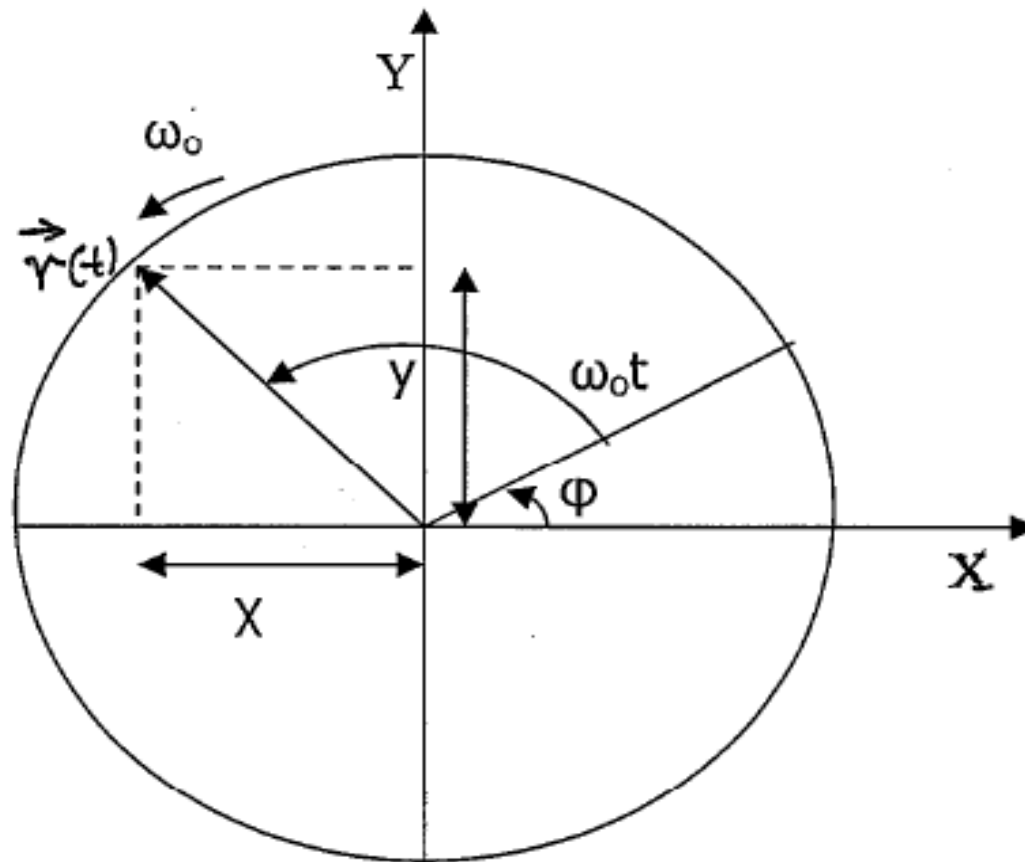
Κίνηση σημείου σε περιφέρεια κύκλου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα



Η προβολή του σημείου στον άξονα των ημιτόνων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

Χαρακτηριστικά,
η κίνηση που
περιγράφεται από την
εξίσωση είναι όμοια με
την κίνηση που εκτελεί
η προβολή μιας
κυκλικής κίνησης στον
x-άξονα

■ Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση

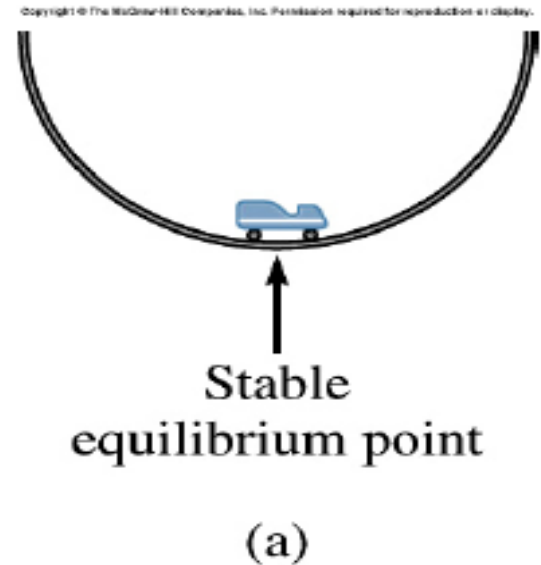


Σχήμα 1.1. Διάγραμμα περιστρεφόμενου διανύσματος η προβολή του οποίου στον άξονα X δίνει την ταλάντωση $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Η προβολή στον άξονα Y αντιστοιχεί στο φανταστικό μέρος $iA \sin(\omega_0 t + \varphi)$ της ταλάντωσης που συνοδεύει το πραγματικό (Εξίσωση 1.4).

■ Δυνάμεις και ταλαντώσεις

- **Ταλάντωση – Περιοδική κίνηση**
- Όταν σ' ένα φυσικό σύστημα (π.χ. ένα αβαρές ελατήριο συνδεδεμένο με μάζα, ένα απλό εκκρεμές, ένα φυσικό εκκρεμές, ένα στροφικό εκκρεμές κ.α.) κάποιο αίτιο το απομακρύνει 'ελαφρά' από τη **θέση ισορροπίας** του, λ.χ. το απομακρύνουν κατά μία μικρή ποσότητα x , τότε αναπτύσσονται δυνάμεις, οι οποίες είναι ανάλογες προς την απομάκρυνση και ονομάζονται δυνάμεις επαναφοράς.
- Λόγω αδράνειας, το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας προς το αντίθετο άκρο

$$\bullet F = - k x, \text{ (Hook's Law)}$$

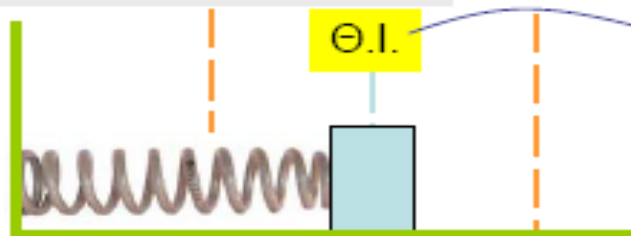


■ Δυνάμεις και ταλαντώσεις

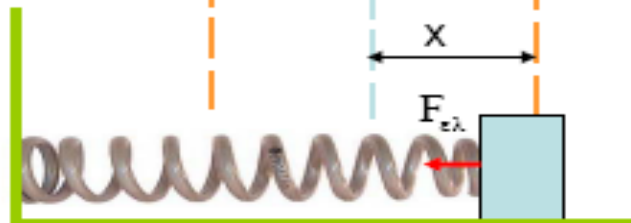
$$\bullet F = -k x, \text{ (Hook's Law)}$$

Ταλαντώσεις

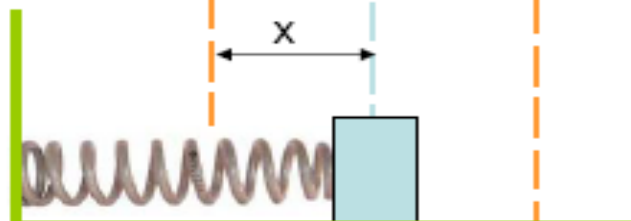
Σύστημα μάζας - ελατηρίου



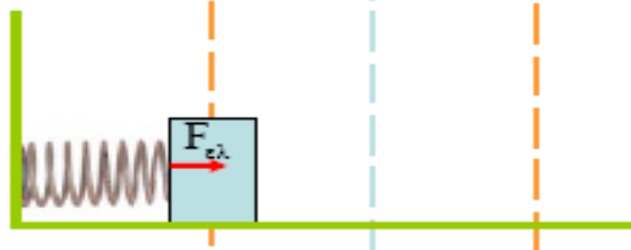
Το σώμα ισορροπεί και το ελατήριο δεν δέχεται καμία δύναμη **1**



Το σώμα απομακρύνεται κατά x και το ελατήριο επιμηκύνεται **2**

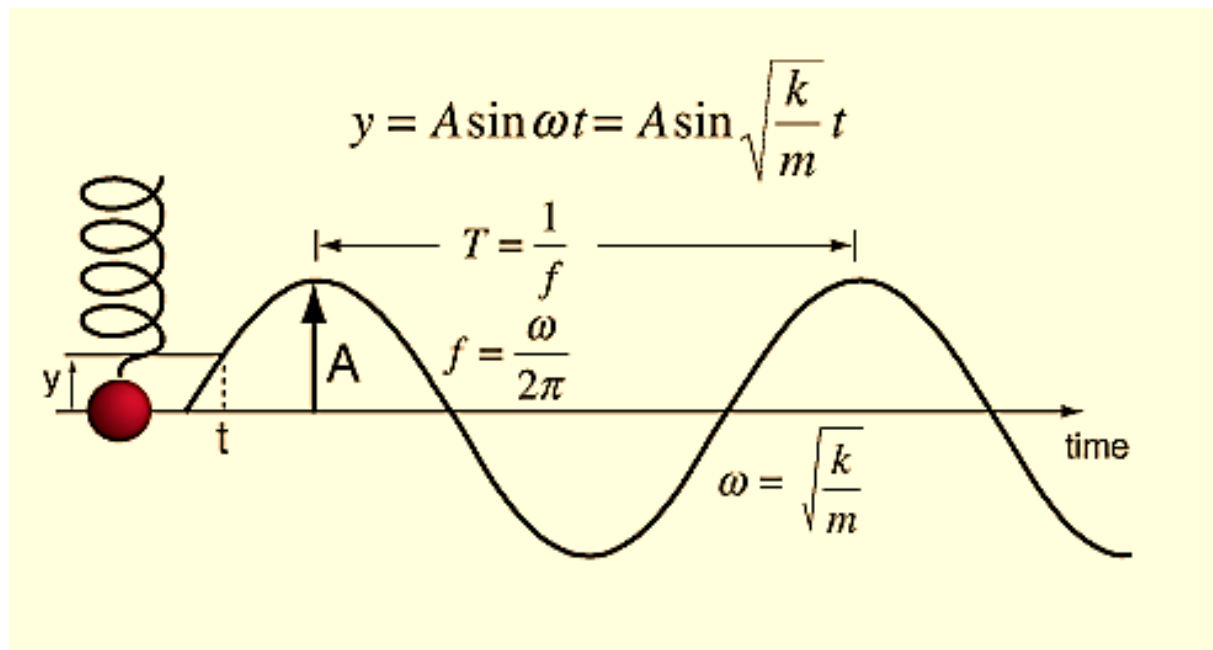
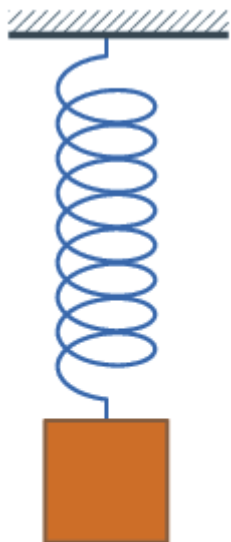


Το σώμα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση υπό την επίδραση της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου $F = -k \cdot x$ **3**



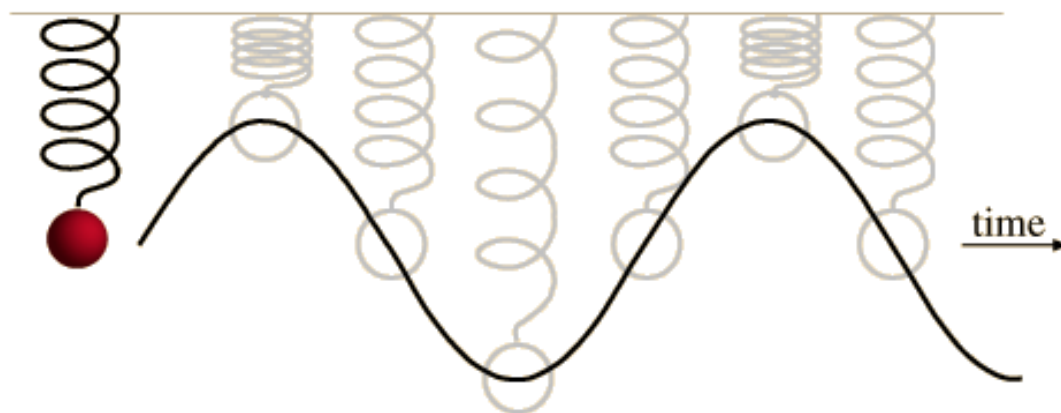
Το σώμα σταματά στιγμιαία αφού έχει μετακινηθεί κατά x προς την αντίθετη κατεύθυνση και κινείται προς τη θέση ισορροπίας. **4**

❧ Ταλαντώσεις

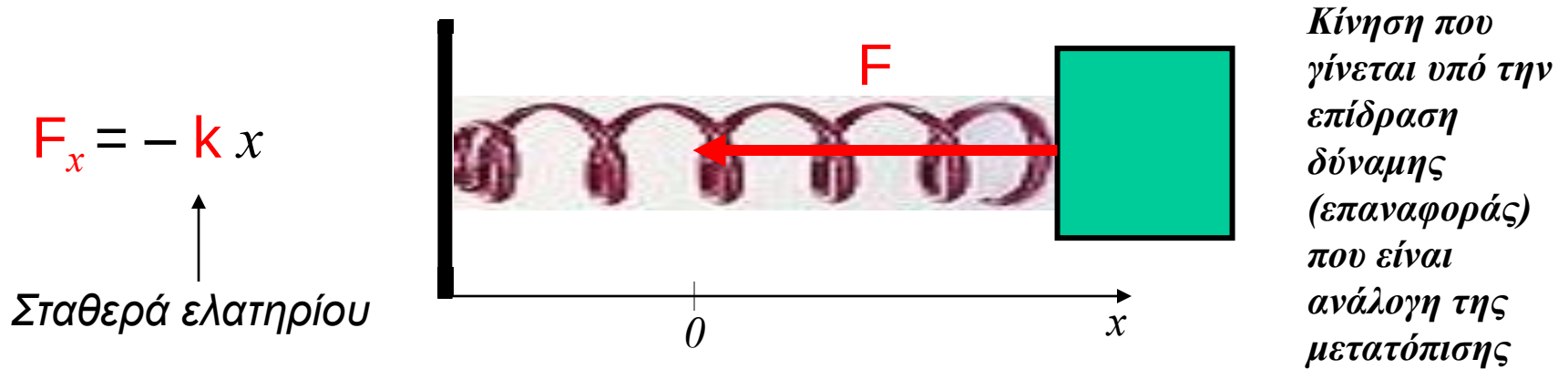


Ένα πακτωμένο σύστημα
μάζας-ελατηρίου που εκτελεί
αμείωτες ταλαντώσεις

$$F = ma, \text{ or } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$



■ Απλός αρμονικός ταλαντωτής (Simple Harmonic Oscillator)



2^{ος} νόμος του Newton για τη μάζα: $m a_x = F_x$

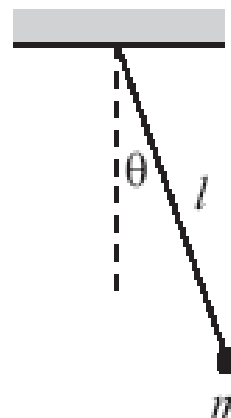
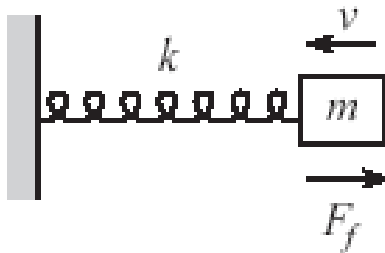
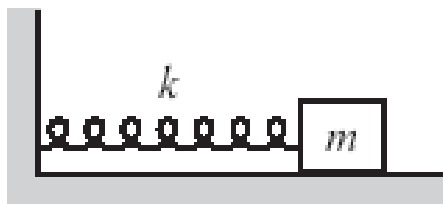
Διαφορική εξίσωση
κίνησης για τη
μετατόπιση $x(t)$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -k x$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε πως, στην συγκεκριμένη περίπτωση, θεωρούμε πως έχουμε ένα **απομονωμένο σύστημα** που περιλαμβάνει τη μάζα m και ένα μηχανισμό (π.χ. ελατήριο) που προκαλεί τη δύναμη $F(x)$.

Θεωρούμε δηλαδή πως **δεν ασκείται στο σύστημα αυτό κάποια εξωτερική δύναμη**. Αν εξασκείτο, τότε δεν θα είχαμε απομονωμένο σύστημα.

Εξισώσεις κίνησης απλού αρμονικού ταλαντωτή (ΑΑΤ)



Διαφορική εξίσωση κίνησης
ΑΑΤ

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0$$

Ορίζουμε:

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

Displacement
at time t

Phase

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitude

Time

Angular
frequency

Phase
constant
or phase
angle

Δευτέρας τάξης (δεύτερη παράγωγος), **ομογενής** (=0),
γραμμική (οι παράγωγοι εμφανίζονται σε πρώτη δύναμη)
διαφορική εξίσωση

Λύση της διαφορικής εξίσωσης
κίνησης για τη μετατόπιση $x(t)$

Λύση της Δ.Ε. του απλού αρμονικού ταλαντωτή (?)

Ταλαντώσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Δοκιμάζω λύσεις της μορφής: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A \cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Για να λύσουμε την Δ.Ε. Του Α.Α.Τ.
δοκιμάζουμε διάφορες λύσεις.

Αν την επαληθεύουν, τότε αυτή που
δοκιμάσαμε είναι όντως λύση !!!

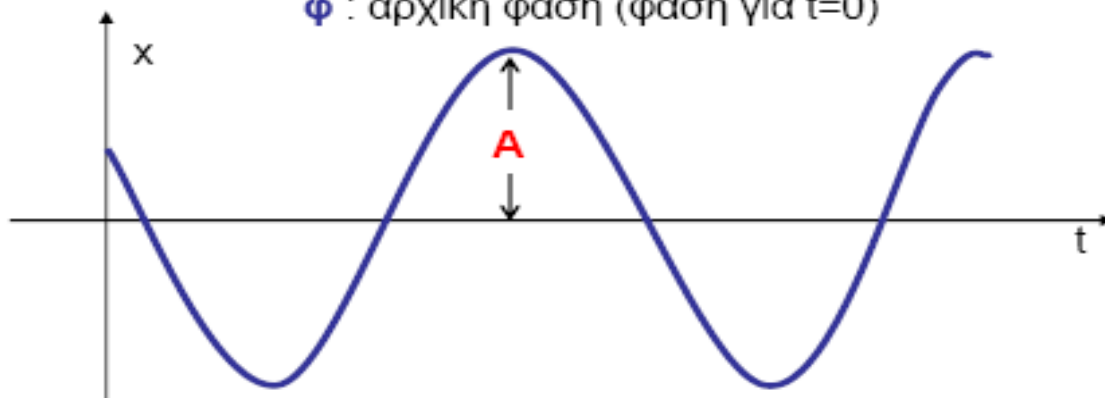
Ταλαντώσεις

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

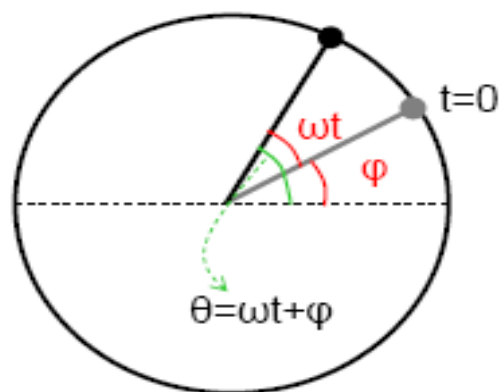
A : πλάτος ταλάντωσης
(μέγιστη τιμή του $\cos(\omega t + \varphi) = 1 \rightarrow$ μέγιστη τιμή $x=A$)

$\omega t + \varphi$: φάση

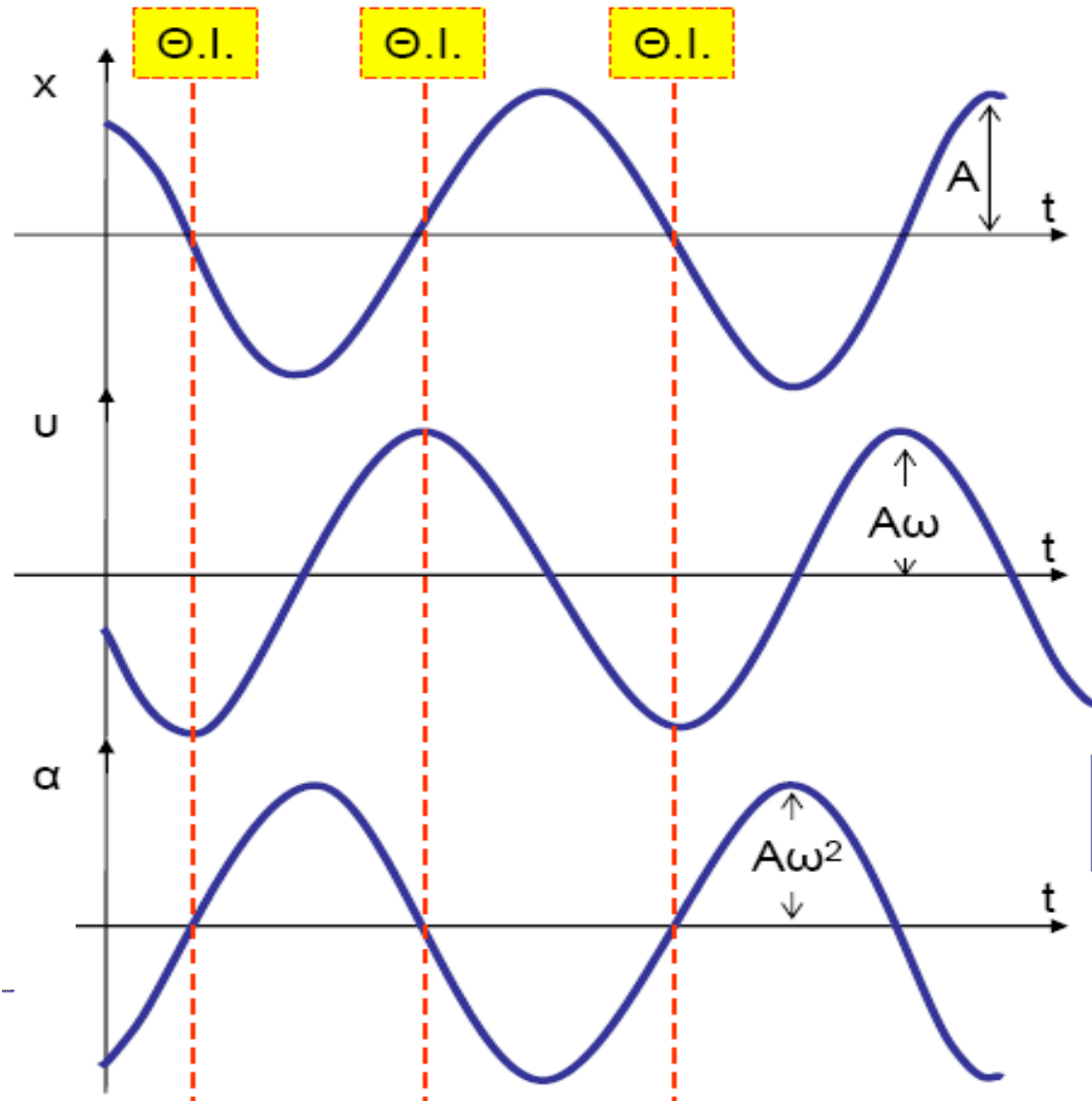
φ : αρχική φάση (φάση για $t=0$)



Σύστημα μάζας - ελατηρίου



Εξισώσεις κίνησης απλού αρμονικού ταλαντωτή: Μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση στην ΑΑΤ



$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Εξισώσεις κίνησης απλού αρμονικού ταλαντωτή: Ενέργεια στην ΑΑΤ

Κινητική ενέργεια: ενέργεια
λόγω κίνησης

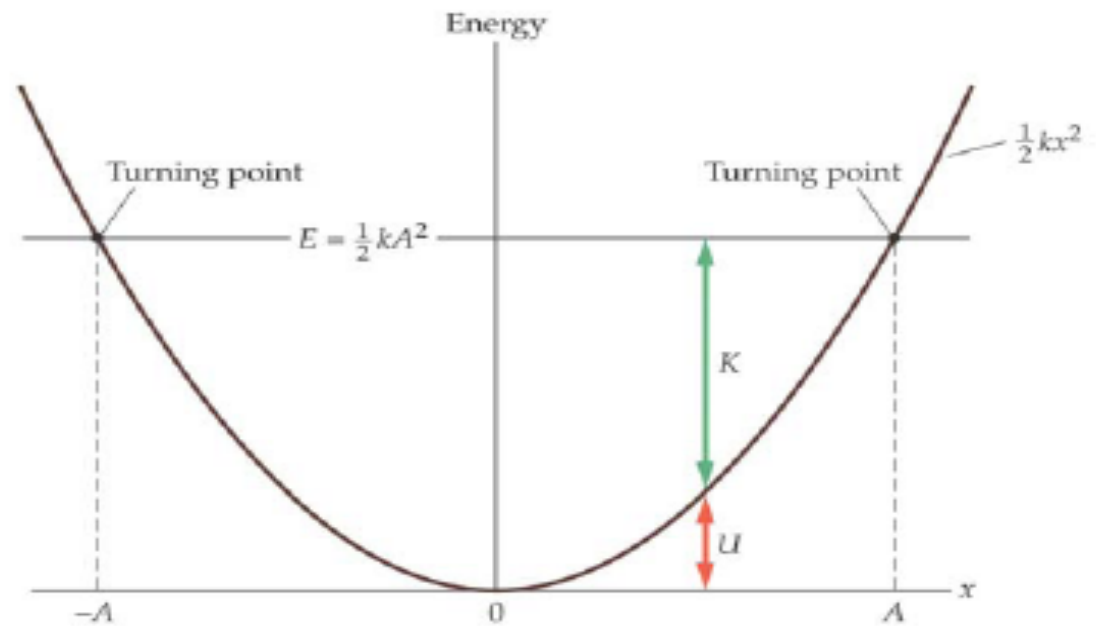
Δυναμική ενέργεια: ενέργεια
λόγω παραμόρφωσης του
ελατηρίου

Energy: $E = U + K$
U: Potential Energy
K: Kinetic Energy
Spring

$$E_{\text{pot}} = U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$E_{\text{kin}} = K = \frac{1}{2} m v^2$$

Potential Energy of simple harmonic motion



$$E = U + K = \frac{1}{2} k (A \cos(\omega t))^2 + \frac{1}{2} m (A \omega \sin(\omega t))^2$$
$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

Ταλαντώσεις

Σύστημα μάζας - ελατηρίου

Ενέργεια

Κινητική ενέργεια: ενέργεια λόγω κίνησης $K = \frac{1}{2}mv^2$

Δυναμική ενέργεια: ενέργεια λόγω παραμόρφωσης του ελατηρίου

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$$

παραμόρφωση του
ελατηρίου

Ολική ενέργεια

$$E = K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$$

Ταλαντώσεις

Μέγιστη κινητική ενέργεια

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} \Rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

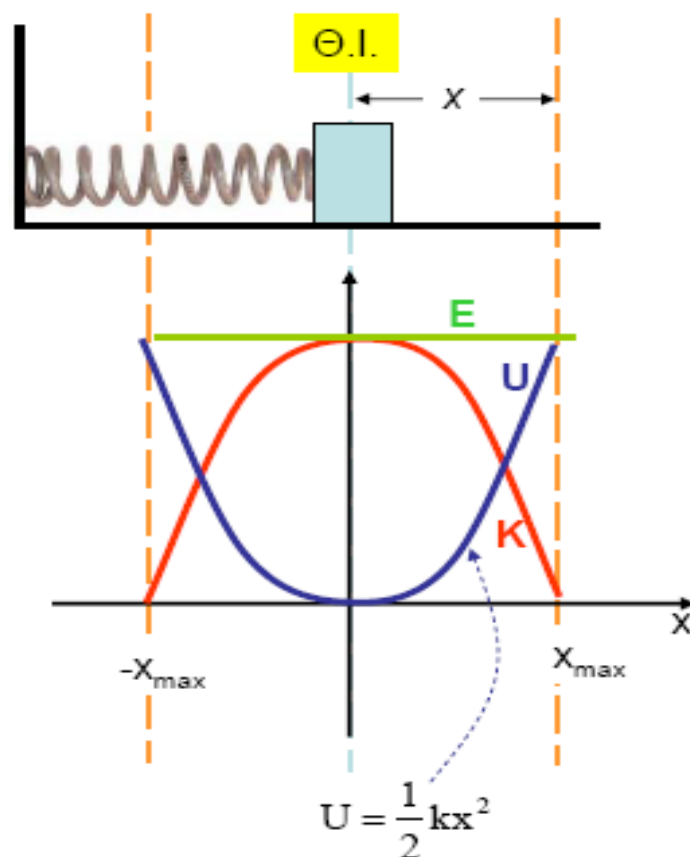
Σε θέσεις μέγιστης ταχύτητας $\rightarrow \Theta.I. (x=0)$

Μέγιστη δυναμική ενέργεια

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$$

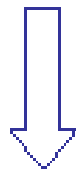
Σε θέσεις μέγιστης παραμόρφωσης $\rightarrow x=x_{\max}$

Σύστημα μάζας - ελατηρίου



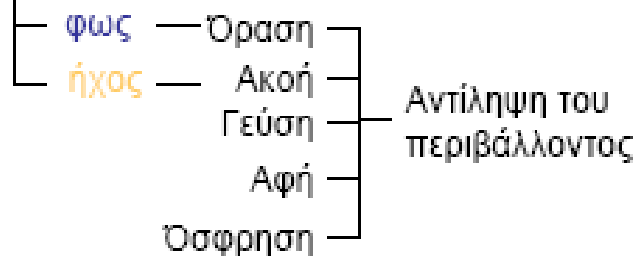
Ταλαντώσεις - κυμάνσεις

Ταλάντωση είναι μια περιοδική κίνηση, δηλαδή επαναλαμβάνεται σε κανονικά χρονικά διαστήματα, γύρω από μια θέση.



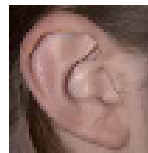
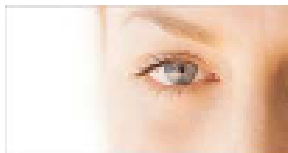
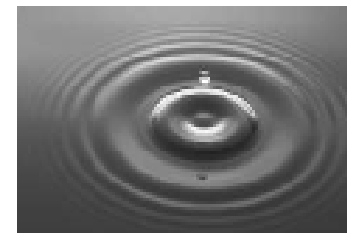
Οι ταλαντώσεις είναι πηγές κυμάτων

Τα κύματα είναι περιοδικά φαινόμενα.

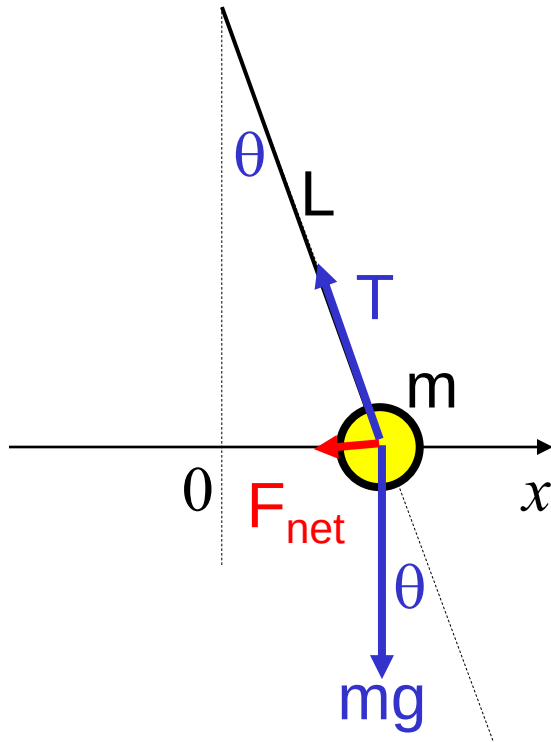


Κύμα

Διαταραχή που μεταφέρει ενέργεια από το ένα σημείο του μέσου σε ένα άλλο χωρίς να μεταφέρει μάζα



📌 Απλό εκκρεμές



$$F_{\text{net}} = mg \sin\theta$$

Για **μικρή** γωνία θ ,

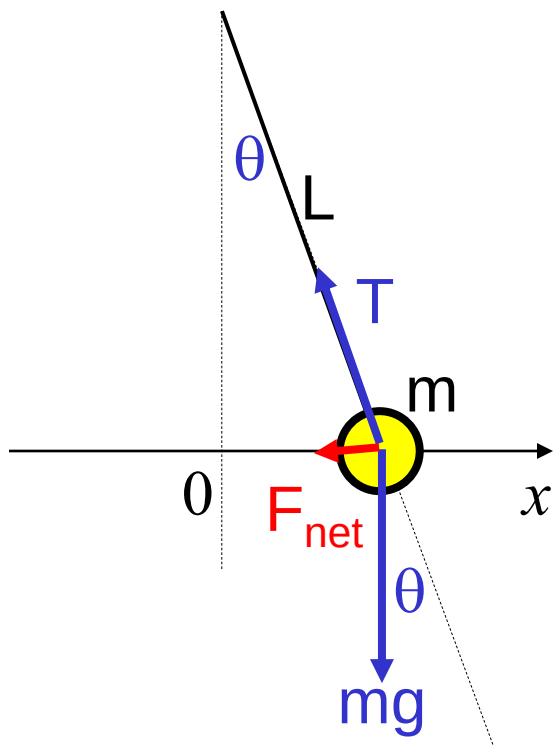
η F_{net} **είναι στην διεύθυνση** $-x$.

Και επειδή για μικρή γωνία ισχύει: $\sin\theta = x/L$

$$F_x = - (mg/L) x$$

“Σημειακή μάζα” – το μέγεθος του αντικειμένου πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος του εκκρεμμούς

■ Απλό εκκρεμές (2)



$$F = -\frac{mg}{L}x$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{L}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0$$

Άρα το σύστημα εκτελεί
ταλάντωση με γωνιακή
συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Φυσικό εκκρεμές (1)

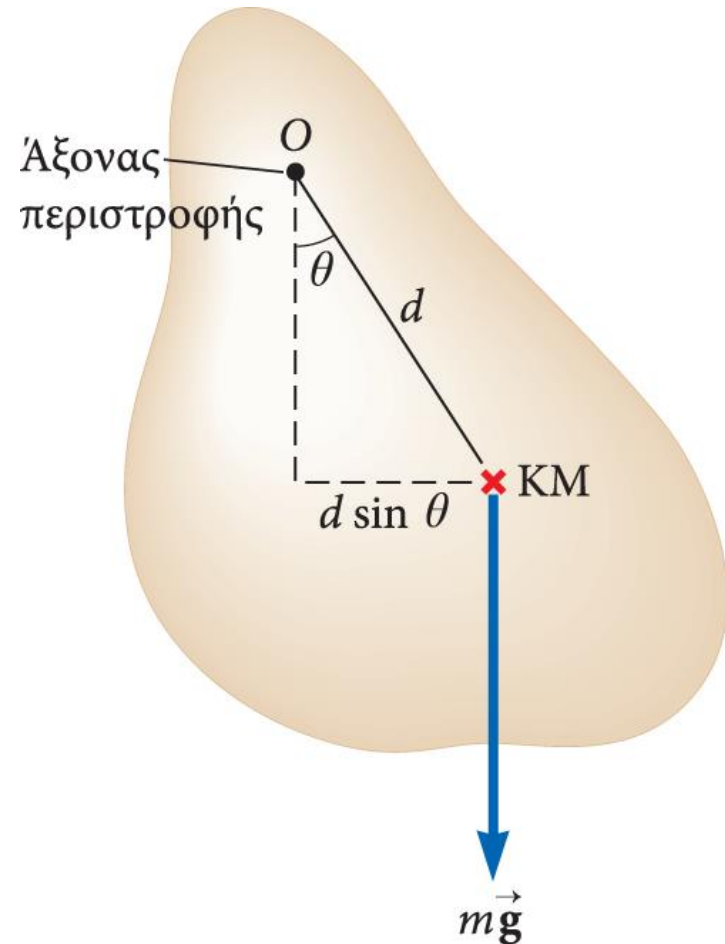
Φυσικό εκκρεμές ονομάζεται ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από ένα αναρτημένο σώμα, που δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σημειακή μάζα, και το οποίο ταλαντώνεται γύρω από έναν σταθερό άξονα που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

- Δεν είναι απλό εκκρεμές.

Η βαρυτική δύναμη προκαλεί ροπή ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο O .

Το μέτρο της ροπής είναι

$$mgd \sin \theta$$



Φυσικό εκκρεμές (2)

Το I είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O .

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Η βαρυτική δύναμη προκαλεί μια ροπή επαναφοράς.

Αν υποθέσουμε ότι η γωνία θ είναι μικρή, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2 \theta$$

Φυσικό εκκρεμές (3)

Η παραπάνω εξίσωση έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την εξίσωση που περιγράφει ένα σώμα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.

Η λύση της είναι η λύση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Φυσικό εκκρεμές (4)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φυσικό εκκρεμές για να μετρήσουμε τη ροπή αδράνειας ενός επίπεδου, άκαμπτου σώματος.

- Αν γνωρίζουμε την απόσταση d , μπορούμε να βρούμε τη ροπή αδράνειας I μετρώντας την περίοδο.

Αν $I = md^2$, τότε το φυσικό εκκρεμές ισοδυναμεί με το απλό εκκρεμές.

- Όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας.

Στροφικό εκκρεμές

Ας υποθέσουμε ότι ένα άκαμπτο σώμα είναι αναρτημένο από ένα σύρμα, το οποίο είναι στερεωμένο σε ένα σταθερό σημείο.

Αν στρέψουμε το σώμα κατά μια γωνία θ , το συστραμμένο σύρμα θα ασκήσει μια ροπή επαναφοράς στο σώμα η οποία είναι ανάλογη της γωνιακής θέσης του.

Στροφικό εκκρεμές

Έστω ότι ένα άκαμπτο σώμα είναι αναρτημένο από ένα σύρμα η πάνω άκρη του οποίου είναι στερεωμένη σε ένα σταθερό στήριγμα.

Το συστραμμένο σύρμα ασκεί μια ροπή επαναφοράς στο σώμα, η οποία είναι ανάλογη της γωνιακής θέσης του.

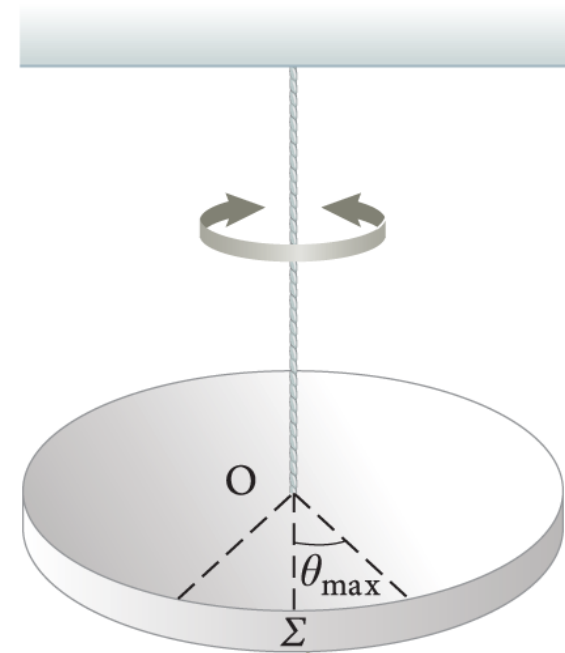
Η ροπή επαναφοράς είναι $\tau = -\kappa\theta$.

- Το κ είναι η σταθερά στρέψης του σύρματος.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\tau = I\alpha \rightarrow -\kappa\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$



Το σώμα ταλαντώνεται γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ με πλάτος $\theta_{\max}$.

Περίοδος στρωφικού εκκρεμούς (συνέχεια)

Από την εξίσωση της ροπής προκύπτει η εξίσωση της κίνησης του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

Η περίοδος είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

- Δεν υπάρχει ο περιορισμός της μικρής γωνίας.
- Υποθέτουμε ότι δεν υπερβαίνουμε το όριο ελαστικότητας του σύρματος.

Εξισώσεις κίνησης απλού αρμονικού ταλαντωτή: Μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση στην ΑΑΤ

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

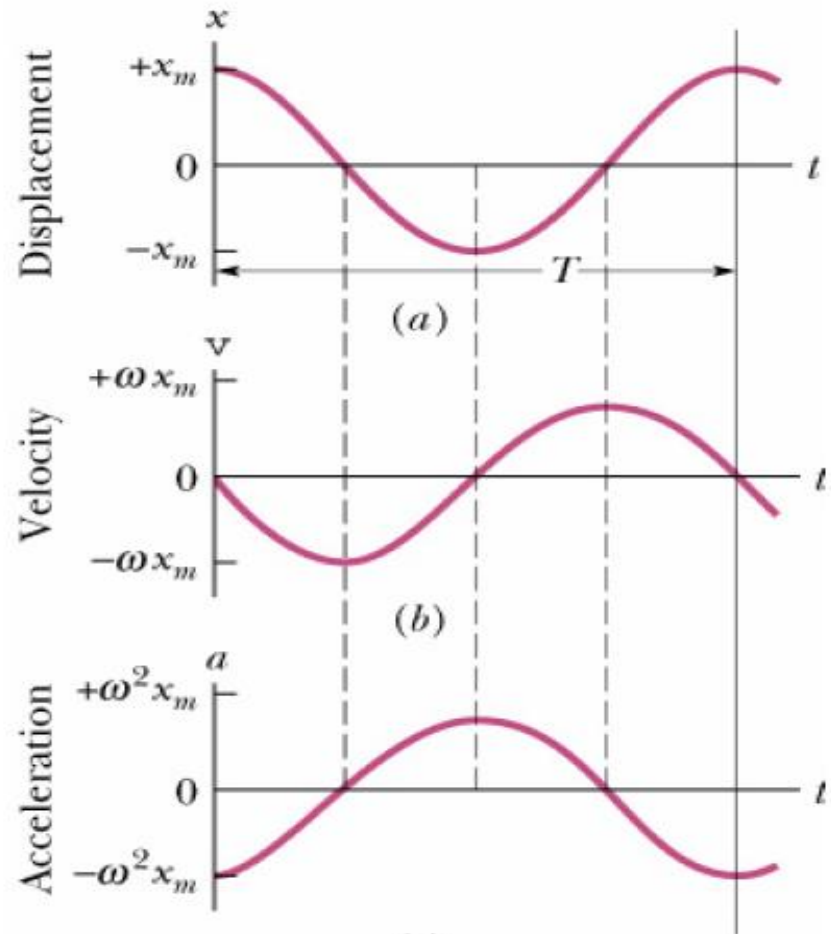
$$F = -kx \quad F = ma \Rightarrow ma = -kx$$

$$m[-A\omega^2 \cos(\omega t)] = -k[A \cos(\omega t)]$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{or} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Η περίοδος ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$



Παράδειγμα

- Μάζα 12Kg είναι εξαρτημένη σε ελατήριο με $K=1.3 \times 10^4$. Το σύστημα ξεκινά με επιμήκυνση +55cm. Ποια η $v_{\max}$.



$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(t=0) = -A\omega \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ η } \varphi = \pi$$

Διαλέγουμε την περίπτωση με $\varphi=0$ μια και η αρχική επιμήκυνση >0

$$x(t=0) = A \cos(\varphi) = 0.55$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 33 \text{ rad / s}$$

$$x(t) = 0.55 \cos(33t)$$

$$v_{\max} = A\omega = 18 \text{ m / s}$$

$$v(t) = -v_{\max} \sin(33t)$$

Άσκηση

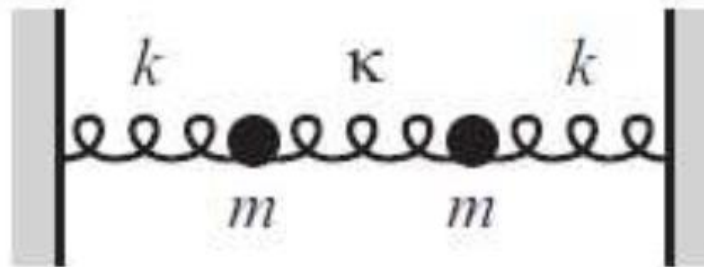
Ένα παιδάκι κάνει κούνια με μέγιστη απομάκρυνση 2m από τη θέση ισορροπίας. Αν η μέγιστη επιτάχυνση είναι 0.5m/s^2 να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{0.5}{2}} = 0.5 \text{ sec}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi \text{ sec}$$



■ Συζευγμένες ταλαντώσεις



$$F_{\text{on 1 from moving 1}} = F = -kx_1 - \kappa x_1$$

$$F_{\text{on 1 from moving 2}} = \kappa x_2$$

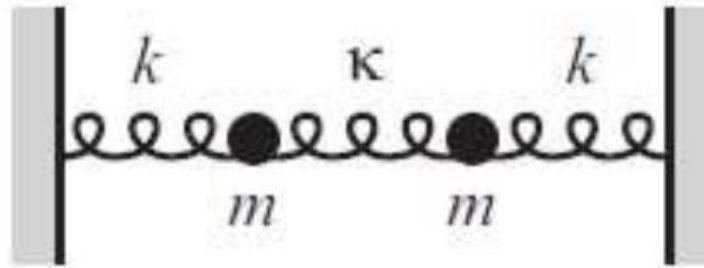
Άρα καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$m \ddot{x}_1 = -(k + \kappa)x_1 + \kappa x_2 \quad (1)$$

Παρομοίως, για το σώμα 2 έχουμε ότι

$$m \ddot{x}_2 = -(k + \kappa)x_2 + \kappa x_1 \quad (2)$$

■ Συζευγμένες ταλαντώσεις (2)



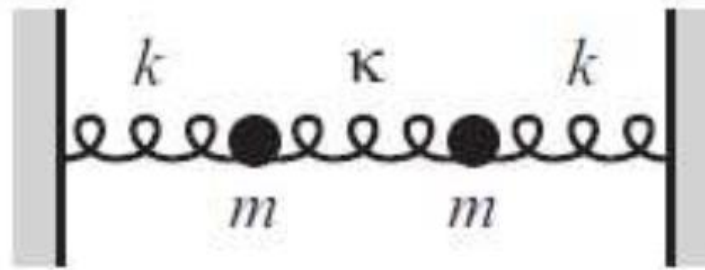
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η εξής

$$x_1 + x_2 = A_s \cos(\omega_s t + \phi_s), \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

■ Συζευγμένες ταλαντώσεις (3)



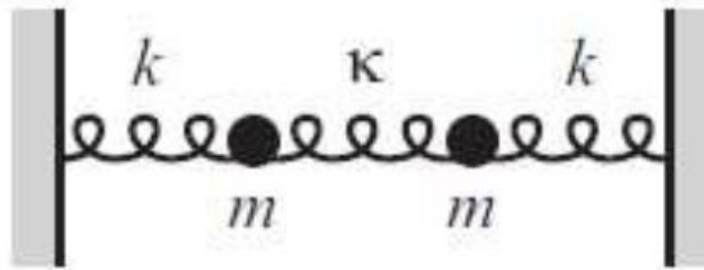
Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = (-k - 2\kappa)(x_1 - x_2)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η εξής

$$x_1 - x_2 = A_f \cos(\omega_f t + \phi_f), \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k + 2\kappa}{m}}$$

■ Συζευγμένες ταλαντώσεις (4)



Επομένως, η γενική λύση είναι

$$x_1 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)] = \frac{1}{2}[A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) + A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)]$$

$$x_2 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)] = \frac{1}{2}[A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) - A_f \cos(\omega_f t + \phi_f)]$$

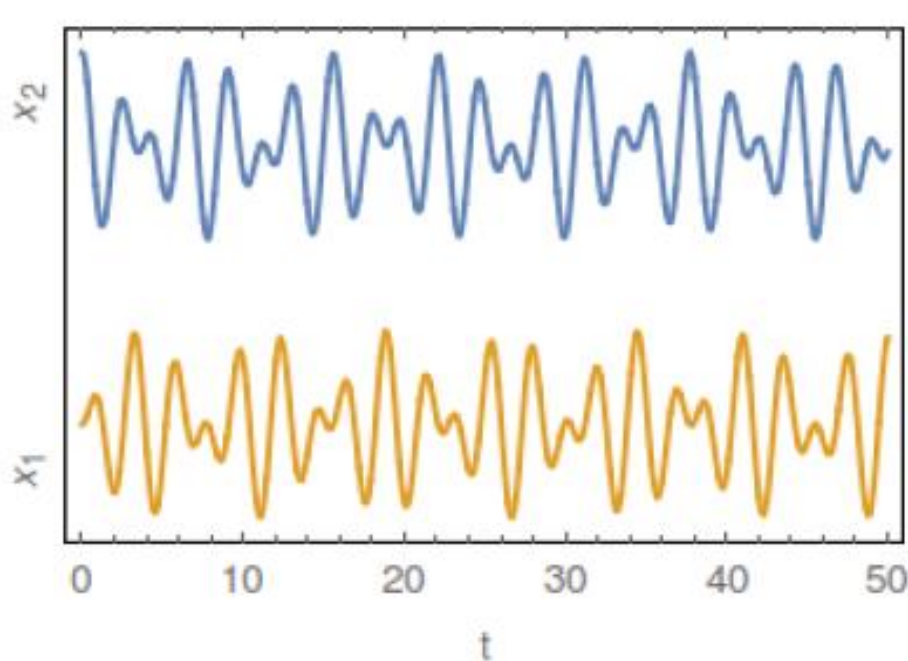
Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Θέτοντας $A_f = 0$ προκύπτει ότι $x_1 = x_2$ και το σύστημα ταλαντώνεται με συχνότητα ω_s .

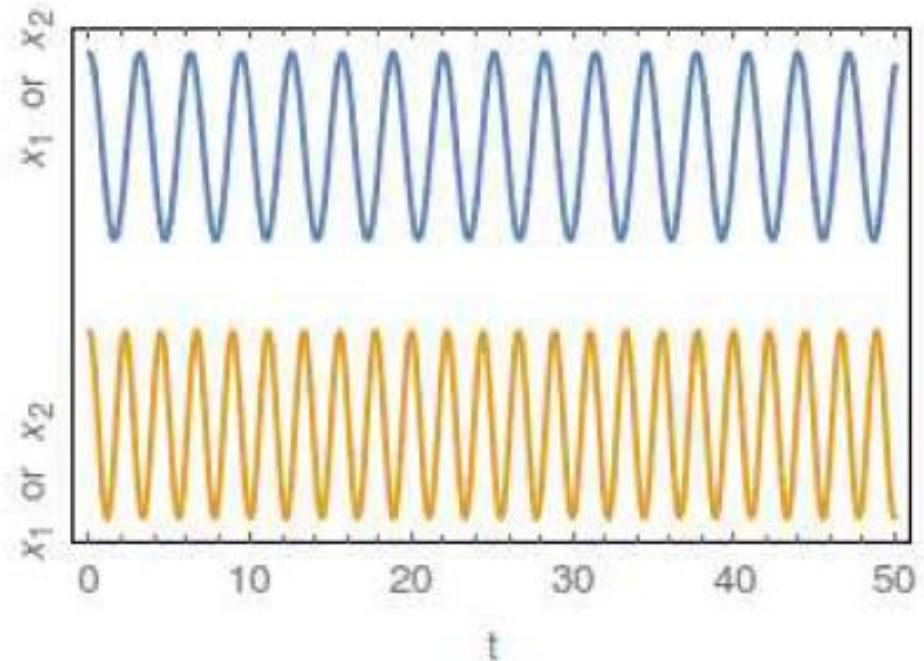
Θέτοντας $A_s = 0$ προκύπτει ότι $x_1 = -x_2$ και το σύστημα ταλαντώνεται με συχνότητα ω_f .

■ Συζευγμένες ταλαντώσεις (5)

Συμπεριφορά του συστήματος όταν οι συχνότητες ω_s και ω_f απέχουν αρκετά μεταξύ τους.



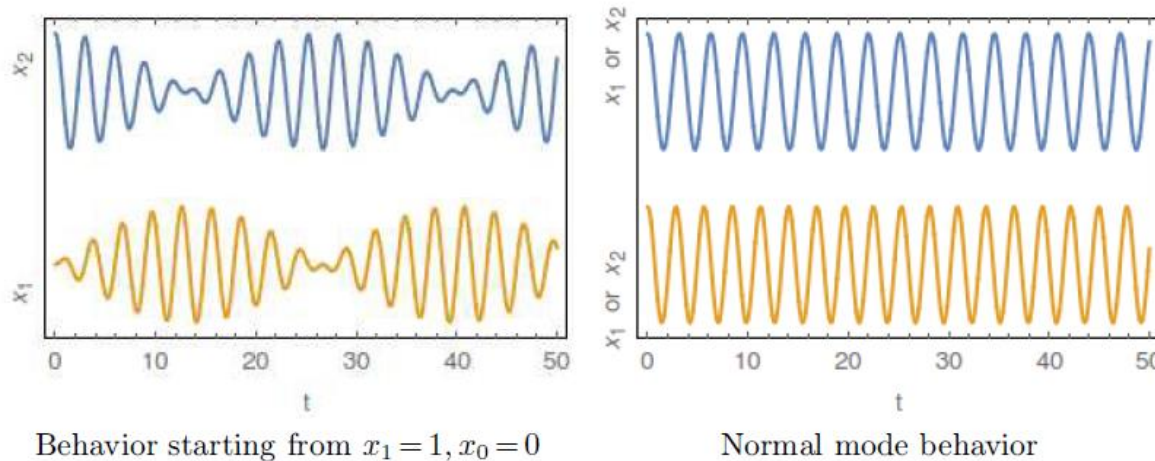
Behavior starting from $x_1 = 1, x_0 = 0$



Normal mode behavior

■ Συζευγμένες ταλαντώσεις (6) - Διακροτήματα

Συμπεριφορά του συστήματος όταν $A_s=A_f=A$ και οι συχνότητες ω_s και ω_f είναι κοντά η μία στην άλλη.



$$x_1 = A \cos\left(\frac{\omega_f + \omega_s}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_f - \omega_s}{2} t\right)$$
$$x_2 = A \sin\left(\frac{\omega_f + \omega_s}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_f - \omega_s}{2} t\right)$$

**ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΑΡΓΗΣ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ – ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ**

■ Περιοδικά φαινόμενα – Σύνθεση ταλαντώσεων

❖ Όταν σ' ένα φυσικό σύστημα (π.χ. ένα αβαρές ελατήριο συνδεδεμένο με μάζα, ένα απλό εκκρεμές, ένα φυσικό εκκρεμές, ένα στροφικό εκκρεμές κ.α.) κάποιο αίτιο το απομακρύνει 'ελαφρά' από τη θέση ισορροπίας του, λ.χ. το απομακρύνουν κατά μία μικρή ποσότητα x , τότε αναπτύσσονται δυνάμεις οι οποίες είναι ανάλογες προς την απομάκρυνση και ονομάζονται **δυνάμεις επαναφοράς**.

❖ Συχνά ένα φυσικό σύστημα είναι δυνατόν να υπόκειται στη δράση περισσότερων της μιας ταλαντωτικών δυνάμεων. Τότε έχουμε **σύνθεση ταλαντώσεων**.

Γενικά στη σύνθεση δύο ταλαντώσεων διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) σύνθεση δύο ταλαντώσεων με ίδιες συχνότητες, αλλά διαφορετικά πλάτη A_1 και A_2 και διαφορετικές φάσεις δ_1 και δ_2 . Η ταυτόχρονη δράση τους πάνω σ' ένα φυσικό σύστημα έχει σαν αποτέλεσμα ταλάντωση της γενικής μορφής:

$$y = A \cos(\omega t + \delta)$$

με πλάτος A που δίνεται από τη σχέση:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)$$

και φάση δ που δίνεται από τη σχέση:

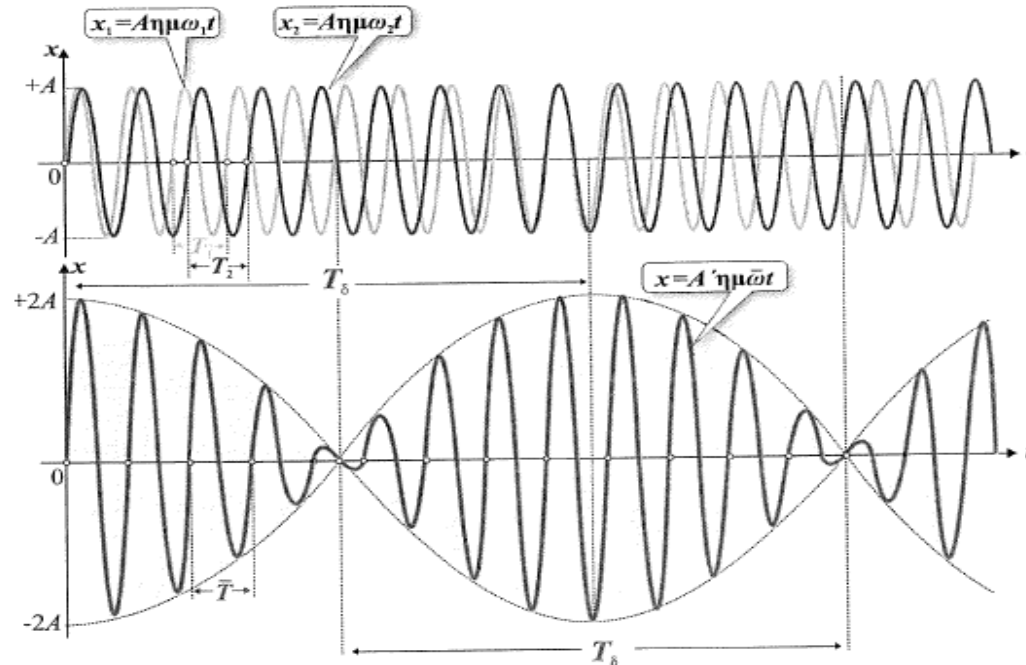
$$\tan \delta = \frac{A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2}{A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2}$$

■ Περιοδικά φαινόμενα – Σύνθεση ταλαντώσεων

β) σύνθεση δύο ταλαντώσεων με διαφορετικές συχνότητες, αλλά ίσα πλάτη A ($A_1=A_2=A$) και ίδιες αρχικές φάσεις $\delta_1=\delta_2$. Η σύνθεση τους οδηγεί σε μια «διαμορφωμένη ταλάντωση» γενικής μορφής:

$$y = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Στη περίπτωση αυτή, όταν συμβεί: $\omega_1 \cong \omega_2$, έχουμε το **διακρότημα**.



■ Περιοδικά φαινόμενα – Σύνθεση ταλαντώσεων

γ) Κατά τη σύνθεση δύο κάθετων ταλαντώσεων με ίσες συχνότητες, αλλά διαφορετικά πλάτη A_1 και A_2 και διαφορετικές αρχικές φάσεις ϕ_1 και ϕ_2 έχουμε σαν αποτέλεσμα μια ελλειπτική περιοδική κίνηση δύο διαστάσεων, που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = \sin^2(\phi_1 - \phi_2).$$

Στην ειδική περίπτωση, όπου τα πλάτη A_1 και A_2 είναι ίσα και η διαφορά φάσεως $\phi_1 - \phi_2 = 90^\circ$, η περιοδική κίνηση είναι κύκλος.

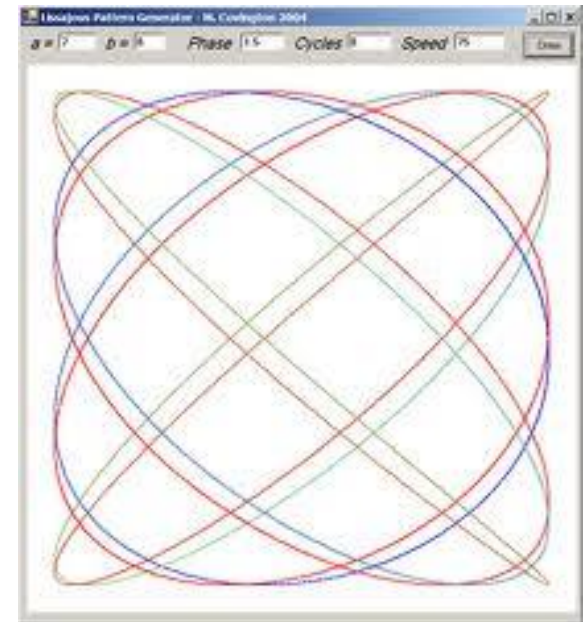
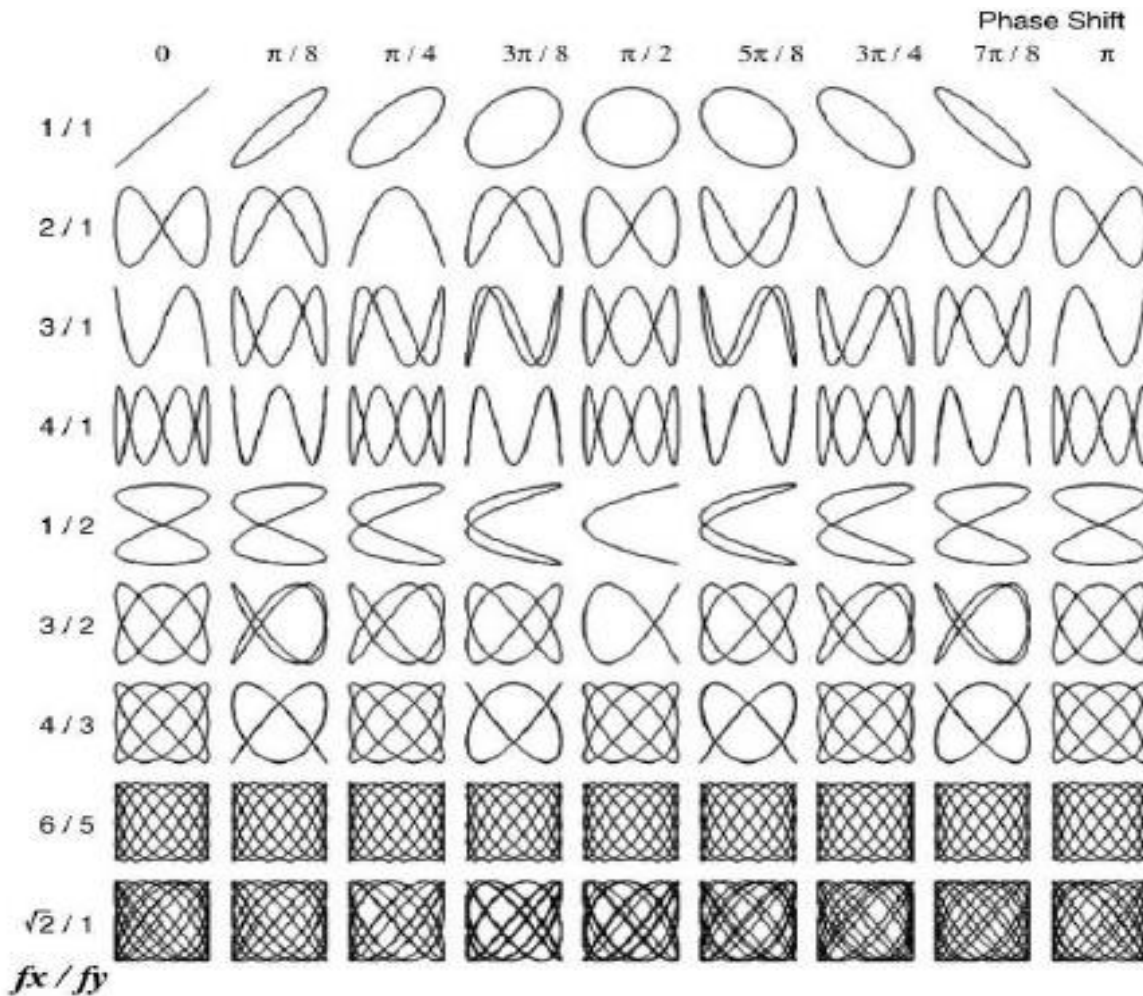
Γενικά, κατά τη σύνθεση n το πλήθος ταλαντώσεων, με την ίδια συχνότητα ω και το ίδιο πλάτος A , καθώς επίσης και την ίδια διαδοχική διαφορά φάσεως δ , το αποτέλεσμα είναι μια ταλάντωση της μορφής:

$$y = A \cos(\omega t + \delta)$$

με την ίδια συχνότητα ω , της οποίας όμως το πλάτος A και η γωνία δ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$A = A \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \text{ και } \delta = \frac{\delta}{2}(n-1)$$

Σύνθεση κάθετων ταλαντώσεων – Εικόνες Lissajous

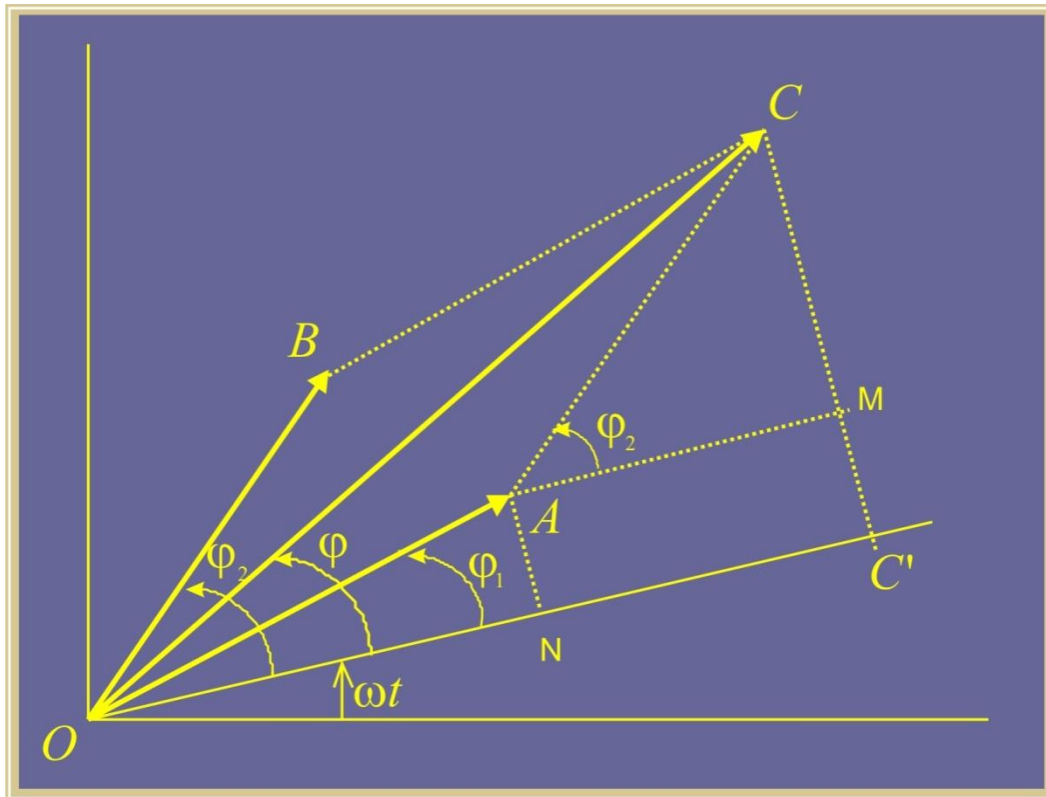


Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων

Αν $T_1 = T_2 \Rightarrow$ αρμονική ταλάντωση

Αν $T_1 \neq T_2 \Rightarrow$ μη αρμονική περιοδική ταλάντωση

Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Ίδιας Περιόδου (γεωμετρική απόδειξη)



$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \eta \mu (\omega t + \varphi_1) \\ y_2 &= B \eta \mu (\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right| \Rightarrow (\text{σύνθεση}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C \eta \mu (\omega t + \varphi)$$

$$\left| \begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sigma \nu \nu (\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \epsilon \varphi \varphi &= \frac{A \eta \mu \varphi_1 + B \eta \mu \varphi_2}{A \sigma \nu \nu \varphi_1 + B \sigma \nu \nu \varphi_2} \end{aligned} \right|$$

Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Ίδιας Περιόδου (αλγεβρική απόδειξη)

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = A\eta\mu(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 = B\eta\mu(\omega t + \varphi_2) \end{array} \right| \Rightarrow y = y_1 + y_2 = C\eta\mu(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$A\eta\mu(\omega t + \varphi_1) + B\eta\mu(\omega t + \varphi_2) = C\eta\mu(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$A\eta\mu(\omega t) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1 + A\eta\mu\varphi_1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + B\eta\mu(\omega t) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_2 + B\eta\mu\varphi_2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \\ = C\eta\mu(\omega t) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + C\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow$$

$$(A\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + B\sigma\upsilon\nu\varphi_2) \cdot \eta\mu(\omega t) + (A\eta\mu\varphi_1 + B\eta\mu\varphi_2) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \\ = C\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu(\omega t) + C\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow$$

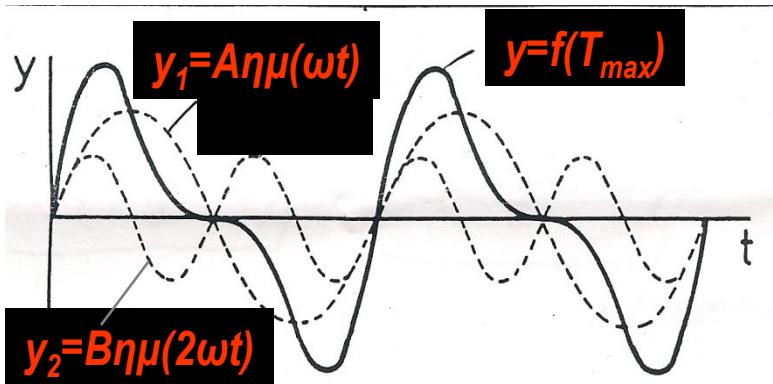
$$\left. \begin{array}{l} A\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + B\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = C\sigma\upsilon\nu\varphi \\ A\eta\mu\varphi_1 + B\eta\mu\varphi_2 = C\eta\mu\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\sigma\upsilon\nu(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \varepsilon\varphi\varphi = \frac{A\eta\mu\varphi_1 + B\eta\mu\varphi_2}{A\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + B\sigma\upsilon\nu\varphi_2} \end{array} \right.$$

Αν κάποια από τις συνιστώσες δίνεται ως συνάρτηση συνημιτόνου τότε τη μετατρέπουμε σε ημιτονική:

$$\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = \eta\mu[\pi/2 - (\omega t + \varphi)] = -\eta\mu[\omega t + \varphi - (\pi/2)] \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = \eta\mu[\pi/2 + (\omega t + \varphi)]$$

$$\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = \sigma\upsilon\nu(\omega t)\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu(\omega t)\eta\mu\varphi$$

Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Διαφορετικών Περιόδων



1^η Περίπτωση:

$$y_1 = A \sin(\omega t), y_2 = B \sin(2\omega t)$$

$$y = A \sin(\omega t) + B \sin(2\omega t)$$

Η y_2 συναντά την y_1 σε χρόνο T οπότε:

$$2\omega T - \omega T = 2\pi \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi/\omega}$$
 (ίδια με της y_1)

2^η Περίπτωση:

Έστω $y_1 = A \sin(\omega_1 t)$ και $y_2 = B \sin(\omega_2 t)$, $\omega_1 > \omega_2$

Η y_1 συναντά τη y_2 όταν $\omega_1 T - \omega_2 T = 2\pi \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)}$

$$\Rightarrow \mathbf{f = (\omega_1 - \omega_2)/2\pi}$$

Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Διαφορετικών Περιόδων που Διαφέρουν Ελάχιστα Μεταξύ τους (ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑΤΑ)

Αν $A=B$ και $|\omega_1 - \omega_2| \ll \Rightarrow y \approx$ αρμονική και $T \sim \max$. Δηλαδή:

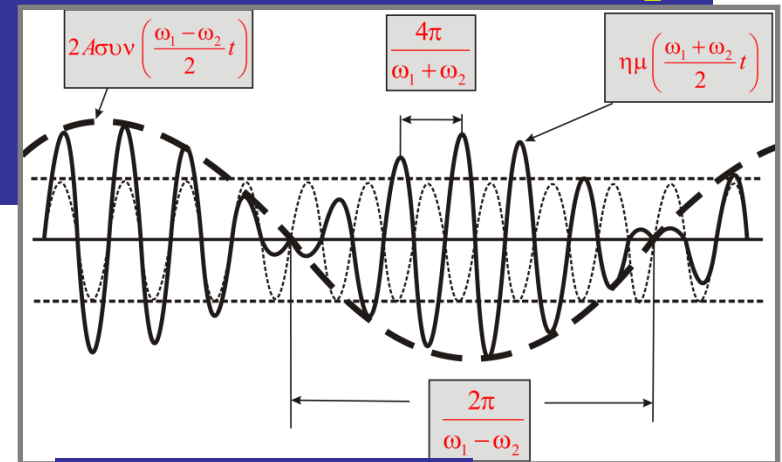
$$y = A\eta\mu\omega_1 t + A\eta\mu\omega_2 t = A(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) = 2A\left(\eta\mu\frac{\omega_1 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 t}{2} + \eta\mu\frac{\omega_2 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_2 t}{2}\right) =$$

$$= 2A\left[\eta\mu\frac{\omega_1 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 t}{2}\left(\eta\mu^2\frac{\omega_2 t}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega_2 t}{2}\right) + \eta\mu\frac{\omega_2 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_2 t}{2}\left(\eta\mu^2\frac{\omega_1 t}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega_1 t}{2}\right)\right] =$$

$$= 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

αργή μεταβολή
 $f = (f_1 - f_2)/2$

γρήγορη μεταβολή
 $f = (f_1 + f_2)/2$



$y =$ διακρότημα $\sim$ αρμονική ταλάντωση με πλάτος $2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ (αργή μεταβολή)

και φάση $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$ (γρήγορη μεταβολή)

Συχνότητα-περίοδος διακροτήματος : $\omega_\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \Rightarrow f_\delta = \frac{f_1 - f_2}{2} \Rightarrow T_\delta = \frac{2}{f_1 - f_2}$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. “Φυσική των Ταλαντώσεων και των Κυμάτων”, Pain H. J., ISBN: 978-960-266-001-0, 1997.
2. “ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ”, K. U. Ingard, ISBN: 960-254-678-6, 2008.
3. **Acoustics and Vibration Animations**, Daniel A. Russell, Ph.D., Physics Department, Kettering University, Flint, MI 48504-4898.
<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/wave-x-t/wave-x-t.html>
4. “**Physics vol. I, II**”, D. Halliday, R. Resnick, K. Krane, Wiley Int. Publ., 1992.
5. **ΦΥΣΙΚΗ** OHANIAN, Τόμος Α’ και Β’, Μετάφραση Α. Φίλιππα, ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, 1991
6. «Ταλαντώσεις», Μαρία Κατσικίνη, katsiki@auth.gr, users.auth.gr/katsiki
7. http://www.dikaoulakos.gr/themata/fysiki_ckat.pdf
8. PHY138 – Waves, Lecture 1, Jason Harlow
9. Ιστοσελίδες στο διαδίκτυο χωρίς σαφή αναφορά από τους συγγραφείς.
10. **Φυσική για Αρχιτέκτονες**, Ε. Αναστασάκη, Ε.Μ.Πολυτεχνείο, 1985.

